
1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE





L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL (12 NUMÉROS) :

Paris.................... 7 fr. | Dép. et Union postale... 8 fr. 50

Les douze numéros forment chaque année un Volume de 300 pages au moins.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET É. LEMOINE,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Examinateur à l'École Polytechnique,

Émile LEMOINE,
Ingénieur civil,
Ancien Élève de l'École Polytechnique,

Ed. MAILLET,
Docteur ès Sciences,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

A. GRÉVY,
Docteur ès Sciences,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au Lycée Saint-Louis.

Publication honorée d'une souscription du Ministère
de l'Instruction publique.

TOME XV. — 1908.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

QUESTIONS [1].

1107. [H3c] (**1897**, 170) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{\partial u}{\partial}\left(\alpha\,\partial\,\frac{\frac{\alpha}{K}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\alpha}{K}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{1}{\alpha}\right)=-K$$

ou en donner quelques solutions particulières.

GIACOMO CANDIDO (Pise).

1108. [M²9d] (**1897**, 170) La surface, constituée par les points dont les distances à trois plans rectangulaires sont égales aux côtés des triangles inscrits dans une circonférence de rayon R, a une forme assez curieuse. Pour en avoir une idée, il suffit de creuser trois doubles entonnoirs, aux parois convexes vers l'intérieur, dans un cube de côté 4R, en partant des circonférences inscrites aux faces, et en allant jusqu'au centre du cube, où les parois doivent toucher les quatre plans déterminés par le centre et par les milieux des arêtes. Il faut ensuite enlever chaque sommet, et les arêtes qui y

(1) Pour gagner de la place, nous supprimons cette année, comme nous l'avons déjà fait en 1896, 1903 et 1905, la Liste des abréviations conventionnelles. Nos collaborateurs pourront la consulter dans les Tomes précédents ou dans l'*Index du Répertoire de bibliographie des Sciences mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars). Ils pourront également se reporter aux observations indiquées en tête du Tome XI (1904), observations que nous ne reproduisons pas ici. LA RÉD.

passent, par une troncature courbe, créant une face convexe, qui se raccorde, tangentiellement aux faces du cube, avec les parois des trois entonnoirs voisins. Les sommets sont ainsi remplacés par huit ombilics, situés sur une sphère de rayon 3R; dans leur voisinage, la surface se comporte comme une sphère de rayon R. Le plan tangent en un point quelconque intercepte sur les axes du cube des segments proportionnels aux cosinus des angles du triangle correspondant. Les douze plans tangents au centre et aux ombilics déterminent huit tétraèdres réguliers, qui deviennent des heptaèdres lorsqu'on en supprime les parties extérieures au cube. L'aspect général de la surface est celui du groupement de ces huit heptaèdres. Cette surface a-t-elle été l'objet d'une étude spéciale? *Rosace.*

1109. [O1] (**1897**, 171) La surface dont je parle dans la question précédente limite un volume $8\pi R^3$. Y a-t-il moyen de parvenir à ce résultat par des considérations de Géométrie infinitésimale *plane*? *Rosace.*

1110. [M²2b] (**1897**, 171) $2a$, $2b$, $2c$ sont les axes d'un ellipsoïde, et l'on suppose $a > b > c$; r est le rayon d'une sphère, et l'on suppose $a > r > c$; l'ellipsoïde et la sphère étant concentriques, pourrait-on me faire connaître le volume de la partie commune à ces deux solides?

Desprats.

1112. [V] (**1897**, 171) Dans quel Ouvrage la notion et la définition de la forme quadratique ont-elles été données pour la première fois?

Gauss (*Disquisitiones*) et Legendre (*Th. des nombres*) parlent de la forme quadratique comme d'une notion courante, sans plus la définir que le produit, le quotient ou la racine. Il en est de même chez des auteurs plus récents (¹).

(¹) *Voir* Serret, *Algèbre supérieure*, qui prend pourtant la peine de définir la fonction symétrique.

Petersen (traduction Laurent) en donne la forme générale, mais toujours en supposant la définition philosophique déjà connue. *Altschuler.*

1118. [**D2a**] (**1897**, 173) La formule d'interpolation de Newton

$$f(x+a)=f(x)+\frac{a}{1}\frac{\Delta f(x)}{h}$$
$$+\ldots+\frac{a(a-h)\ldots(a-\mu h+h)}{1.2\ldots\mu}\frac{\Delta\mu f(x)}{h\mu}+\ldots$$

[où $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x), \ldots$] conduisant, pour $\lim h=0$, à la formule de Taylor, on est amené à se demander quelles sont les fonctions $f(x)$ pour lesquelles la différence

$$f(x+a)-f(x)-\frac{a}{1}\frac{\Delta f(x)}{h}$$
$$-\ldots-\frac{a(a-h)\ldots(a-\mu h-h)}{1.2\ldots\mu}\frac{\Delta\mu f(x)}{h\mu}$$

peut être mise sous des formes analogues à celles du reste de la série de Taylor; par exemple, sous la forme

$$\frac{a(a-h)\ldots(a-\mu h)}{1.2\ldots\mu(\mu+1)}\frac{\Delta^{\mu+1}f(x+\theta h)}{h^{\mu+1}}.$$

Cyp. Stephanos (Athènes).

1120. [**A4b**] (**1897**, 174) Étant donnée une équation irréductible de degré premier, et qu'on sait être abélienne (par l'affirmation d'un tiers, par exemple), exposer sans démonstration la méthode par laquelle on peut déterminer la relation

$$x_2=\varphi(x_1)$$

qui lie entre elles deux de ses racines. *Martin.*

3319. [Σ] (**1903**, 7, 39; **1904**, 1, 113, 260; **1905**, 6; **1906**, 1, 188; **1907**, 2, 146, 268).

ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS.

Comme dans les questions **2991** (**1906**, 2) et **3134** (**1907**, 2) et de plus :

Grand prix des Sciences mathématiques pour 1910 (3000^{fr}). — On sait trouver tous les systèmes de deux fonctions méromorphes dans le plan d'une variable complexe et liées par une relation algébrique. Une question analogue se pose pour un système de trois fonctions uniformes de deux variables complexes, ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle et liées par une relation algébrique.

L'Académie demande, à défaut d'une solution complète du problème, d'indiquer des exemples conduisant à des classes de transcendantes nouvelles.

Prix Fourneyron pour 1910 (1000^{fr}). — Étude expérimentale et théorique des effets des coups de bélier dans les tuyaux élastiques.

Il y a quelques autres prix intéressant les mathématiciens, mais comportant un programme moins précis (voir *C. R.*, t. CXLV, 2 décembre 1907). LA RÉDACTION.

3320. [**I7**] Où a été énoncé pour la première fois le théorème relatif aux nombres premiers de la forme $4m + 3$ dont M. Nazarevsky (question **3260**, **1907**, 173) a demandé une démonstration élémentaire? *Rudis.*

3321. [**I19c**] Il a été démontré par un grand nombre de correspondants (**1907**, 257) que l'expression

$$(x^2+1)(5x^2+1)$$

considérée dans la question **3229** (**1907**, 126) ne pouvait être un carré pour aucune valeur entière de x; mais cette

impossibilité n'a pas été établie pour le cas de x fractionnaire. Je demande si elle doit être admise également dans ce cas.

Rudis.

3322. [I25b] La suite des nombres

$$5,\quad 29,\quad 169,\quad 985,\quad 5741,\quad \ldots,$$

qui est récurrente ($u_{n+1} = 6u_{n-1}$) et dont chaque terme jouit de la propriété que son carré est la somme de deux carrés consécutifs (*cf.* question **3247**, **1907**, 169), en présente encore d'autres dont je mentionne ci-après quelques-unes :

1° Tous les nombres de la forme $8n+1$ qu'elle renferme et qui tombent aux rangs $6\mu+1$, 4, sont composés.

2° Tout diviseur premier d'un nombre de la suite est de la forme $8n+5$.

3° Tout diviseur premier p de la forme $8n+5$ figure dans la suite, soit directement, soit par ses multiples, et la première division exacte se rencontre au plus tard au rang $\frac{p-1}{4}$.

Ces propriétés sont-elles complètement exactes? ont-elles été étudiées? comment peut-on les démontrer simplement?

Rudis.

3323. [K8a] Je désirerais une solution *directe* des deux problèmes suivants :

1° Diviser un quadrilatère ABCD en deux parties proportionnelles à m et n, au moyen d'une droite MN passant par un point P donné à l'intérieur du quadrilatère.

2° Diviser un quadrilatère ABCD en deux parties proportionnelles à m et n, au moyen d'une droite PQ de longueur donnée.

Agnès Morri.

3324. [J1b] On sait par les Traités d'Arithmétique que, si l'on considère un nombre N ayant pour facteurs pre-

miers a, b, c, ..., k, l,

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots l^{\lambda},$$

le nombre N_1 des diviseurs de ce nombre est

$$(1) \qquad N_1 = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\dots(\lambda + 1).$$

Lorsque tous ces diviseurs ont l'exposant 1,

$$\alpha = \beta = \dots = \lambda = 1$$

et

$$(2) \qquad N_1 = 2^m,$$

m étant le nombre des diviseurs a, b, c, ..., k, l.

Or, dans ce dernier cas, on a

$$N_1 = 1 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \dots + C_m^m.$$

Le second membre est la somme des coefficients du binome de Newton, somme qui est 2^m, obtenue en faisant $p = 1$ dans le développement

$$(p + 1)^m = p^m + p^{m-1} C_m^1 + p^{m-2} C_m^2 + \dots + C_m^m.$$

Mais, lorsque les exposants α, β, γ, ..., λ sont quelconques, je voudrais, par ce procédé des combinaisons, obtenir la formule (1). E.-N. Barisien.

3325. [M'8] Je désire avoir une nomenclature des courbes dont l'aire comprise entre la courbe et ses asymptotes est finie, et dont les plus connues sont la cissoïde droite, la strophoïde droite, la cubique d'Agnesi, le folium de Descartes, la trisectrice de Mac-Laurin, la kreuzcurve.

E.-N. Barisien.



RÉPONSES.

2874. (**1905**, 26) (L. Dujardin). — *Solutions graphiques des équations linéaires* (**1905**, 184; **1906**, 70). — La question se trouve traitée en détail dans l'Ouvrage de M. d'Ocagne : *Calcul graphique et Nomographie,* Paris, Doin, 1908, p. 32-58. E. Maillet.

3081 (**1906**, 164) (G. Lemaire). — *Réitération et répétition* (**1907**, 40). — Les avantages et inconvénients comparatifs de la réitération et de la répétition sont exposés dans l'Ouvrage de MM. d'Almeida et R. Guimaraes : *Curso de Topographia*, t. II, 1900, p. 197-290.

M. G. Lemaire trouvera également dans cet Ouvrage des réponses très satisfaisantes à plusieurs des questions qu'il a proposées ici.

H. Brocard.

3188. (**1907**, 75) (Batle). — *Équation différentielle* (**1907**, 215 et 227). — Comme la solution de M. W. Kapteyn est compliquée, et que celle de M. P. Hendlé contient une inadvertance qui a faussé le résultat, il ne paraît pas inutile de revenir encore une fois sur le problème proposé. La méthode de M. Hendlé rendue exacte fournit pour l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+(b-ax^2)y=c$$

les intégrales particulières

$$Y=\frac{c}{\sqrt[4]{a}}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a}}(\sqrt{a}+2t)^{m-1}(\sqrt{a}-2t)^{n-1}e^{-tx^2}\,dt,$$

$$Y=\frac{c}{\sqrt[4]{a}}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{a}}(\sqrt{a}-2t)^{m-1}(\sqrt{a}+2t)^{n-1}e^{tx^2}\,dt,$$

$$m=\frac{\sqrt{a}+b}{4\sqrt{a}},\qquad n=\frac{\sqrt{a}-b}{4\sqrt{a}}.$$

En désignant par y_1 et y_2 deux solutions particulières de l'équation sans second membre, l'intégrale générale de (1) s'écrira

$$y = Y + c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

c_1 et c_2 étant des constantes arbitraires. En modifiant les intégrales y_1 et y_2 obtenues par M. Kapteyn, je pose $\alpha = \sqrt{a}$, puis

$$y_1 = e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} \int_0^1 e^{\alpha x^2 t}\, t^{-\frac{b+3\alpha}{4\alpha}} (1-t)^{\frac{b-3\alpha}{4\alpha}}\, dt,$$

$$y_2 = e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2 t}\, t^{-\frac{b+3\alpha}{4\alpha}} (t+1)^{\frac{b-3\alpha}{4\alpha}}\, dt.$$

Pour effectuer les développements en série, on peut se servir des formules

$$\int_0^1 e^{ut} t^{p-1} (1-t)^{q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} F(u;\, p,\, p+q),$$

$$\int_0^\infty e^{-ut} \frac{t^{p-1}\, dt}{(1+t)^q} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q-p)}{\Gamma(q)} F(u;\, p,\, p-q+1)$$
$$+ \Gamma(p-q)\, u^{q-p} F(u;\, q,\, q-p+1),$$

$$F(u;\, m,\, n) = 1 + \frac{m}{1.n} u + \frac{m(m+1)}{1.2n(n+1)} u^2$$
$$+ \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3.n(n+1)(n+2)} u^3 + \ldots,$$

dont la première se vérifie immédiatement et la seconde m'a été suggérée, il y a une vingtaine d'années, par un Mémoire de Kummer.

En combinant les intégrales y_1 et y_2 d'une manière convenable, on obtient pour l'équation sans second membre les intégrales particulières

$$\overline{y_1} = e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} F\left(\alpha x^2,\, p,\, \frac{1}{2}\right),$$

$$\overline{y_2} = x e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} F\left(\alpha x^2,\, p+\frac{1}{2},\, \frac{3}{2}\right), \qquad p = \frac{\alpha - b}{4\alpha},$$

la première paire, la seconde impaire.

L'intégrale de l'équation (1)

$$\overline{Y} = Y - Y(0)\overline{y_1}$$

est une fonction paire sans terme constant,

$$\bar{Y} = \sum_1^\infty c_\nu x^{2\nu},$$

où, pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots,$

$$(2\nu + 1)(2\nu + 2)c_{\nu+1} + bc_\nu - ac_{\nu-1} = 0$$

et

$$c_1 = \frac{1}{2}c.$$

En posant

$$c_\nu = (-1)^{\nu-1}\frac{a_\nu}{(2\nu)!}, \qquad \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = k_\nu,$$

il vient, pour $\nu > 1$,

$$k_\nu = b + \frac{2\nu(2\nu - 1)a}{k_{\nu-1}}, \qquad k_1 = b$$

Donc

$$k_1 = b,$$
$$k_2 = b + \frac{4.3a}{b},$$
$$k_3 = b + \frac{6.5a}{b + \frac{4.3a}{b}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$c_\nu = (-1)^{\nu-1}\frac{ck_1k_2\ldots k_{\nu-1}}{(2\nu)!}.$$

M. Lerch (Brünn)

3239. (1907, 148) (H. Wieleitner). — *Lieu des points d'inflexion d'un système de spiriques de Perseus.* — Le système considéré est

$$(x^2 + y^2)^2 - (b^2x^2 + a^2y^2) = \Pi,$$

et le paramètre variable est Π.

Bien que le problème posé puisse être résolu en s'aidant de considérations géométriques tirées de la définition même des spiriques, le plus court est de le traiter algébriquement, d'autant que le résultat n'a rien de particulièrement simple.

Changeant d'abord, pour un motif de simplification, Π en $4ka^2b^2$,

je pose

$$b^2x^2 + a^2y^2 = 4\,a^2b^2\,t,$$
$$(x^2+y^2)^2 = 4a^2b^2(k+t):$$

la variation de t déterminera les points successifs d'une même spirique définie par la valeur momentanément fixe attribuée à k; la variation de k donnera successivement toutes les spiriques dont il est question.

On aura par conséquent, en différentiant relativement à t,

$$b^2xx' + a^2yy' = 2a^2b^2,$$
$$(x^2+y^2)(xx'+yy') = a^2b^2,$$

puis

$$0 = b^2xx'' + a^2yy'' + b^2x'^2 + a^2y'^2,$$
$$0 = (x^2+y^2)(xx''+yy'') + (x^2+y^2)(x'^2+y'^2) + 2(xx'+yy')^2.$$

D'ailleurs, en un point d'inflexion, la relation suivante existe entre les dérivées des coordonnées,

$$-y'x'' + x'y'' = 0;$$

par suite, éliminant x'' et y'' entre cette égalité et les deux précédentes, il viendra

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2(b^2xx' + a^2yy')(xx'+yy')^2 \\ & + (x^2+y^2)(b^2xx' + a^2yy')(x'^2+y'^2) \\ & - (x^2+y^2)(b^2x'^2 + a^2y'^2)(xx'+yy'); \end{aligned}$$

mais cette équation, en tenant compte des valeurs de $b^2xx' + a^2yy'$ et $xx'+yy'$ obtenues tout d'abord, se réduit à

$$0 = 2(x^2+y^2)^3(x'^2+y'^2) - (x^2+y^2)^2(b^2x'^2 + a^2y'^2) + 4a^4b^4.$$

Les mêmes valeurs permettent d'écrire

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 = {} & \frac{a^4b^4}{c^4x^2y^2(x^2+y^2)^2} \\ & \times [4(x^2+y^2)^3 \\ & \quad - 4(x^2+y^2)(b^2x^2+a^2y^2) + b^4x^2 + a^4y^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2x'^2 + a^2y'^2 = {} & \frac{a^4b^4}{c^4x^2y^2(x^2+y^2)^2} \\ & \times [4(x^2+y^2)^2(a^2x^2+b^2y^2) \\ & \quad - 4a^2b^2(x^2+y^2)^2 + a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2)], \end{aligned}$$

et, en portant ces expressions dans la condition à laquelle on était parvenu, on aura finalement

$$\begin{aligned} o = 8(x^2+y^2)^4 - 4(x^2+y^2)^2[(a^2+2b^2)x^2+(2a^2+b^2)y^2] \\ + 2[b^2(2a^2+b^2)x^4+3(a^4+b^4)x^2y^2+a^2(a^2+2b^2)y^4] \\ - a^2b^2(b^2x^2+a^2y^2). \end{aligned}$$

E.-A. Majol.

3240. (**1907**, 148) (H. Wielbitner). — *Lieu des points d'inflexion d'un système de cartésiennes.* — Le mode de solution est entièrement analogue à celui de la question 3239 et le lieu est encore une courbe du huitième ordre, quadricirculaire. *E.-A. Majol.*

3242. (**1907**, 149) (G. Russo). — *Solution d'un problème de Planude* (**1907**, 287). — 1° Nous avons à résoudre les équations

$$x + y = a + b,$$
$$xy = qab.$$

Si x, y, a, b ont un facteur commun, on peut le faire disparaître des deux équations par division. Il est alors facile de trouver des formules résolvant la question. On a

$$\frac{x}{q} = \frac{ab}{y} = m,$$

ou

$$x = qm, \qquad y = \frac{ab}{m}$$

et

$$qm + \frac{ab}{m} = a + b.$$

Soit $a = mn$; on a alors

$$qm + nb = mn + b,$$

$$m = \frac{b(n-1)}{n-q}, \qquad m = \frac{b-qm}{b-m}.$$

m sera entier si l'on pose $n = q+1$; sa valeur sera $m = bq$;

$$a = bq(q+1), \qquad x = bq^2, \qquad y = b(q+1).$$

En particulier, si

$$b = q-1,$$

on a

$$a = q(q^2 - 1), \qquad b = q - 1,$$
$$x = q^2(q - 1), \qquad y = q^2 - 1;$$

c'est la solution de Planude.

Une solution plus simple est donnée en supposant $b = 1$; on trouve, dans cette hypothèse,

$$a = q(q + 1), \qquad b = 1,$$
$$x = q^2, \qquad y = q + 1.$$

En prenant $b = m - 1$, on a

$$n = (q - 1)m + 1$$

et

$$a = m[(q - 1)m + 1], \qquad b = m - 1,$$
$$x = mq, \qquad y = (m - 1)[(q - 1)m + 1].$$

2° Pour trouver des parallélépipèdes dont la somme des côtés a la même valeur, dont les aires totales sont égales et dont les volumes sont dans le rapport q, il suffit de résoudre le système

$$x + y + z = a + b + c,$$
$$xy + yz + zx = ab + bc + ca,$$
$$xyz = qabc.$$

Les deux premières équations sont vérifiées en posant

$$x = \tfrac{1}{3}(-a + 2b + 2c),$$
$$y = \tfrac{1}{3}(2a - b + 2c),$$
$$z = \tfrac{1}{3}(2a + 2b - c).$$

Substituant ces valeurs dans la troisième équation, on a

$$(-a + 2b + 2c)(2a - b + 2c)(2a + 2b - c) = 27qabc.$$

Cette équation peut être résolue de plusieurs manières.

Posons $2a + 2b - c = 3nq$; il vient

$$(a + 2b - 2nq)(2a + b - 2nq)n = ab(2a + 2b - 3nq).$$

1° Soit $b = 2nq$; on a alors

$$a + 2nq = q(2a + nq), \qquad \frac{a}{n} = \frac{q(q - 2)}{1 - 2q},$$

et, en posant encore

$$n = 2q - 1,$$

on en déduit

$$a = -(q^2 - 2q), \qquad b = 4q^2 - 2q, \qquad c = 3q,$$
$$x = 3q^2, \qquad y = -(2q^2 - 4q), \qquad z = 2q^2 - q.$$

2° Soit $b = nq + la$; on a l'équation

$$(2l+1)[(l+2)a - qn]n = (qn + la)[(2(l+1)a - qn],$$

qu'on peut encore écrire

$$2l(l+1)a^2 + (l+2)(q - 2l - 1)an - q(q - 2l - 1)n^2 = 0.$$

Si l'on pose $n = a$, on trouve

$$l = \tfrac{1}{3}(q - 2).$$

Si l'on pose $l = \frac{1}{3}(q-2)$, on trouve

$$\frac{a}{n} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{n} = \frac{-3q}{2q-4}.$$

Si l'on pose $a = -3q$, $n = 2q - 4$, on trouve

$$l = \tfrac{1}{3}(q - 2) \qquad \text{ou} \qquad l = -\frac{2(q^2-1)}{5q-4}.$$

Prenons

$$a = -3q, \qquad n = 2q - 4, \qquad l = -\frac{2(q^2-1)}{5q-4};$$

nous obtenons ainsi les solutions suivantes :

$$a = -3(5q-4), \qquad x = 3q(4q-5),$$
$$b = 2(4q-5)(2q-1), \qquad y = -2(q+1)(2q-1),$$
$$c = 2(q+1)(q-2), \qquad z = 2(q-2)(5q-4).$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

Pour résoudre en nombres rationnels ou entiers le problème de *calculer les côtés x, y, u, v de deux rectangles d'égal périmètre et tels que leurs aires soient dans un rapport donné q, rationnel ou entier,* on doit résoudre en nombres rationnels ou entiers le sys-

tème

$$x + y = u + v, \qquad xp = quv.$$

Par suite x, y sont les racines de l'équation

$$z^2 - (u + v)z + quv = 0,$$

et, afin qu'elles soient rationnelles, on devra avoir

$$u^2 - 2v(2q - 1)u + v^2 = t^2,$$

et alors

(1) $$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{u + v \pm t}{2}.$$

Puisque

$$u = v(2q - 1) \pm \sqrt{v^2(2q - 1)^2 - v^2 + t^2},$$

nous devons résoudre en nombres rationnels l'équation

$$v^2(2q - 1)^2 - v^2 + t^2 = s^2,$$

pour laquelle

(2) $$u = v(2q - 1) \pm s.$$

Mettons-la sous la forme

$$s^2 - t^2 = 4v^2(q - 1).$$

Premier cas. — Prenons

$$s - t = 2v, \qquad s + t = 2v(q - 1)q,$$

on aura

$$s = v(q^2 - q + 1), \qquad t = v(q^2 - q - 1)$$

et pour (2)

$$u = vq(q + 1), \qquad u = v(q - 1)(2 - q).$$

Si $u = vq(q + 1)$, l'équation (1) nous donne

$$x = vq^2, \qquad y = v(q + 1)$$

et nous avons une première solution prenant pour v un nombre rationnel quelconque. Pour $v = q - 1$, on a la solution de Planude

$$x = q^3 - q^2, \qquad y = q^2 - 1, \qquad u = q^3 - q, \qquad v = q - 1.$$

Si $u = v(q-1)(2-q)$, on trouve

$$x = v(q-1), \qquad y = vq(2-q);$$

on doit avoir pour cette seconde solution $1 < q < 2$.

Deuxième cas. — Prenons

$$s - t = 2v(q-1), \qquad s + t = 2vq,$$

d'où

$$s = v(2q-1), \qquad t = v$$

et pour les relations (2), (1)

$$u = 2v(2q-1), \qquad x = 2vq, \qquad y = v(2q-1);$$

c'est la troisième solution, pour laquelle $q > \frac{1}{2}$ et v sont rationnels arbitraires. D'une manière analogue j'ai obtenu pour les autres cas les solutions ci-dessous :

	x.	y.
Quatrième solution...	$q(q+v-1)$	$v(q+v)$
Cinquième » ...	$v(q-v)$	$q(v-q+1)$
Sixième » ...	$vq+q-1$	$vq(1+v)$
Septième » ...	$vq(1-v)$	$vq-q+1$
Huitième » ...	$q(v+1)$	$v(q+vq-v)$
Neuvième » ...	$v(q-vq+v)$	$q(v-1)$

	u.	v.
Quatrième solution...	$(q+v)(v+q-1)$	$v > 1-q$
Cinquième » ...	$(q-v)(1-q+v)$	$q-1 < v < q$
Sixième » ...	$(vq+q-1)(v+1)$	$v > \frac{1-q}{q}$
Septième » ...	$(1-v)(vq-q+1)$	$\frac{q-1}{q} < v < 1$
Huitième » ...	$(v+1)(q+qv-v)$	$v < \frac{q}{1-q}$
Neuvième » ...	$(v-1)(q-vq+v$	$1 < v < \frac{q}{q-1}$

Par exemple, prenant $v = 4$, $q = \frac{3}{2}$ et appliquant les formules des

1re, 2e, 3e, 4e, 6e solutions, nous avons

$x = 9$	$y = 10$	$u = 15$	$v = 4$
2	3	1	4
12	8	16	4
$\frac{27}{4}$	22	$\frac{99}{4}$	4
$\frac{13}{2}$	30	$\frac{65}{2}$	4

Calculer les côtés x, y, z, u, v, w de deux parallélépipèdes rectangles dont la somme des côtés a même valeur et tels que leurs volumes (ou leurs aires) soient dans un rapport donné q.

1° Soient a, b, c, d des nombres rationnels quelconques. Les valeurs

$$(1) \quad x = ab, \quad y = c, \quad z = qd, \quad u = ac, \quad v = b, \quad w = d$$

vérifient l'équation

$$xyz = quvw;$$

pour qu'elles donnent aussi

$$x + y + z = u + v + w,$$

on doit avoir

$$ab + c + qd = ac + b + d,$$

d'où

$$c = b + \frac{d(q-1)}{a-1}.$$

Connaissant q, a, b, d on calcule c par la formule ci-dessus, et alors les formules (1) donnent une solution du problème en nombres rationnels. Pour en avoir une en nombres entiers, observons que, si q, a, b, k sont entiers, il suffit de prendre $d = k(a-1)$ pour avoir

$$c = b + k(q-1)$$

entier.

Exemple. — Prenant

$$q = 3, \quad a = 4, \quad b = 1, \quad k = 2,$$

on trouve

$$c = 5, \quad d = 6,$$

et alors

$$x = 4, \quad y = 5, \quad z = 18, \quad u = 20, \quad v = 1, \quad w = 6$$

De même, si q, b, d sont entiers, on peut toujours calculer h et a entiers de manière que

$$q - 1 = h(a - 1)$$

et pour cela

$$c = b + dh.$$

Exemple. — Prenant

$$q = 3, \quad b = 1, \quad d = 6, \quad h = 2,$$

on a

$$a = 2, \quad c = 13,$$

d'où

$$x = 2, \quad y = 13, \quad z = 18, \quad u = 26, \quad v = 1, \quad w = 6.$$

2° θ étant rationnel, les valeurs

$$(2) \quad x = a + b + \theta, \quad y = c, \quad z = d, \quad u = c + d + \theta, \quad v = a, \quad w = b$$

sont racines de l'équation

$$x + y + z = u + v + w.$$

Afin que pour les mêmes valeurs on ait

$$xy + yz + zx = q(uv + vw + wu),$$

on doit avoir

$$d = \frac{q[ab + bc + ca + \theta(a + b)] - c(a + b + \theta)}{(a + b + c + \theta) - q(a + b)}.$$

q, a, b, c, θ étant donnés, on détermine d et alors les formules (2) nous donnent la solution du problème en nombres rationnels. Pour avoir une solution en nombres entiers, déterminons θ par la condition

$$a + b + c + \theta - q(a + b) = 1;$$

cette valeur de θ donne pour d un nombre entier.

Exemple. — Prenons

$$q = 2, \quad a = 3, \quad b = 2, \quad c = 1;$$

on a alors

$$\theta = 5, \quad d = 62,$$

d'où

$$x = 10, \quad y = 1, \quad z = 62, \quad u = 68, \quad v = 3, \quad w = 2.$$

UMBERTO BINI (Rome).

Autres réponses de MM. CUNNINGHAM, GÉRARDIN, LEMAIRE, MEHMED-NADIR, ROSE.

3247. (**1907**, 169) (*Arcitenens*). — I. La question 1° revient à traiter l'équation

$$(2n-1)^2 + (2n)^2 = m^k$$

ou

$$8n^2 - 4n + 1 - m^k = 0 \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots),$$

ou encore

$$8m^k - 4 = a^2,$$

ou, en posant $a = 2x$, les équations

(A) $$x^2 - 2m^2 = -1,$$

(B) $$x^2 - 2m^3 = -1,$$

(C) $$x^2 - 2m^4 = -1,$$

(D) $$x^2 - 2m^5 = -1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'équation (A), bien connue, admet pour solutions

$$x = 1,\ 7,\ 41,\ 239,\ 1393,\ 8119,\ \ldots,$$

$$m = 1,\ 5,\ 29,\ 169,\ 985,\ 5741,\ \ldots,$$

$$m_t = 6m_{t-1} - m_{t-2};$$

d'où

$$2n = \frac{1 \pm x}{2} = 2,\ 20,\ 120,\ 696,\ 4060,\ \ldots.$$

Par exemple,

$$696^2 + 697^2 = 985^2,$$

$$4059^2 + 4060^2 = 5741^2,\ \ldots.$$

L'équation (B) est impossible en nombres entiers > 1. Voir *N. A.*, 1883, p. 336 et 430, et 1884, p. 301.

Pour l'équation (C), il faudra chercher des carrés parmi les valeurs de m solutions de l'équation (A). 169 y satisfait. On a donc $x = 239$

et $m = 13$:

$$239^2 - 2.13^4 = -1.$$

Je n'ai pas vérifié d'autre solution.

Quant aux équations (D), (E), ..., il est bien possible qu'elles n'aient pas de solutions entières ou qu'elles n'en admettent que par exception.

II. La question 2° a été traitée à fond par E. de Jonquières dans un Mémoire intitulé : *Étude sur les décompositions, en sommes de deux carrés, du carré d'un nombre entier composé de facteurs premiers de la forme* $4n+1$, *et de ce nombre lui-même*. Formules et application à la résolution complète, en nombres entiers, des équations indéterminées, simultanées, $y = x^2 + (x+1)^2$ et $y^2 = z^2 + (z+1)^2$ (*N. A.*, 1878, p. 240-247, 287-310), avec indication des travaux antérieurs de Gauss (*Recherches arithmétiques*, p. 157), Legendre (*Théorie des nombres*, 2ᵉ édition, p. 268), Genocchi (*N. A.*, 1854, p. 165).

Voir aussi Volpicelli (*N. A.*, 1850, p. 305-308).

La question du nombre de décompositions d'un nombre N en deux carrés a été déjà posée sous le n° **1092** (**1897**, 147). Il a été rappelé (**1898**, 40) que Legendre a donné une solution complète et même abordé un problème plus général.

Comparer aussi réponse **2195** (**1902**, 54-55), où le nombre 945 est indiqué comme décomposable de huit manières en une somme de trois carrés.

Note. — La question **3247** vise des nombres quelconques; mais, pour le cas où ces nombres sont eux-mêmes des carrés, la décomposition en deux carrés a fait l'objet des questions **459** et **460** (**1895**, 19), auxquelles il a été complètement répondu (**1895**, 370; **1896**, 228).

Ces recherches remontent à Fermat.

Les journaux à problèmes d'Arithmétique amusante ont fréquemment proposé l'étude de ces nombres. H. Brocard.

Autres réponses de MM. Cunningham, Malo et Schiappa Monteiro.

3255. (**1907**, 172) (E. Grigorieff). — *Sur des entiers consécutifs.* — Si a et b sont des solutions entières de l'équation

$$a^2 - 3b^2 = 1,$$

a étant impair et b pair, on a l'identité

$$\left(b+\frac{a-1}{2}\right)^4+\left(b+\frac{a+1}{2}\right)^4=a^4+2\left(\frac{a}{2}\right)^4-1$$

qui fournit une solution de la question.

A. CUNNINGHAM.

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

On choisira parmi les nombres

$$a=1,\ 2,\ 7,\ 26,\ 97,\ \ldots,\qquad b=0,\ 1,\ 4,\ 15,\ 56,\ \ldots.$$

LA RÉDACTION.

3259. (**1907**, 173) (NAZAREVSKY). — *Valeurs des produits*

$$\sin a \sin 2a \sin 3a \ldots \sin ma,\qquad \cos a \cos 2a \ldots \cos ma.$$

— Dans la *Trigonométrie* de Desboves, on trouve le théorème suivant :

Soient m arcs $a, b, c, \ldots, k, l$; s_p l'un quelconque des arcs qu'on obtient en ajoutant, de toutes les manières possibles, $n-p$ des arcs précédents et en retranchant de chaque somme les p arcs qui restent; $\Sigma \cos s_p$ la somme de tous les cosinus des arcs ainsi calculés; suivant que m est impair ou pair, on a

$$2^{m-1}\cos a \cos b \cos c \ldots \cos k \cos l$$
$$= \cos s_0 + \Sigma \cos s_1 + \Sigma \cos s_2 + \ldots + \Sigma \cos s_{\frac{m-1}{2}},$$
$$2^{m-1}\cos a \cos b \cos c \ldots \cos k \cos l$$
$$= \cos s_0 + \Sigma \cos s_1 + \Sigma \cos s_2 + \ldots + \tfrac{1}{2}\Sigma \cos s_{\frac{m}{2}}.$$

Dans le cas des sinus, on remplace dans ces formules les arcs par leurs compléments.

Il suffira donc de calculer les différentes parties des seconds membres dans l'hypothèse où les arcs forment une progression arithmétique de raison a. J. ROSE.

Autres réponses de MM. BROCARD, MALO, PLAKHOWO et SCHIAPPA MONTEIRO.

3266. (**1907**, 194) (E.-B. ESCOTT). — Cette propriété est un corollaire du théorème de Desargues, fondamental dans la théorie de l'involution.

Voir *Exercices de Géométrie* de F.J. et G.M., 4e édition, p. 523-525.

Voir encore *Géométrie projective* de Cremona, traduction E. Dewulf, 1875, p. 93-95, où est cité l'Ouvrage de Desargues : *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan*, 1639.

Voir aussi *Géométrie* de Rouché, t. I, 1900, p. 276, et t. II, 1900, p. 384 et p. 394, où il est dit que la généralisation du théorème de Desargues a été faite par Ch. Sturm dans les *Annales de Mathématiques* de Gergonne, t. XVII. [Il s'agit sans doute du Mémoire sur les lignes du second ordre (t. XVII, décembre 1826, p. 173-199) faisant suite à celui de la page 265 du précédent Volume (t. XVI, mars 1826 : Mémoire sur les lignes du second ordre, première Partie, p. 265-293).]

Le théorème corrélatif est donné dans la *Géométrie* de Rouché, *loc. cit.*, t. II, p. 385. H. Brocard.

La démonstration, sinon la plus élémentaire, du moins la plus instructive, du théorème considéré dans la question 3266 me paraît être la suivante :

Les cordes $\overline{KL}$, $\overline{MN}$, $\overline{KM}$, $\overline{LN}$ ayant été tracées, soit une transversale quelconque rencontrant le cercle en P, Q, les cordes $\overline{KL}$ et $\overline{MN}$ en R et S, les cordes $\overline{KM}$ et $\overline{LN}$ en G et H : par un théorème qu'on fait remonter jusqu'à Desargues, on sait que les couples de points P et Q, R et S, G et H sont en involution.

Si la transversale vient à passer par le point C, commun aux droites $\overline{KL}$ et $\overline{MN}$, les points G et H coïncident avec ce point qui est l'un des deux points doubles de l'involution. Si, de plus, la direction de cette transversale est telle que C soit le milieu des points P et Q (respectivement alors coïncidents avec A et B), le deuxième point double est à l'infini et C est aussi le milieu de R, S (confondus avec D et E).

De ce qui précède il résulte que la généralisation, probablement la plus naturelle, de l'énoncé élémentaire considéré est le théorème même de Desargues, et les énoncés corrélatifs peuvent être conclus aisément. *E.-A. Majol.*

Le théorème est compris dans le théorème de Desargues ; le cercle y peut être remplacé par une conique quelconque.

Le théorème dualistique est :

Soient A, B *deux points sur la bissectrice d'un angle* (C) *dont les côtés sont tangents à une conique* Γ ; *menons les tangentes* AP *et* BP, AQ *et* BQ *à la même conique; les droites* CP *et* CQ *qui joignent le sommet* C *aux points d'intersection* P, Q *desdites tangentes forment un angle à bissectrice fixe* AB.

M. Lerch.

Autres réponses de MM. Hendlé, Retali, Schiappa Monteiro.

3271. (**1907**, 196) (Paulmier). — *Tangente à l'ombre portée sur l'intrados d'un pont par la courbe de tête.* — Au point considéré par M. Paulmier et que nous désignerons par A, le plan tangent au cylindre d'ombre et le plan tangent à l'intrados sont confondus en un plan unique α, et l'on ne peut trouver la tangente par les procédés ordinaires des plans tangents ou des normales.

Si la courbe d'ombre portée est plane et qu'on puisse en trouver le plan β, comme dans le cas d'un intrados du second degré (cylindrique ou sphérique par exemple), la tangente au point A est l'intersection (α, β).

Si la courbe d'ombre portée n'est pas plane ou que, étant plane, on ne puisse ou l'on ne veuille en déterminer le plan, on pourra toujours trouver la tangente au point A en utilisant le théorème suivant qu'on démontre sans difficulté :

Si deux surfaces se coupent et présentent en un point commun A *même plan tangent* α, *les tangentes au point* A *sont les diamètres communs des coniques indicatrices des deux surfaces, en prenant le même coefficient de proportion pour construire ces deux indicatrices, et en ne considérant sur ces courbes que les points de rencontre des parties qui correspondent aux portions de surface situées simultanément d'un même côté du plan tangent commun* α.

Dans le cas cité par M. Paulmier, l'indicatrice pour le cylindre d'ombre se compose de deux droites situées dans le plan α, symétriquement par rapport au rayon lumineux du point A ; l'indicatrice pour l'intrados est une conique tracée dans le plan α, ayant le point A pour centre, et dont la forme dépend de la forme de l'intrados.

Le théorème cité plus haut est très fécond et trouve son applica-

tion dans bien des épures. Nous citerons celle de l'intersection de deux cônes, de deux cylindres, d'un cône et d'un cylindre ou de deux développables quelconques ayant un plan tangent commun; celle relative à la représentation des fenêtres considérées dans un hémisphère par Viviani; celle relative à la détermination d'une tangente de profil à une courbe dont on connaît les projections; celle relative à l'intersection d'une surface de révolution et d'un cône ou cylindre tangent à cette surface en un point; celle du conoïde de la voûte d'arête en tour ronde, etc.

Ces constructions sont courantes à l'École militaire de Belgique, où elles sont enseignées depuis 25 ans au moins.

F. Chomé (Bruxelles).

La solution indiquée ci-dessus se trouve dans la plupart des Traités de Géométrie descriptive et est enseignée en France dans les cours de Mathématiques spéciales. La Rédaction.

Réponses analogues de MM. *Ahem* et Monteiro.

3273. (1907, 197) (Paulmier). — *Points d'intersection d'une droite et du paraboloïde hyperbolique.* — Si la droite est parallèle à un plan directeur, un plan auxiliaire mené par la droite parallèlement au plan directeur coupe la surface suivant une génératrice rectiligne dont la rencontre avec la droite donnée donne le point demandé.

Si la droite donnée n'est pas parallèle à un plan directeur, un plan auxiliaire mené par cette droite coupe la surface suivant une parabole ou une hyperbole suivant que le plan est parallèle ou non à l'intersection des deux plans directeurs. On connaît aisément les éléments nécessaires pour déterminer cette conique, et dès lors, avec la règle et le compas, on peut en prendre les points d'intersection avec la droite donnée, par des procédés bien connus.

F. Chomé (Bruxelles).

Ce problème revient à la recherche des (deux) intersections de la droite AB avec la quadrique déterminée par CD, EF et la droite à l'infini du plan horizontal, ou bien des (deux) droites qui coupent à la fois cette droite et les droites AB, CD, EF; or la détermination des (deux) droites qui rencontrent *quatre* droites quelconques peut

se faire assez aisément en projection de Monge à l'aide de la règle et du compas par le procédé qu'on lit dans ma Note : *Le quadrisecanti di una quaterna dirette* (*Periodico di Matematica*, t. XVII, 1902) ou bien dans mes *Vorlesungen über darstellenden Geometrie*, 1. Bd., Leipzig, 1907, p. 46-48. G. LORIA.

On trouvera dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. Caron des méthodes permettant de trouver l'intersection d'une quadrique quelconque avec une droite. LA RÉDACTION.

Réponses analogues de MM. ANSERMET, HENDLÉ, MONTEIRO.

3275. (**1907**, 197) (G. HITROVO). — *Mouvement des automobiles*. — Nous avons à considérer le cas où le mouvement est cycloïdal, ou celui du mouvement d'un cercle sur une droite qui représente le chemin parcouru.

Soit donc R le rayon d'une roue de l'automobile, que nous remplaçons par un cercle, et soit v la vitesse du point géométrique de contact de ce cercle avec la droite sur laquelle il roule, qui se déplace le long de ces deux lignes.

La vitesse angulaire ω d'un point quelconque du cercle, par rapport à ce point de contact, au centre instantané de rotation sera, comme on sait, $\omega = \frac{v}{R}$.

D'après cela il est clair que la vitesse de rotation des points du cercle considéré variera avec leur distance à ce centre instantané de rotation, laquelle sera donc un maximum à la distance 2R de ce centre instantané.

Cela est donc ce que la photographie a montré, présentant l'image des rayons inférieurs des roues plus distincte que celle des rayons supérieurs. ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO.

Je crois que M. Georges Hitrovo trouvera le renseignement qu'il désire dans mon article : *Les autos qui font du* 0 *à l'heure*, paru dans le numéro du 15 mai 1904 du *Journal de Mathématiques élémentaires* (Vuibert et Nony, 63, boulevard Saint-Germain, Paris).

TH. CARONNET.

Réponses analogues de MM. *Ahem*, DELTOR, QUIJANO, ROSE.

QUESTIONS.

1122. **[O6h]** **(1897,** 174) Existe-t-il des surfaces minima convexes, sans point singulier à distance finie et possédant plus de deux nappes infinies (c'est-à-dire telles que la section, par une surface fermée, mais très grande, quelconque, se compose de plus de deux courbes séparées), le nombre de ces nappes étant d'ailleurs limité?

J. Hadamard.

1124. **[L'4a]** **(1897,** 193) D'un point T du cercle de Monge d'une ellipse on mène les tangentes qui touchent l'ellipse en A et B, puis les normales en A et B qui se rencontrent en N. Lorsque le point T se déplace sur le cercle, le point S, projection de N sur AB, décrit une courbe C. Je désire avoir la quadrature de cette courbe. E.-N. Barisien.

1126. **[V9]** **(1897,** 194) Dans le Volume XVIII, 1851, du *Journal asiatique,* Woepcke a donné, d'après un manuscrit arabe de la Bibliothèque nationale de Paris, une traduction d'un livre ou, pour mieux dire, d'un fragment, attribué à Euclide, qui contient une ingénieuse démonstration du principe du levier.

L'authenticité de ce fragment a été révoquée en doute par Curtze (*Z. S.*, 1874). La question a-t-elle été discutée dans quelque écrit postérieur? Il m'importerait beaucoup de le savoir et je serais heureux d'avoir un renseignement sur ce point. Giovanni Vailati (Turin).

1128. **[K11c]** (**1897**, 194) On donne deux circonférences concentriques de rayons r et R, $R > r$ et un triangle ABC inscrit dans la petite circonférence. On sait que les transformées isogonales par rapport à ABC des tangentes à la grande circonférence sont des ellipses semblables circonscrites au triangle.

Pour quelle valeur de R et pour quelle direction deux tangentes parallèles donnent-elles lieu à deux ellipses égales?

Je serais heureux d'obtenir une solution géométrique de cette question dont je possède une solution analytique.

DROZ-FARNY (Porrentruy).

1130. **[J2f]** (**1897**, 195) La question **1028** (**1897**, 75; rép. **1897**, 281) me conduit à poser cette question **1130** et la suivante :

On construit un polygone convexe de n côtés, en prenant au hasard les sommets sur une circonférence donnée. Quelle est la probabilité que μ côtés soient plus grands qu'un segment donné?

Rosace.

1131. **[J2f]** (**1897**, 195) On prend, au hasard, n points sur une circonférence. Quelle est la probabilité que, parmi les $\frac{1}{2}n(n-1)$ cordes qu'ils déterminent, il y en ait μ plus grandes qu'une longueur donnée?

Rosace.

1135. **[T3b]** (**1897**, 196) Je désirerais obtenir d'un correspondant la bibliographie des études expérimentales et surtout les essais de théorie faits depuis 1882 sur la réflexion et la réfraction de la lumière polarisée en ligne droite à la surface des cristaux biréfringents incolores.

E.-M. LÉMERAY.



3326. [**J2f**] Peut-on avoir un procédé pour obtenir la valeur approchée de la probabilité pour qu'un nombre écrit ou pensé au hasard soit premier? E.-N. BARISIEN.

3327. [**J2a**] Une urne renferme des boules blanches et des boules noires en proportion inconnue. Peut-on admettre que la probabilité d'en extraire une boule blanche soit égale à $\frac{1}{2}$?

Si l'urne renferme n boules, je vois bien que la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{1}{n}$, ou $\frac{2}{n}$, ou $\frac{3}{n}$, ... ou $\frac{n-1}{n}$, suivant que l'urne contient 1, ou 2, ou 3, ... ou $n-1$ boules blanches; je vois aussi que $\frac{1}{2}$ est la moyenne arithmétique des probabilités possibles, mais la moyenne n'est pas la probabilité et n'est du reste égale que fortuitement à une des probabilités possibles.

La probabilité $\frac{1}{2}$ ne me paraît pouvoir être admise que si l'on sait qu'il y a dans l'urne autant de boules blanches que de boules noires. (Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques,* édition française, I_4 20, p. 3.) *Eix.*

3328. [**J2a**] En 1877, Catalan a essayé d'introduire, dans le Calcul des probabilités, un principe énoncé par Poisson et qu'il présente ainsi : *La probabilité d'un événement futur ne change pas lorsque les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues* (*B. A. B.*, 2e série, t. XLIV, page 463).

Ce principe me paraît, en général, aussi faux que celui qui donne la probabilité $\frac{1}{2}$ dans la question précédente. Si une urne renferme n boules parmi lesquelles on en compte a blanches, la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{a}{n}$; si l'on extrait de l'urne x boules dont y sont blanches, la

probabilité de tirer de l'urne modifiée une boule blanche est $\frac{a-y}{n-x}$; or, il n'arrive que fortuitement que

$$\frac{a}{n} = \frac{a-y}{n-x} \quad \text{ou que} \quad \frac{a}{n} = \frac{y}{x}.$$

La probabilité ne me paraît pouvoir rester constante que si l'urne conserve la même proportion de boules blanches et noires.

Ne faudrait-il pas bannir le principe de Poisson du Calcul des probabilités? *Eix.*

3329. [I] Je serais très désireux d'avoir, au complet, l'énoncé des propositions arithmétiques de Fermat pour lesquelles il n'a été donné que des démonstrations particulières ou qui sont encore sans démonstration.

P. Haberlach.

3330. [I7a et b] Existe-t-il des Tables des racines primitives et des indices pour les nombres supérieurs à 200 ? Si de pareilles Tables existent, où puis-je me les procurer?

Hazard.

3331. [I] Existe-t-il des Tables des *carrés* et des *cubes* des nombres? et lesquelles? Hazard.

3332. [U10 et S6] On demande des références bibliographiques sur :

1° La méthode des moindres carrés et ses applications à la Géodésie et la Topographie;

2° Les applications des fonctions elliptiques à la Géodésie;

3° Les applications des Mathématiques à l'Artillerie.

Ixe.

3333. [C2h] Soient une courbe graphique continue, d'équation $y = f(x)$, entre deux points A et B, ne rencontrant

qu'une fois dans cet intervalle toute parallèle à Oy, et C un point (x, y) de la courbe entre A et B. On sait que la considération d'un déplacement infiniment petit de C permet d'établir que $f(x)$ est la dérivée de l'aire.

Certains Traités d'Analyse semblent contester la rigueur de cette démonstration en disant que la notion d'aire n'est pas une notion *première*. Qu'est-ce que cela veut dire et qu'est-ce qu'une notion première ?

Il me semble que la continuité de la courbe et cet axiome « le contenant est plus grand que le contenu » permettent de comparer l'aire α de la courbe à des aires polygonales α_1, α_2 contenues dans α ou la contenant et telles que $\alpha_2 - \alpha_1$ soit aussi petit qu'on veut, ce qui suffit à tout justifier.

Zed.

3334. [**I2b**] La proposition :

a, b, c, ..., l étant des nombres premiers entre eux dans leur ensemble et α, β, γ, ..., λ étant des nombres respectivement inférieurs et premiers à a, b, c, ..., l, il existe un nombre et un seul *moindre que $abc\ldots l$ et multiple à la fois de*

$$a+\alpha, \quad b+\beta, \quad c+\gamma, \quad \ldots, \quad l+\lambda,$$

est-elle vraie?

En supposant par exemple,

$$a=4, \quad b=7, \quad c=11,$$
$$\alpha=3, \quad \beta=5, \quad \gamma=8,$$

on a

$$abc=308 \quad \text{et} \quad 308<7.12.19.$$

Hernandez.

3335. [**M¹3iα et M⁴m**] Dans les *Leçons de Cinématique* de M. G. Kœnigs, il est question (p. 162) d'un problème traité par Puiseux : *Trouver une courbe superposable à sa développée ;* où cette question a-t-elle été traitée?

A. Simionov.

3336. **[D3a]** Dans les premières pages du *Traité des fonctions elliptiques* de Briot et Bouquet, on fait correspondre, à une courbe décrite dans le plan de la variable complexe, deux surfaces représentant la fonction $u = f(z)$. Ce mode de représentation a-t-il été étudié, et par qui? On demande la bibliographie de la question?

A. Simionov.

3337. **[D6]** J'ai démontré que la série $\Sigma \frac{1}{p}$, p étant un nombre premier, est divergente. Ce résultat est-il connu?

A. Simionov.

3338. **[I19]** Pour trouver quelques solutions de l'équation

$$x^4 + mx^2y^2 + y^4 = z^2$$

ou se convaincre que l'équation n'en a pas, je trouve la méthode suivante :

a, b, c, d n'ayant pas de diviseur commun, et posant $MN = m + 2$, δ étant diviseur de $m - 2$, $m \equiv \omega \pmod 8$.

I. a, b, c, d impairs.

$$x = ab, \qquad y = cd,$$
$$2z = a^2c^2M + b^2d^2N,$$
$$Nb^2 - 2c^2 = \delta a^2, \qquad Mc^2 - 2b^2 = \delta b^2,$$
$$(\delta + 2)^2 \equiv \omega + 2, \qquad M \equiv N \equiv \delta + 2 \pmod 8.$$

II. b, c, d impairs, a pair ou impair.

$$x = 2ab, \qquad y = cd,$$
$$z = a^2c^2M + b^2d^2N,$$
$$Nb^2 - c^2 = \delta a^2, \qquad Mc^2 - 4b^2 = \delta d^2,$$
$$(\delta + 4)(\delta a^2 + 1) \equiv \omega + 2, \qquad M \equiv \delta + 4, \qquad N \equiv \delta a^2 + 1 \pmod 8.$$

On a des formules semblables pour $MN = m - 2$, δ diviseur de $m + 2$.

Cette méthode est-elle connue? A. Werebrusow.

3339. [D9] Peut-on sommer, d'une façon rigoureuse, les séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n^n}\right)?$$

Steerman.

3340. [E5] A-t-on étudié la fonction v de u définie par l'intégrale

$$u = \int_v^\infty e^{-x^2}\,dx\,?$$

A. Bohren (Berne).

3341. [V1a] Je m'occupe plus difficilement de recherches mathématiques, dans les parties où elles exigent un certain effort d'invention, quand je suis assis dans mon bureau et que la température s'y abaisse au-dessous d'environ 15° (si je ne suis pas très couvert) ou qu'elle dépasse à peu près 27° à 30°. Je serais reconnaissant à tous ceux qui voudraient bien me signaler leurs températures critiques (s'ils en ont) au point de vue du travail mathématique exigeant de l'invention, ou dans quelle mesure la température influe sur ce travail (1).

Question analogue pour la pression atmosphérique dont, personnellement, je n'ai pas remarqué nettement l'influence. (Si l'on indique des chiffres, donner en même temps l'altitude approchée du lieu.) On pourra dire aussi quelques mots de l'influence de la pluie, du temps couvert, du beau temps, etc.

(1) M. Pigeaud a les mêmes températures critiques que moi; M. *Carvyge* a, au contraire, 10° et 20°, et croit à une influence défavorable pour lui des basses pressions atmosphériques. Au besoin, comparer Lombroso, *L'Homme de génie,* traduction Colonna d'Istria, 2e Partie, Chap. I, p. 143; Paris, Reinwald, 1903, et mon article des *Mém. Assoc. franç. pour l'avanc. des Sci.,* 1903, Congrès d'Angers, p. 1203.



Les réponses aux questions ci-dessus constitueront un appoint à l'*Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens,* de MM. C.-A. Laisant, H. Fehr et A. Buhl, mentionnée précédemment (*I. M.,* **1907**, 145). Voici, à titre de spécimen, la réponse de M. *Carevyge :*

« Je travaille avec la plus grande facilité lorsque la température est de 15° environ ; le travail me devient pénible quand elle s'élève à 20°. D'ailleurs, je crois avoir remarqué que ce qui influe le plus sur ma faculté de travail n'est pas la température, mais plutôt la pression atmosphérique et surtout la pureté de l'air. Par un temps très clair, avec une pression de 765^{mm} à 770^{mm}, je ne ressens aucune fatigue, même après un travail assez long, et cela quelle que soit la température, pourvu, bien entendu, qu'elle ne s'élève pas à 30° ou qu'elle ne s'abaisse pas au-dessous de 10°. »

E. Maillet.

3342. [J2g] Bertrand attribue à Stuart Mill l'opinion que l'application du calcul à l'étude de la probabilité de l'exactitude des arrêts de la justice était « le scandale des Mathématiques » (*Calcul des probabilités,* 1888, p. 319, Paris, Gauthier-Villars). J'ai vu, d'autre part, la même opinion attribuée à Auguste Comte. Je désirerais savoir auquel de ces deux auteurs elle est due d'abord et en quel endroit de leurs œuvres elle se trouve. E. Maillet.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

THÉORIE ET PRATIQUE
DES
APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES

PAR

Ch. FASSBINDER,
Professeur du Cours préparatoire à l'École navale
au Collège Stanislas.

IN-8 (23 × 14) DE VI-90 PAGES; 1906.......................... 3 FR.

Les trois premiers Chapitres de cet Ouvrage ne sont que le développement de la partie des programmes officiels concernant les erreurs. Pour tout ce qui regarde les erreurs absolues, il a été fait de larges emprunts à la méthode et aux idées exposées par M. Guyou dans sa *Note sur les approximations numériques*. Dans le Chapitre suivant se trouvent démontrees les règles des opérations arithmétiques abrégées, règles qui ont leur place tout indiquée à la suite d'une théorie élémentaire des erreurs. Le dernier Chapitre, qui ne rentre pas dans les programmes actuels, suppose connus le calcul des dérivées et le théorème des accroissements finis. De nombreux exercices sont traités dans le texte; à la fin du Volume on en a indiqué d'autres. Quelques-uns sont empruntés à l'*Arithmétique* de Serret et aux Ouvrages de MM. Combette, Humbert, Tannery et Griess. Les derniers exercices sont ceux qui ont été proposés aux concours d'admission à l'Ecole navale et aux Ecoles d'arts et métiers depuis 1885.

Table des Matières.



37850 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

RÉPONSES.

3274. (**1907**, 197) (Mehmed Nadir). — *Identité.* — En posant $x - m = y$, l'équation proposée peut s'écrire

$$(1+y)^2 + 2(2+y)^2 + 3(3+y)^2 + \ldots + (n-1)[(n-1)+y]^2$$
$$= \frac{n(n+1)(3n+2)(n-1)}{12},$$

ou en développant

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3$$
$$+ 2y[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1^2] + y^2[1 + 2 + \ldots + (n-1)]$$
$$= \frac{n(n+1)(3n+2)(n-1)}{12},$$

ou encore

$$\frac{(n-1)^2(n^2)}{4} + 2y\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$+ y^2\,\frac{(n-1)n}{4} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12},$$

ou finalement

$$3y^2 + 2y(2n-1) - (4n+1) = 0.$$

On en déduit

$$y = x - m = \frac{-(2n-1) \pm \sqrt{(2n-1)^2 + 3(4n+1)}}{3}$$
$$= \frac{-2n+1 \pm (2n+2)}{3},$$

et, puisque x doit être entier, l'équation ne devient une identité que pour la valeur

$$x = m + 1.$$

J. Rose.

Réponses analogues de MM. Brocard, Gérardin, *Majol*, Plakhowo, Quijano, *Stenacensis*.

3284. (1907, 219) (*Trinitario*). — Question 35, posée et résolue dans l'*Intermédiaire de l'A. F. A. S.*, t. I. 1896, p. 25, 67 et 115.

M. Gallois (p. 67) a indiqué un procédé pour improviser un *boomerang* avec du papier bristol.

J'ai rappelé (p. 115) que la théorie mathématique du *boomarang* (ou *boomerang*) a été exposée dans un Mémoire spécial de M. G.-T. Walker, du Collège de la Trinité, à Cambridge.

Voir aussi :

P. Charbonnier. — Balistique extérieure rationnelle, Livre III, Chap. VIII, 1907.

Dans l'analyse insérée au *B. D.*, il est dit : « En ce qui concerne les projectiles discoïdes, leur mouvement dans l'air fait ici l'objet d'une discussion plus complète que celle qui est généralement donnée, y compris l'application au boomerang » (*B. D.*, Ire Partie, 1907, p. 169).

Je conseillerai, enfin, de voir encore l'article du Capitaine Chapel : *Sur une propriété des projectiles discoïdes pouvant servir de base à l'établissement d'une arme nouvelle* (*Revue d'Artillerie*, t. XX, 1882, p. 415). H. Brocard.

Il y a en russe un petit travail sur le boomerang d'un étudiant de l'Université de Göttingue, M. Schor, qui faisait connaître au public russe le travail sur le même sujet de Gilbert et Walker, dont une traduction a paru dans la *Physikalische Zeitschrift*, n° 31, 2. Jahrgang.

En russe, la note de M. Schor a paru dans le *V. S. O.*, semestre XXVI, n° 302, 1901, p. 35. N. Plakhowo.

On trouve une théorie scientifique du boomerang dans le second Volume de la *Balistique extérieure rationnelle* du Commandant Charbonnier, p. 277 (*Bibliothèque de Mécanique appliquée de l'Encyclopédie scientifique*, Paris, Doin, 1907). *Philbert.*

3293. (1907, 221) (Paulmier). — *Ombre du piédouche.* — Si deux surfaces de révolution se raccordent suivant un parallèle le long duquel elles ont des courbures méridiennes opposées (cas du piédouche), l'indicatrice en chaque point de ce parallèle de raccordement est, pour l'une d'elles, elliptique, pour l'autre, hyperbo-

lique. La tangente à la courbe d'ombre propre, qui, d'après le théorème de Dupin, est conjuguée du rayon lumineux par rapport à l'indicatrice en son point de contact, n'est donc pas la même pour les deux nappes de la surface au point situé sur le parallèle de raccordement, d'où le point anguleux. Ce point anguleux dans l'ombre ne disparaît que si le point de raccordement des deux arcs dont se compose la méridienne est un point d'inflexion pour chacun d'eux, auquel cas la tangente unique à la courbe d'ombre se confond avec la tangente à la méridienne. *Philbert.*

L'ombre propre d'une surface de révolution présente *graphiquement* un point anguleux, lorsque la courbe méridienne est formée par des arcs, même raccordés entre eux, ayant des rayons différents ; c'est ce qui a lieu notamment pour l'*ove* et le *piédouche* employés en architecture.

L'ombre propre qui correspond aux arcs successifs admet deux tangentes distinctes au point d'ombre du point correspondant de l'équateur ou du collier.

L'*ove*, éclairé par des rayons parallèles, en offre un exemple très simple, car les tangentes sont parallèles à des demi-diamètres conjugués qui ne sont pas en ligne droite.

Diverses remarques doivent compléter l'indication qui précède :

1° Le point anguleux est peu sensible, si les rayons consécutifs diffèrent peu l'un de l'autre.

2° L'*ove* est composé d'un hémisphère et d'un demi-ellipsoïde raccordés entre eux; en considérant une sphère inscrite dans un ellipsoïde, on obtient, pour courbes d'ombre propre de ces surfaces, deux ellipses qui se coupent suivant un diamètre; ainsi le point anguleux n'est qu'apparent : il est formé par la rencontre de deux demi-ellipses qui ne sont point tangentes entre elles.

3° Pour éviter le point anguleux dans l'ombre propre du piédouche, on peut prendre une méridienne dont le rayon de courbure varie d'une manière continue; les rayons extrêmes étant dans le rapport voulu, de 1 à 2 par exemple. *Gem.*

Réponses analogues de MM. Brocard, Chomé et *Majol.*

3294. (**1907**, 222) (Paulmier). — *Intersection de deux cônes.* — Le fait indiqué par M. Paulmier est exact, quelle que soit la

courbe plane servant de base commune : les tangentes aux deux branches de la courbe d'intersection des cônes (de sommets S et T) qui passent en un point M de contact de ces deux cônes rencontrent la droite ST des sommets, l'une au point V où cette droite coupe le plan de la courbe base, l'autre au point W, conjugué harmonique de V par rapport à S et T, pourvu que M soit sur la courbe de base.

On le démontre aisément en considérant un plan sécant mené par la droite STV. Soient N et P deux quelconques des points où ce plan coupe la courbe de base commune. SN, SP sont deux génératrices du cône S; TN, TP, deux génératrices du cône T. Ces quatre génératrices, situées dans un même plan, forment les côtés d'un quadrilatère ayant pour sommets, outre les points N, P considérés ci-dessus, deux autres points Q, R qui, étant communs aux deux cônes, appartiennent aussi à leur courbe d'intersection. Les diagonales NP, QR de ce quadrilatère coupent respectivement la droite ST en deux points, V (déjà considéré) et W, qui, d'après les propriétés connues du quadrilatère, sont conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport à S et T, points de concours des côtés opposés. Quand le plan sécant tourne autour de STV, le quadrilatère NQPR se déforme dans ce plan; mais, les points S, T, V restant fixes, il en est de même de W.

Si, dans ce déplacement, N et P viennent se confondre en un point unique M de la courbe de base commune, il en est de même de Q et R; M devient alors un des points de contact des deux cônes, et MV, MW les tangentes aux deux branches de la courbe d'intersection qui passent en M : ce qui démontre le théorème.

On verrait de même que, s'il existe des points de contact des deux cônes *en dehors* de la courbe de base commune, ces points s'alignent deux par deux sur des droites concourant en W. R. Perrin.

Cette proposition est établie dans les Traités de Géométrie descriptive. La Rédaction.

Autre réponse de M. Malo.

3295. (**1907**, 222) (S. Prieto). — *Suite périodique.* — Soient x_1, x_2, α, k quatre quantités qui sont liées par la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_1 x_2 = k^2.$$



Formons les équations

(1)	$x_2^2 + x^2 + 2x_2 x = k^2$	qui a pour racines	$x_1, x_3,$
(2)	$x_3^2 + x^2 + 2x_3 x = k^2$	»	$x_2, x_4,$
(3)	$x_4^2 + x^2 + 2x_4 x = k^2$	»	$x_3, x_5,$
...	....	»	......
$(n-1)$	$x_n^2 + x^2 + 2x_n x = k^2$	»	$x_{n-1}, x_{n+1},$
......	....	»	....

On demande la condition pour que la suite

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

soit périodique.

Les quantités de la suite

$$(1) \qquad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots,$$

définies comme on vient de le faire, forment une série récurrente

$$(2) \qquad \begin{cases} x_3 = -x_1 - 2x_2, \\ x_4 = -x_2 - 2x_3, \\ x_5 = -x_3 - 2x_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{i+2} = -x_i - 2x_{i+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les deux relations suivantes, dont la première est une identité,

$$x_{i+1} = 0.x_i + x_{i+1},$$
$$x_{i+2} = -x_i - \alpha x_{i+1},$$

pourront s'écrire symboliquement à l'aide de systèmes linéaires

$$(3) \qquad (x_{i+1}, x_{i+2}) = \mathrm{S}(x_i, x_{i+1}),$$

S désignant la substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{vmatrix}$.

Si l'on donne à i les valeurs successives $1, 2, \ldots, n-1$, il viendra

$$(x_2, x_3) \quad = \mathrm{S}(x_1, x_2),$$
$$(x_3, x_4) \quad = \mathrm{S}(x_2, x_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(x_n, x_{n+1}) = \mathrm{S}(x_{n-1}, x_n),$$

et par suite

(4) $$(x_n, x_{n+1}) = S^{n-1}(x_1, x_2).$$

La suite (1) étant périodique à partir de x_n, par exemple, et de période

(5) $$x_n, \quad x_{n+1}, \quad \ldots, \quad x_{n+\nu-1},$$

on devra, par hypothèse, avoir

$$x_{n+\nu} = x_n, \qquad x_{n+\nu+1} = x_{n+1}$$

et, par conséquent, en vertu de (4),

(6) $$S^{n+\nu-1}(x_1, x_2) = S^{n-1}(x_1, x_2).$$

Si l'on suppose $\alpha \neq \pm 2$, les racines de l'équation caractéristique $|\lambda - S| = \lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0$ seront différentes :

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}.$$

En faisant

$$N = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{vmatrix},$$

on sait qu'il existe un système linéaire V de déterminant non nul et tel que

(7) $$S = V^{-1}NV, \qquad V = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}.$$

La condition (6) équivaut alors en définitive aux deux équations

$$\lambda_1^\nu(v_1x_1 + v_2x_2) = v_1x_1 + v_2x_2,$$
$$\lambda_2^\nu(w_1x_1 + w_2x_2) = w_1x_1 + w_2x_2.$$

Les seconds membres ne s'annulent pas simultanément, car le déterminant $v_1w_2 - v_2w_1$ est différent de zéro, et l'on admet qu'il en est de même pour l'une au moins des valeurs initiales x_1, x_2. D'où il suit

$$\lambda_1^\nu = 1, \qquad \lambda_2^\nu = 1.$$

On aura donc

$$\lambda_1 = e^{\frac{2\mu\pi i}{\nu}}, \qquad \lambda_2 = e^{-\frac{2\mu\pi i}{\nu}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu - 1),$$

(8) $$\alpha = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -2\cos\frac{2\mu\pi}{\nu}.$$

En vertu de (8) et (4), la période (5) commence par x_1, car $S^\nu = 1$; de plus, si μ et ν sont premiers entre eux, elle contiendra ν termes.

Comme on le voit facilement, à cause de (4), la condition (8) est suffisante.

Si $\alpha = \pm 2$, il n'y a pas de périodicité possible.

Pour que la suite (1) soit périodique, il faut donc et il suffit que

$$\alpha = -2\cos\frac{2\mu\pi}{\nu}.$$

$\frac{\mu}{\nu}$ désignant une fraction irréductible quelconque, les ν premiers termes constituent la période.

Exemple. — Soit $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{6}$, d'où $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned}
&x_1,\\
&x_2,\\
&x_3 = x_2 - x_1,\\
&x_4 = \quad\; - x_1,\\
&x_5 = -x_2,\\
&x_6 = x_1 - x_2,\\
&x_7 = x_1,\\
&x_8 = x_2,\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

H. Kreis (Zurich).

Prenons les équations

$$\begin{aligned}
X_1^2 &+ X_2^2 + \alpha X_1 X_2 = K,\\
X_2^2 &+ X_3^2 + \alpha X_2 X_3 = K,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n^2 &+ X_{n+1}^2 + \alpha X_n X_{n+1} = K,\\
X_{n+1}^2 &+ X_{n+2}^2 + \alpha X_{n+1} X_{n+2} = K.
\end{aligned}$$

Nous en tirons visiblement

$$\begin{aligned}
X_1 + \alpha X_2 + X_3 &= 0,\\
X_2 + \alpha X_3 + X_4 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
X_{n-1} + \alpha X_n + X_{n+1} &= 0,\\
X_n + \alpha X_{n+1} + X_{n+2} &= 0.
\end{aligned}$$

Par suite de la périodicité $X_{n+1} = X_1$, $X_{n+2} = X_2$, ..., les deux dernières égalités se transforment en les suivantes :

$$X_1 + X_{n-1} + \alpha X_n = 0,$$
$$\alpha X_1 + X_2 \quad + X_n \ = 0.$$

En éliminant $X_1, X_2, \ldots, X_n$, nous trouvons une équation $F(\alpha) = 0$ de degré n par rapport à α. Connaissant cette équation, nous déterminerons immédiatement X_1, X_2 et K.

V. Kouznetsof.

[Traduit du russe. (G. Papelier.)]

Bien que le problème soit posé sous une forme essentiellement algébrique, c'est en l'envisageant sous la forme géométrique correspondante qu'on en aperçoit le plus aisément la vraie nature et la solution.

Il revient, considérant une certaine conique tracée et deux directions quelconques (celles des axes coordonnés), à mener par un point m_1, arbitrairement choisi, une parallèle par exemple à $\overline{OY}$, ce qui amène à un point m_2, puis par m_2, une parallèle à $\overline{OX}$, ce qui amène à un point m_3, etc., et à se demander quand le sommet m_k coïncidera avec le sommet m_1.

Je me bornerai au cas d'un contour elliptique ou plutôt, momentanément, d'un simple contour circulaire dont le premier peut toujours être considéré comme la projection orthogonale, les cordes parallèles dans le cercle demeurant des cordes parallèles dans l'ellipse.

Soient donc dans le cercle le diamètre $\overline{OX}$ et le diamètre $\overline{OY}$ faisant avec le premier l'angle ω ; soient encore m_1, m'_1, m''_1, ... des points pris sur la circonférence et dont on déduira, comme il a été expliqué plus haut, des points m_2, m'_2, m''_2, ... ; m_3, m'_3, m''_3, ...

Il est clair que toutes les divisions (m_1), (m_2), (m_3), ... sont *égales,* c'est-à-dire superposables; mais, pour obtenir la superposition de la division (m_1) et de la division (m_{2k+1}), il suffit d'une certaine rotation autour de son centre du cercle supposé porter la division (m_1), tandis que pour opérer cette superposition avec la division (m_{2k}) il faut au préalable un retournement du même cercle : donc les points doubles des divisions égales, de même base, (m_1) et (m_{2k+1}), sont imaginaires; les points doubles des divisions égales,

de même base, (m_1) et (m_{2k}), sont réels et diamétralement opposés sur le cercle : on voit aisément que l'angle qui les définit est $K\omega \pm \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, en dehors du cas des parallélogrammes ayant leurs côtés parallèles à deux directions conjuguées de l'ellipse considérée, dont le nombre est infini, on ne revient au point de départ après avoir parcouru un polygone de côtés alternativement parallèles à deux directions fixes que si le nombre des côtés est pair et le point de départ choisi en l'une des extrémités de deux certains diamètres de la courbe([1]); en outre, il ne s'agit pas de polygones véritablement fermés, mais plutôt *repliés* sur eux-mêmes. Au point de vue algébrique cette remarque est du reste sans conséquence.

Bien que la démonstration précédente, fondée sur une propriété du cercle, ne s'applique directement qu'à l'ellipse, on peut néanmoins des résultats obtenus conclure à ceux qui concernent l'hyperbole. E. MALO.

3296. (**1907**, 243) (*Arcitenens*). — Questions déjà proposées par M. Barisien sous le n° **2827** (**1904**, 239). *Voir* les réponses **1904**, 303, **1905**, 60, 228, et **1906**, 40, 108. H. BROCARD.

3297. (**1907**, 243) (*Picpus*). — *Somme de trois cubes égale à une somme de deux carrés.* — L'équation à résoudre étant

$$(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = y^2 + z^2,$$

ou

$$3x(x^2+2) = y^2 + z^2,$$

le produit $3x(x^2+2)$ sera une somme de deux carrés :

1° Si x est triple carré et x^2+2 somme de deux carrés;

2° Si x est triple somme de deux carrés et x^2+2 somme de deux carrés.

([1]) Tous les points de départ convenables s'obtiennent aisément comme il suit : Soient A et C les extrémités du diamètre conjugué à $\overline{OX}$, B et D celles du diamètre conjugué à $\overline{OY}$; en menant par A une parallèle à $\overline{OY}$, on obtient un point A_1, puis en menant par A_1 une parallèle à $\overline{OX}$ un point A_2, duquel on déduira de même un point A_3 et ainsi de suite. Les points A_{2k+1} sont points de départ et d'arrivée pour les tracés commençant par des parallèles à $\overline{OX}$ et les points A_{2k} pour les tracés commençant par une parallèle à $\overline{OY}$, etc.

Exemples :

1° $\quad x = 3a^2, \quad x = 12, \quad x^2 + 2 = 146 = 5^2 + 11^2,$

$$11^3 + 12^3 + 13^3 = 6^2(5^2 + 11^2) = 30^2 + 66^2,$$

nombres indiqués dans l'énoncé ;

2° $\quad x = 3(4 + 4) = 24, \quad x^2 + 2 = 578 = 7^2 + 23^2,$

$$23^3 + 24^3 + 25^3 = (36^2 + 36^2)(23^2 + 7^2) = 180^2 + 96^2.$$

H. Brocard.

On peut facilement indiquer autant qu'on voudra de ces triades, car, si $x - 1$, x, $x + 1$ désignent les racines des cubes considérés, la somme des cubes est $3x(x^2 + 2)$; il faut donc d'abord que l'un des facteurs du produit $x(x^2 + 2)$ soit divisible par 3, et $x^2 + 2$ le sera effectivement chaque fois qu'on supposera x égale à une somme de deux carrés premiers entre eux. Il suffit donc, mettant successivement au lieu de x les nombres de la suite 2, 5, 10, 13, 17, 25, 26, 29, 34, 41, ..., et divisant par 3, de pointer les quotients n'admettant en dehors du nombre 2 que des facteurs premiers de la forme $4m + 1$. On trouve que pour $x = 10$, 17, 26, 29, 34, 37, ..., la condition est remplie. Ainsi l'on a

$$9^3 + \overline{10}^3 + \overline{11}^3 = 6^2(9^2 + 2^2) = 6^2(7^2 + 6^2),$$
$$\overline{16}^3 + \overline{17}^3 + \overline{18}^3 = 3^2(\overline{40}^2 + 7^2) = 3^2(\overline{32}^2 + \overline{25}^2),$$
$$\overline{25}^3 + \overline{26}^3 + \overline{27}^3 = 6^2(\overline{38}^2 + 5^2) = 6^2(\overline{37}^2 + \overline{10}^2),$$
....

On ne saurait d'autre part faire $x = 3(z^2 + t^2)$, parce qu'alors $x^2 + 2$ ne serait point décomposable en deux carrés ; mais on peut poser $x = 12y^2$, et il suffit dans ce cas que $72y^4 + 1$ soit un nombre premier ou un produit de nombres premiers de la forme $4m + 1$. L'hypothèse $y = 1$ donne l'exemple indiqué dans la question 3297 ; l'hypothèse $y = 4$ en fournit un autre. *E.-A. Majol.*

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$(x - 1)^3 + x^3 + (x + 1)^3 = y^2 + z^2$$

ait des solutions entières et définitives sont :

1° x pair ;

2° Un, et un seul, des nombres x et x^2+2 contient le facteur 3 avec un exposant impair ;

3° Aucun des nombres x et x^2+2 n'admet de facteur premier avec exposant impair de la forme $4p-1$ (exception faite du cas 2°).

Les plus petites solutions sont

$$11^3+12^3+13^3=30^2+66^2,$$
$$25^3+26^3+27^3=30^2+228^2.$$

Si l'on admet que y ou z puisse prendre la valeur 0, on a l'unique solution

$$0^3+1^3+2^3=3^2,$$

pour laquelle la condition 1° n'est pas vérifiée.

Si la condition 1° est vérifiée, on a comme plus petites solutions

$$1^3+\ 2^3+\ 3^3=6^2,$$
$$23^3+24^3+25^3=204^2.$$

Je me tiens à la disposition de M. *Picpus* pour lui communiquer la démonstration de ce qui précède.

FERRARI (Pavie).

Traduit de l'italien. (LA RÉD.)]

Autre réponse de M. PLAKHOWO.

3298. (**1907**, 243) (E. LEMOINE). — *Division d'une droite en trois parties égales.* — La construction suivante me paraît devoir donner une simplicité géométrographique sensiblement inférieure à 19 :

AB étant la longueur donnée, mener par A une droite arbitraire AX ;

Sur cette droite, d'un point arbitraire M, avec le rayon MA, tracer un cercle qui coupe AX en un second point N ;

Tracer la droite NB, en la prolongeant au delà de B ;

De B comme centre, avec BN comme rayon, tracer un cercle qui coupe NB en un second point P ;

Tracer la droite MP qui coupe AB en un point Q.

PM, BA étant deux médianes du triangle ANP, le point Q est au tiers de BA.

Pour achever la division de AB en trois parties égales il suffit de

tracer de Q comme centre, avec QB comme rayon, un cercle qui coupe AQ en R. R. PERRIN.

3299. (**1907**, 243) (E.-N. BARISIEN). — *Parties de dominos essentiellement différentes.* — Le premier joueur, prenant 7 dominos sur 28, peut varier son choix de

$$\frac{28.27.26.25.24.23.22}{1.2.3.4.5.6.7} = 1184040 \text{ manières différentes.}$$

Il restera au deuxième joueur 21 dominos sur lesquels il pourra choisir la collection de 7 de

$$\frac{21.20.19.18.17.16.15}{1.2.3.4.5.6.7} = 116280 \text{ manières différentes.}$$

Le produit de ces deux nombres est

$$137680171200,$$

ainsi que l'a dit le journal cité. HENDLÉ.

Ce problème a été proposé il y a un demi-siècle par E. CATALAN (*Manuel des Candidats à l'Éc. Polytech.*, 1857, t. I, p. 70). Le loisir me manque pour rechercher s'il l'a puisé chez quelque autre.

Deux parties sont dites *non différentes essentiellement* (c'est-à-dire *ab initio*), si les sept dominos pris par chacun des deux partenaires sont les mêmes dans l'une et dans l'autre partie. Soient Adam et Ève commençant à jouer 4000 ans avant notre ère : se servant la première, Ève peut se servir de C_{28}^7 façons différentes, et Adam se servant ensuite peut le faire chaque fois de C_{21}^7 façons ; d'où $x = C_{28}^7 C_{21}^7$. A raison d'une partie par seconde et en supposant toutes les parties essentiellement différentes, les deux partenaires atteindront notre ère et même le milieu du IVe siècle avant d'épuiser les 137680171200 parties indiquées par Catalan. *Belga.*

Réponses analogues de MM. PERRIN et ROSE.

3300. (**1907**, 243) (E.-N. BARISIEN). — *Recueils d'intégrales.* — Question posée ici déjà, et presque dans les mêmes termes, sous le n° **647** (**1895**, 315), résolue **1896**, p. 50 et 188.

Aux noms cités, il conviendra d'ajouter :

G. Petit Bois. — Tables d'intégrales indéfinies. Liége et Paris, 1906.

Cet Ouvrage vient d'avoir une traduction allemande (*M.*, 1907, p. 177). Leipzig, 1907.

Les Tables d'intégrales définies de Bierens de Haan (1867) contiennent 8359 intégrales.

A ma connaissance, le premier Recueil de ce genre est celui de Meyer Hirsch, *Integraltafeln oder Sammlung von Integralformeln*, 1810. H. Brocard.

Pour les intégrales indéfinies, je citerai :

1° J.-A. Schubert. — Sammlung von Differential und Integral Formeln. Dresden und Leipzig, in der Arnoldischen Buchhandlung, 1842.

2° Ferdinand Minding. — Sammlung von Integraltafeln. Berlin, Gropius'sche Buch und Kunsthandlung, 1849.

3° Le travail que j'ai fait paraître dernièrement (1906), intitulé : *Tables d'intégrales indéfinies.*

Ces répertoires présentent les intégrales groupées par familles, de sorte qu'on peut s'assurer rapidement que telle intégrale dont on désire connaître la valeur s'y trouve ou ne s'y trouve pas.

Parmi les Ouvrages qui renferment bon nombre d'intégrales résolues, mais non classées, il y a d'abord le livre bien connu de M. F. Frenet : *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.*

On peut citer ensuite :

J. Graindorge. — Exercices de Calcul intégral. Liége, 1885.

L.-A. Sohncke's. — Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung. Halle, 1885.

Ralph A. Robberts. — A Treatise on the integral Calculus. Londres, 1887.

Ed. Brahy. — Exercices méthodiques de Calcul intégral. Paris, 1895.

Il y a encore l'Ouvrage anglais : Carr, *Integral Calculus,* dont je ne connais pas le titre exact, la première page de l'exemplaire que je possède ayant été enlevée. G. Petit Bois.

3302. (**1907**, 244) (*Arcitenens*). — *Équation indéterminée.* — Il existe de nombreux procédés pour trouver les solutions entières

de cette équation. On peut l'écrire sous la forme

$$(y-z)(y+z)=u^5-x^2,$$

et l'on peut poser $x=u^2$ et, par suite,

$$y+z=u^2(u-1),\qquad y-z=u^2.$$

On en déduit aisément les solutions

$$x=4v^2,\qquad y=4v^3,\qquad z=4v^2(v-1),\qquad u=2v.$$

Voici un autre procédé qui donne également des solutions impaires. On pose

$$y=n+1,\qquad z=n;$$

l'équation devient alors

$$x^2+2n=u^5-1.$$

On donne à u une valeur entière impaire, par exemple ; alors le deuxième membre est pair ; x est alors pair et l'on trouve aisément n. Si, au contraire, u est pair, x est impair. En appliquant ce procédé, on trouve, par exemple, les groupes de solutions

(1, 16, 15, 2); (3, 12, 11, 2); (5, 4, 3, 2); (2, 120, 119, 3); (4, 114, 113, 3); (6, 104, 103, 3); (8, 90, 89, 3); (10, 72, 71, 3); (12, 50, 49, 3); (14, 24, 23, 3); etc.

J. Rose.

Je trouve d'abord, pour l'équation

(1) $$x^2+y^2+z^2=u^5,$$

les formules suivantes, qui donnent une infinité de solutions en nombres entiers :

(1) $$\begin{cases} x=a(a^2+b^2)^2,\\ y=b(a^2+b^2)(a^2-b^2),\\ z=2ab^2(a^2+b^2),\\ u=a^2+b^2,\end{cases}$$

et ensuite je déduis de ces relations les formules

(2) $$\begin{cases} y=b(a^2+b^2)(a^2-b^2),\\ w=\frac{1}{2}[(a^2+1)(a^2+b^2)^2+4b^4],\\ v=\frac{1}{2}[(a^2-1)(a^2+b^2)^2-4b^4],\\ u=a^2+b^2,\end{cases}$$



qui donnent aussi une infinité de solutions entières pour l'équation proposée

$$(2) \qquad y^2 + v^2 - w^2 = u^5.$$

Il est bien évident qu'en donnant à a et b dans les relations (1) des valeurs entières, on obtient des solutions entières pour l'équation (1); mais, pour les solutions entières de l'équation (2), il suffit de prendre pour a des nombres impairs dans les formules (2).

Exemple. — Soient $a = 1$, $b = 1$; on trouve pour l'équation (1)

$$4^2 + 0^2 + 4^2 = 2^5,$$

et pour l'équation (2)

$$0^2 + 6^2 - 2^2 = 2^5.$$

Soient encore $a = 1$, $b = 2$; on a pour (1)

$$(25)^2 + (30)^2 + (40)^2 = 5^5,$$

et pour (2)

$$(30)^2 + (57)^2 - (32)^2 = 5^5,$$

et ainsi de suite; en donnant des valeurs entières à a et à b on trouvera (a toujours impair) des solutions entières.

P. S. — Je suis à la disposition de *M. Arcitenens* pour lui communiquer les méthodes employées dans ces solutions.

MEHMED NADIR (Alep).

Autres réponses de MM. BROCARD et PLAKHOWO.

3306. (**1907**, 246) (U. BINI). — Un sujet tout à fait analogue a été étudié avec quelque détail par divers mathématiciens, tant pour les équations cubiques à trois termes que pour les équations à quatre termes.

Je rappellerai seulement cet énoncé de Kummer (*M.*, quest. 52): Les équations de la forme

$$x^3 - (\alpha + 2\beta)x^2 + (2\alpha\beta + \beta^2 + 3\gamma^2)x - \alpha(\beta^2 + 3\gamma^2) = 0,$$

où α, β, γ sont des nombres entiers ou des fractions, sont les seules équations du troisième degré ayant une racine entière ou fractionnaire qu'on puisse trouver par la règle de Tartaglia (ou de Cardan) en n'opérant que sur des grandeurs commensurables (E. FAUQUEMBERGUE, *M.*, 1885, p. 204).



A titre documentaire et pour mémoire :

Finck et Deladeréere (*N. A.*, 1844, p. 41-47); V.-A. Lebesgue (*Ibid.*, p. 145-146); Wantzel (*Ibid.*, p. 325-329); Gerono (*N. A.*, 1856, p. 449-454); E. Mathieu (*N. A.*, 1857, p. 145-148); S. Realis (*N. A.*, 1875, p. 289-298, 424-427).

Voir aussi :

C.-F. Gauss. — *Disquisitiones arithmeticæ.*

Tous ces articles contiennent l'indication de plusieurs critères négatifs, tels que les suivants :

L'équation $x^3 + px + q = 0$ n'a pas de racine entière si $-p$ n'est pas de la forme $3y^2 + z^2$.

Une équation algébrique $f(x) = 0$ n'a pas de racine entière si $f(0)$ et $f(1)$ sont tous deux impairs, ou si aucun des nombres $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ n'est multiple de 3. H. Brocard.

Autre réponse de M. Mehmed-Nadir.

QUESTIONS.

1137. **[D1bε]** (1897, 217) Un correspondant pourrait-il me donner la liste, aussi complète que possible, des Mémoires publiés sur la question (étudiée, je crois, surtout par Tchebycheff) *des fonctions qui se rapprochent le plus de zéro dans un intervalle donné?* HENRY BOURGET.

1138. **[D3]** (1897, 217) A quelles conditions doit satisfaire une fonction y pour qu'il puisse exister entre y et quelques-unes de ses dérivées une relation de la forme

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}, \ldots) = 0,$$

la fonction F ne contenant pas x, et n'étant construite qu'avec un nombre fini de symboles : addition, multiplication, élévation aux puissances, exponentiels, trigonométriques et leurs inverses? LÉMERAY.

1140. **[V9]** (1897, 217) Où peut-on trouver l'analyse de l'Ouvrage de Hoené Wronski : *Application nautique de la nouvelle théorie des marées* (Gauthier-Villars, 1886)?
S. DICKSTEIN (Varsovie).

1144. **[D6e]** (1897, 219) Si $J^a(x)$ signifie la fonction besselienne de première espèce, il y a une formule de Duhamel :

$$J^a(a \sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{2a\pi\cos\theta}} e^{\cos\theta} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}.$$

Je demande dans quel travail se trouve cette formule.
H. GRAF (Berne).

1147. **[H11c]** (**1897**, 220) z étant une fonction de x et y, définie par l'équation

$$[x - f(z)][y - f(z)] = [f'(z)]^2,$$

existe-t-il des fonctions $f(z)$ donnant lieu à l'identité

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = f'(z),$$

X ne dépendant que de x et Y de y?

Si le problème est possible, je désirerais vivement connaître au moins une solution particulière.

Il est inutile de s'arrêter à l'équation de Liouville et même à celle des surfaces à courbure moyenne constante.

J. Lebel.

1148. **[H11c]** (**1897**, 220) Remplacer les deux équations de la question précédente par celles-ci :

$$x - y = f'(z),$$

$$2[x - f(z)][y - f(z)] + \frac{\partial^2(e^{2z})}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2(e^{-2z})}{\partial X^2} = 0.$$

J. Lebel.

1149. **[V9]** (**1897**, 220) Quels sont les périodiques mathématiques actuellement en cours de publication dans une des langues suivantes : russe, serbo-croate, tchèque, bulgare, polonaise, hongroise, finnoise? Laronde.

1150. **[I18c]** (**1897**, 220) Il est aisé de voir que 0, 1, — 1 sont les seules valeurs possibles de

$$y = 2\left[\sqrt{\frac{x}{2}}\right] - [\sqrt{x}] - [(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x}].$$

Y a-t-il un moyen simple de distinguer entre elles, *a priori*, les valeurs de x qui correspondent à deux valeurs différentes de y? *Rosace*.

1152. **[H11c]** (1897, 221) On sait que l'égalité

$$f(x)=f\left(\frac{x}{n}\right)+f\left(\frac{x+1}{n}\right)+f\left(\frac{x+2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{x+n-1}{n}\right),$$

qu'on suppose satisfaite quel que soit n, exprime une propriété commune aux fonctions

$$f(x)=[x], \qquad f(x)=x-\frac{1}{2}$$

et à toutes leurs combinaisons linéaires. Y a-t-il d'autres fonctions jouissant de la même propriété? Cesaro (Naples).

3343. **[I9a]** Existe-t-il une démonstration plus simple que celle de Dirichlet du fait que l'expression $ax+b$, où a et b sont donnés et premiers entre eux, représente une infinité de nombres premiers ? E. Dubouis.

3344. **[I9b]** Sait-on si, pour une infinité de valeurs *premières* de x, le nombre $2kx+1$ est premier?

La réponse à cette question a-t-elle été donnée pour certaines valeurs particulières de k non multiples de 3?

E. Dubouis.

3345. **[I3]** A-t-on étudié la congruence suivante :

$$\tfrac{1}{2}C^{1}_{2h}\,x^{h-1}+\tfrac{1}{5}C^{4}_{2h+1}\,x^{h-2}+\tfrac{1}{8}C^{7}_{2h+2}\,x^{h-3}+\ldots+1\equiv 0 \pmod{n},$$

n étant premier et égal à $6h+1$, ou la congruence

$$\tfrac{1}{1}x^{h-1}+\tfrac{1}{4}C^{3}_{2h}\,x^{h-2}+\tfrac{1}{7}C^{6}_{2h+1}\,x^{h-3}+\ldots+1\equiv 0 \pmod{n},$$

le module étant premier et égal à $6h-1$? E. Dubouis.

3346. **[B3c** et **A3g]** Exprimer, sous forme de déterminants, les coefficients des diverses puissances de t dans l'équation $\varphi(t)=0$ obtenue en égalant à zéro le discriminant du polynome $a_0 z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ et en y remplaçant a_n par t.

Donner quelque règle *pratique* pour le calcul d'une limite inférieure des racines positives de l'équation $\varphi(t)=0$, n'exigeant pas la formation effective de cette équation.

PETROVITCH (Belgrade).

3347. [I19c] L'équation

$$x^4+mx^2y^2+y^4=z^2$$

est impossible pour m positif quelconque et pour $m=8k+3$ négatif, si $m+2$ et $m-2$ sont des nombres premiers.

Ce théorème est-il connu? A. WEREBRUSOW.

3348. [I19c] Est-il démontré que l'équation

$$x^4+mx^2y^2+y^4=z^2$$

est impossible pour les valeurs suivantes de m, comme je le trouve :

0, 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 28, 29, 30, 32, 35, 37, 39, 40, 43, 45, 46, 50, 51, 53, 54, 58, 59, 60, 65, 69, 70, 72, 74, 75, 76, 80, 81, 82, 85, 88, 91, 93, 97, 99;

—3, —5, —6, —7, —8, —10, —12, —14, —17, —18, —19, —20, —21, —22, —23, —24, —29, —30, —31, —33, —34, —37, —38, —41, —45, —46, —48, —50, —52, —53, —54, —55, —56, —57, —58, —59, —60, —61, —62, —65, —66, —68, —69, —72, —73, —75, —82, —83, —85, —88, —90, —91, —93, —94, —96, —97, —98 ?

A. WEREBRUSOW.

3349. [P2b] Connaît-on la transformation corrélative particulière suivante, et en existe-t-il une autre plus simple :

Si, dans le plan de deux axes parallèles, on prend deux pôles O et O′ sur une parallèle à ces axes, et si P et P′ sont les points de rencontre de ces deux axes avec les deux rayons vecteurs OM et O′M d'un point quelconque M, la droite PP′ est corrélative de ce point M?

FARID BOULAD (Le Caire).

3350. [V1e] On rencontre fréquemment en Analyse des propriétés qui ont lieu quand certaines quantités $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots$ sont *infiniment petites;* d'autres, correspondant plutôt, il est vrai, à des relations d'inégalités, sont exactes quand certaines quantités $\varepsilon', \varepsilon'_1, \ldots$ sont *assez petites;* exemple : quand $|x|$, valeur absolue de x, est assez petite, $a + bx$ est du signe de a (a, b constantes). Tout cela est bien classique.

Or, on dit couramment « *un infiniment petit* »; on ne dit pas, à ma connaissance, « *un assez petit* » (il n'y a pas de terme équivalent). Cette dernière expression ne mériterait-elle pas d'être employée au même titre que la première? Elle pourrait être d'un usage fréquent.

Même observation pour l'expression « *un assez grand* » analogue à l'expression « *un infiniment grand* ».

Quelques correspondants voudraient-ils me faire connaître leur avis, soit par oui ou par non, soit en deux ou trois lignes?

E. Maillet.

3351. [J2e] Quelles sont les différentes formules qui ont été proposées pour représenter la loi de probabilité des erreurs, en dehors des formules ci-après :

$$\varphi(x) = \text{const.} \qquad \text{(Hélie)},$$

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \qquad \text{(Gauss)},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad \text{(Poisson)}.$$

Gleizes.

3352. [K] Je crois avoir lu que Stewart n'est pas l'auteur du théorème de Géométrie élémentaire qui porte son nom (et dont j'ai donné une démonstration nouvelle dans *J. E. V.*, 15 mars 1891).

S'il en est ainsi, à qui faut-il attribuer la relation de Stewart?

G. Lemaire (Cochinchine).

3353. **[C2j]** Calculer la valeur des intégrales

$$I_1 = \int_0^\infty \cos px \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^n dx,$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos px}{x^{3n}} (\sin x - x \cos x)^n \, dx;$$

n est entier et $0 < p < 1$.

GLEIZES.

3354. **[I18]** Dans quelle condition la somme des cubes de p nombres consécutifs est-elle aussi un cube?

E.-N. BARISIEN.

3355. **[I19c]** Quelle est la solution générale en nombres entiers des trois équations

$$zx - y = t^2,$$
$$(z+1)x - y = u^2,$$
$$(z+2)x - y = v^2,$$

J'en ai les trois solutions particulières suivantes :

$x = 24$, $y = 23$, $z = 1$, $t = 1$, $u = 5$, $v = 7$.
$x = 24$, $y = 47$, $z = 2$, $t = 1$, $u = 5$, $v = 7$.
$x = 240$, $y = 671$, $z = 3$, $t = 7$, $u = 17$, $v = 23$.

E.-N. BARISIEN.

RÉPONSES.

971. (**1897**, 5; **1906**, 162) (G. Eneström) (**1906**, 263). — VII. Le Dictionnaire de Colas (cité **1906**, p. 47) fait mention de Parseval (M.-A.) et ajoute : de l'Institut; mais c'est là un témoignage bien précaire (**1906**, 263).

VIII. Une lettre d'Abel à Holmbœ, datée de Christiania, 4 août 1823, contient cette indication sur un écrit de Parseval :

« J'ai lu une masse de Gruson (Verjagen). C'est un affreux rodomont, pourtant il a démontré que *e* est irrationnel. Croirais-tu qu'il a eu l'impudence de voler un Mémoire de Parseval et de le présenter à la Société des Sciences de Berlin? Il est traduit mot pour mot. »

Il serait intéressant de connaître le titre de ce Mémoire.

H. Brocard.

1003. (**1897**, 32) (E. Ballue) (**1906**, 163). — *Sur la célèbre Jubelschrift de Helmholtz « Zählen und Messen »*. — Je ne sais si M. Ballue connaît la langue russe; il pourrait s'en procurer une traduction russe éditée à Kasan en 1893, qui ne peut pas coûter plus d'un rouble, c'est-à-dire au plus 2^{fr} ou 3^{fr}.

Je crois que la *Jubelschrift* doit être dans les Œuvres de Helmholtz ou dans les *Wissenschaftliche Abhandlungen,* éd. à Leipzig (Verlag von Ambrosius Barth), mais je ne sais où ni dans quel Tome.

N. Plakhowo.

1477. (**1899**, 74) (Émile Borel). — *Sur certaines fonctions entières* (**1905**, 14; **1907**, 57). — Pour plus de précision ou de détails au sujet de ma précédente réponse, on pourra consulter ma Note des *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse,* 2e série, t. IX, 1907, p. 197 : *Sur les fonctions entières d'ordre fini.*

E. Maillet.

1658. (**1899**, 245) (G. de Rocquigny). — *L'Arithmétique au premier rang des Sciences* (**1904**, 145; **1905**, 16). — Voici quelques autres témoignages assez intéressants, relatifs à la question **1658**.

III. Mathematique vaut tant a dire come science de choses, que lor quantité est atraitée soulement en raison. Ceste est departie en IIII sciences : geometrie, arismetique, musique et astrenomie. Geometrie est science de quantité et de grandesse nient mouable et de formes. Arismetique est science de quantité nombrable selonc soi mesme. Musique est science de nombres que l'on treuve en sons et en voiz. Astrenomie est une science qui esgarde le movement dou ciel et le cours des estoiles et lor vertu.

L. Delisle. — Notice sur la rhétorique de Cicéron, traduite par maître Jean d'Antioche, manuscrit 590 du Musée Condé (*Notices et Extraits des Manuscrits,* etc., t. XXXVI, 1899, p. 207-265).

IV. *Bibliothèque de Reims.* — Manuscrit 975, f° 34. *Liber Cassiodori senatoris, humanarum litterarum, qui scribitur de artibus sæcularium studiorum, hoc est de gramatica, de rhetorica, de philosophia, de mathematica, de arithmetica, de geometrica, de astronomia,* etc.

Sur le plat final on trouve : *Arismetica Boecii cum aliquibus de geometria et musica.*

Au manuscrit 1263 on lit des vers sur les arts libéraux.

V. Le quadrivium comprenait l'Arithmétique, la Musique, la Géométrie et l'Astronomie; et le trivium, la Grammaire, la Rhétorique et la Dialectique.

Ainsi l'Arithmétique a généralement occupé le premier rang : « Cette classification rationnelle d'un savoir très incomplet répondait assez bien à la division moderne des lettres et des sciences. Le moyen âge ne l'avait pas inventée, car on la trouve dans Philon, dans Tzetzès, qui l'avaient probablement reçue des Pythagoriciens. Ce fut par Cassiodore et Martianus Capella qu'elle s'introduisit dans les écoles de l'Occident. » (J. Demogeot, *Histoire de la Littérature française,* 1852.) H. Brocard.

1761. (**1900**, 76) (G. Eneström). — *Renseignements sur Braikenridge* (**1907**, 272). — L'indication que voici, tirée du *Journal des Savans* (avril 1734, p. 244) aurait déjà donné des clartés très utiles pour guider les recherches. C'est l'annonce de l'Ouvrage de 1733 : *Exercitatio Geom. de descr. Linearum Curv. Auctore Gulielmo*

Braikenridge Ecclesia Anglicana Presbytero. Apud Ric. Hett et Joh. Nourse. Broch. in-4°, 1733 (VIII-70 pages).

C'est là sans doute que Terquem aura puisé son information.

D'après M. G. Loria (*Teorie geom.*, 1896, p. 38), l'*Exercitatio*... de 1733 aurait paru aussi en 1735 aux *Philosophical Transactions.* H. BROCARD.

1910. (**1900**, 270) (C. STÖRMER) (**1907**, 8). — Au catalogue de la librairie Hermann (novembre 1907), je trouve, page 34, l'annonce des *Œuvres complètes* de P.-L. Tchébychef, t. I, 714 pages in-4°, 1900; t. II, 700 pages in-4°, 1907.

Ceci donne à croire que la situation est meilleure que ne le supposait M. Plakhowo lors de l'envoi de sa réponse en octoble 1906.

H. BROCARD.

2385. (**1902**, 174) (G. ESPANET). — *Sur la Géométrie du pentagone.* — Le théorème de Miquel (1836); Grunert (*Crelle*, t. 5, p. 316); le même théorème démontré par Mention (*N. A.*, t. XII, 1853, p. 419); G. de Longchamps (*N. C.*, 1877, p. 306 et 310), sur des systèmes de droites et de cercles; pentagone inscrit et circonscrit à n cercles, dont les côtés sont a, b, c, d, e :

$$\frac{a(c-d)}{b+c-a}+f\left(\frac{\dots\dots}{\dots\dots}\right)+\dots=0.$$

A. Russel (*Éléments*, t. L, 1889, p. 109, n° 4556). J. Mention (*N. A.*, t. XXI, 1862, p. 16 et 65).

Cette bibliographie est tirée de l'Ouvrage de M. Simon (*Die Entwickelung*, etc.). N. PLAKHOWO.

2658. (**1903**, 253) (ISSALY). — *Sur les lignes géodésiques d'une pseudo-surface.* — 1. Dans notre Ouvrage intitulé : *Les pseudo-surfaces appliquées à la généralisation*, etc. (Hermann, 1906), nous avons démontré, à l'aide du *Calcul des variations* (p. 26), que les lignes géodésiques de la pseudo-surface

$$(1) \qquad P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0,$$

lignes définies par la condition $\delta\int dS=0$, admettent, *notamment*,

la forme suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} R(P^2+Q^2+R^2)(dx\,d^2y-dy\,d^2x) \\ \quad =(P\,dy-Q\,dx)[(P\,dR-R\,dP)dx]+[(Q\,dR-R\,dQ)dy]. \end{cases}$$

Posons

$$P=\mathfrak{p},\qquad Q=\mathfrak{q},\qquad R=-1,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial x}=\mathfrak{r},\qquad \frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial x}=\mathfrak{s},\qquad \frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial y}=\mathfrak{s}_1,\qquad \frac{\partial\mathfrak{p}}{\partial y}=\mathfrak{t};$$

la pseudo-surface (1) devenant ainsi

$$(1')\qquad dz=\mathfrak{p}\,dx+\mathfrak{q}\,dy,$$

ses lignes géodésiques seront

$$(2')\quad \begin{cases} (1+\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2)(dx\,d^2y-dy\,d^2x) \\ \quad =(\mathfrak{p}\,dy-\mathfrak{q}\,dx)[\mathfrak{r}\,dx^2+(\mathfrak{s}+\mathfrak{s}_1)dx\,dy+\mathfrak{t}\,dy^2], \end{cases}$$

ou bien

$$(3)\qquad (1+\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2)y''=(\mathfrak{p}y'-\mathfrak{q})[\mathfrak{r}+(\mathfrak{s}+\mathfrak{s}_1)y'+\mathfrak{t}y'^2],$$

en ayant soin de choisir x comme variable indépendante.

Pour $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_1$, on retrouve les géodésiques d'une *surface*, savoir :

$$(4)\qquad (1+p^2+q^2)y''=(py'-q)(r+2sy'+ty'^2).$$

2. Ces remarques faites, à l'élément linéaire

$$(5)\qquad dS^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

que la question posée implique, nous sommes amené à substituer cet autre,

$$(5')\qquad dS^2=(1+\mathfrak{p}^2)dx^2+2\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,dx\,dy+(1+\mathfrak{q}^2)dy^2,$$

et, conséquemment, à la condition (1) du texte, celle-ci.

$$(6)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)-\frac{\partial V}{\partial y}=0,$$

laquelle suppose, on le voit, qu'entre deux limites déterminées on ait

$$\int dS=\int V\,dx=\int\sqrt{(1+\mathfrak{p}^2)+2\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,y'+(1+\mathfrak{q}^2)y'^2}\,dx.$$

Cela étant, effectuons les calculs indiqués par la relation (6); il viendra

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}(1+\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2)y'' = \mathfrak{p}y'(\mathfrak{r}+2\mathfrak{s}_1y'+\mathfrak{t}y'^2)\\ -\mathfrak{q}(\mathfrak{r}+2\mathfrak{s}y'+\mathfrak{t}y'^2)\\ +(\mathfrak{s}_1-\mathfrak{s})[\mathfrak{p}+\mathfrak{q}y'^3+(\mathfrak{p}+\mathfrak{q}y')^2].\end{aligned}\right.$$

Nous obtenons ainsi, chose inattendue, des lignes tout à fait *distinctes* des géodésiques (3) et dans lesquelles celles-ci ne sauraient même se transformer. Toutefois, si l'on fait partout $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_1$, il y aura, *de part et d'autre,* coïncidence avec les géodésiques (4) d'une *surface*. Qu'est-ce à dire?...

3. *Vérification et interprétation du résultat.* — Écrivons l'élément linéaire (5) comme il suit :

$$(8)\quad dS = \frac{(1+\mathfrak{p}^2)\,dx+\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,dy}{dS}\,dx + \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,dx+(1+\mathfrak{q}^2)\,dy}{dS}\,dy.$$

Pour que le second membre soit une différentielle exacte, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{p}\mathfrak{q}+(1+\mathfrak{q}^2)y'}{dS}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(1+\mathfrak{p}^2)+\mathfrak{p}\mathfrak{q}y'}{dS}\right).$$

Or, si l'on effectue ces nouveaux calculs, on retombera *exactement* sur les lignes (7), circonstance qui permet (ainsi que nous nous le proposions) de les caractériser, *analytiquement,* du moins.

Concluons de ce qui précède que la condition (6) n'est équivalente à la définition $\delta\int dS = 0$ des géodésiques, en général, que lorsque z est une *fonction* proprement dite de x et de y, ce qui exige que

$$\mathfrak{p} = p = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \mathfrak{q} = q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Que si, au contraire, d'après (1) ou (1'), z est une *pseudo-fonction* de ces mêmes variables, la condition (6) se trouve incapable de fournir les lignes géodésiques d'une pseudo-surface telle que (1'), forme qui, on le sait, ne manque ni d'intérêt ni d'importance.

ISSALY.

2778. (**1904**, 115) (*Carevyge*). — (**1906**, 106). — Le Journal de

Beeckmann, retrouvé à Middelbourg (Hollande), a été consulté et examiné à fond par M. Ch. Adam. Il est donc à espérer qu'un résumé en sera donné dans l'édition de Descartes (*voir* réponse **1307**, **1906**, 195).

Il sera d'ailleurs publié par les soins de la Société hollandaise des Sciences de Haarlem.

Ce document est écrit en latin, mais non en latin classique. Il est de lecture assez difficile, et pour le déchiffrer il est nécessaire d'être aidé d'un spécialiste. H. Brocard.

2855. (**1904**, 285) (E. Maillet). — *Erreurs de mathématiciens* (**1905**, 275; **1906**, 65, 110, 150, 200, 248; **1907**, 31, 275).

Euler (*Comment. Arith. coll.*, t. II, p. 91) a oublié d'indiquer 1001081 comme nombre premier.

Il a lui-même rectifié la composition de 1000009 qu'il avait d'abord indiqué comme premier. Ce nombre est égal au produit 293.3413 (*voir* Lettre à Beguelin, *Id.*, p. 271).

Euler a de plus indiqué tous les nombre suivants comme premiers:

$1000169 = 197.5077$,	$1001141 = 127.7883$,
$1000261 = 271.3691$,	$1001519 = 113.8863$,
$1000379 = 127.7877$,	$1001591 = 823.1217$,
$1000633 = 127.7879$,	$1001909 = 277.3617$.
$1000801 = 277.3613$,	

A. Gérardin.

2885. (**1905**, 50) (E.-N. Barisien). — (**1905**, 187). — Mentionnons une solution plus expéditive, indiquée dans les *Annaes sc. da Acad. Polyt. do Porto*, t. II, 1907, p. 179-183.

L'auteur, M. H. Wieleitner, a fait usage des coordonnées polaires.

La formule de M. Malo doit être écrite

$$S = \frac{a^2 \pi \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La Rédaction.

2948. (**1905**, 172) (A. Grévy). — *Vie de Gaspard Monge* (**1906**, 47, 118, 202; **1907**, 13). — Additions diverses.

XXI. Dans l'*Encyclopédie* de Migne, *Dictionnaire des Inventions*, par le marquis de Jouffroy, il est dit, col. 139, article *Aérostation*, 1852 :

« La possibilité de diriger à volonté les ballons lancés dans l'espace est une question qui a occupé et divisé un grand nombre de savants : Meunier, Monge, de Lalande, Guyton de Morveau, Bertholon et beaucoup d'autres physiciens n'hésitaient pas à l'admettre. Les beaux travaux mathématiques que Meunier nous a laissés, relativement aux conditions d'équilibre des aérostats et à la recherche des moyens propres à les diriger, montrent à quel point ces idées l'avaient séduit. On peut en dire autant de Monge, qui a traité les problèmes mathématiques qui se rattachent à l'aérostation. Cependant on pourrait citer une très longue liste de géomètres qui ont combattu les opinions de Monge et de Meunier, etc. »

XXII. Le décès de Monge a eu lieu le 28 juillet 1818; la date indiquée dans l'*Histoire des Mathématiques*, de F. Hœfer (Paris, 1874), p. 586, est erronée, et l'on ne peut vérifier d'où provient l'erreur.

A ce sujet, je rapporterai le témoignage de Dupin, mentionné par Brisson, dans l'Avertissement de la 5e édition de la *Géométrie descriptive*, de G. Monge (Paris, 1827) :

« Ses derniers momens ont été sans dernières pensées, sans derniers épanchemens, sans derniers adieux : il s'est éteint dans le silence, sans angoisses, sans terreur et sans espérance.... La régularité du service n'a pas permis qu'une jeunesse généreuse vînt, à l'heure de ses funérailles, déposer la palme de la reconnaissance et des regrets sur la tombe de leur premier bienfaiteur; mais, dès l'aurore qui suivit le jour des derniers devoirs, les élèves s'acheminèrent en silence vers le lieu de la sépulture et y déposèrent un rameau de chêne auquel ils suspendirent une couronne de laurier. Vingt-trois anciens élèves de l'École Polytechnique, tous résidans de la ville de Douai, se réunirent spontanément et décidèrent d'écrire en commun à M. Berthollet, pour le prier de diriger l'érection d'un monument qui serait élevé aux frais des anciens élèves de l'École Polytechnique, en l'honneur de Gaspard Monge. »

La vérité est que cet événement éveilla l'attention de la police parisienne. Les deux billets que voici, tous deux inédits, en sont la preuve :

MINISTÈRE
DE LA
POLICE GÉNÉRALE.

Paris le 31 juillet 1818.

Si M. le Rédacteur rend compte des obsèques de M. Monge il est invité à ne pas parler de l'incident qui a empêché les élèves de l'école polytechnique de s'y rendre.

MINISTÈRE
DE LA
POLICE GÉNÉRALE.

Paris le 14 août 1818.

Monsieur Villenave est prié de ne laisser insérer aucune note ou réclamation quelconque des élèves de l'École Polytechnique à l'occasion d'un art^e du *Surveillant* sur les obsèques de M. Monge.

Il est également prié de ne pas laisser annoncer le d^er n^o des *Lettres champenoises*.

XXIII. Le précédent paragraphe donne prétexte à revenir sur l'iconographie de G. Monge. *Voir* déjà réponse **2907** (**1906**, 70-71).

A Paris, au 5e arrondissement, Monge a une rue, un square et une place, sur laquelle s'élève la statue de Louis Blanc. Un de mes correspondants, M. Wœlflin, observe que le système des compensations exigerait peut-être que la statue de Monge fût placée dans la rue Louis-Blanc, 10e arrondissement.

Monge a bien, il est vrai, une statue, mais elle est haut située, et l'œil du touriste ne va guère la chercher au fronton du Panthéon (1831-1837, œuvre de P.-J. David, d'Angers).

Du même artiste, un médaillon en bronze à l'Institut, et un buste en marbre, en costume d'académicien. Un autre buste en marbre, par H.-J. Ruthschiel, existe au cimetière du Père-Lachaise, au tombeau de G. Monge. Un deuxième exemplaire de ce buste se trouve à l'École Polytechnique et un troisième à la Société d'encouragement du travail national, rue Bonaparte, à Paris.

Ce monument est dû à l'hommage de l'École Polytechnique.

XXIV. Pour finir aujourd'hui par de l'inédit, voici encore deux pièces curieuses :

« Je prie Mr Monge de lire les Memoires de consulter lingenieur Gerard de se rendre comme amateur sur la terrasse et de me faire un raport secret et confidentiel sur cette grande question.

» NAPOLÉON.

» Paris le 25 pluviose an 13. »



[Lettre autographe de Napoléon, sauf la date, ajoutée par Monge.
Les mots *lire les* et *lingenieur* sont écrits sur d'autres et brouillés.]

« Monsieur le senateur Monge, j'ai reçu votre lettre et je suis tres sensible à l'attachement que les habitants d'Aix la Chapelle ont conserve pour moi. La certitude que vous m'en avez donné m'est d'autant plus agréable que je me rappelle toujours avec beaucoup de plaisir et d'interêt le séjour que j'ai fait parmi eux. Soyez bien persuadé aussi que transmis par vous, leurs sentiments en acquièrent à mes yeux un nouveau prix.

» JOSÉPHINE.

» Ecrit à Milan ce 17 prairial an 13.

» Je me rappelle au souvenir de Madame Monge. »

[Lettre autographe de Joséphine.
La signature et les deux lignes finales sont d'écriture plus forte, probablement d'une plume plus grosse.]

Les deux dates ci-dessus, en style grégorien, correspondent, sauf erreur, aux 14 février et 6 juin 1805. H. BROCARD.

3070. (**1906**, 141) (E.-B. ESCOTT). — *Trouver n nombres tels que leurs n^2-n différences deux à deux, considérées relativement au module (n^2-n+1) fournissent les n^2-n premiers nombres.* — Aucune réponse à cette question n'ayant encore été ni donnée, ni annoncée, je crois devoir indiquer les résultats que j'ai obtenus, bien qu'ils soient relatifs simplement aux valeurs de n que M. Escott a considérées et pour lesquelles il a donné des solutions, et en outre à la valeur $n=6$. Le cas de $n=7$, qui était tout particulièrement signalé, m'a opposé plus de difficulté que je ne m'y attendais, étant donné que j'avais presque du premier coup aperçu l'une des solutions pour $n=6$. Il semble pourtant, d'après les chiffres ci-dessous, qu'on doive s'attendre à plusieurs solutions où le nombre le plus élevé n'excéderait pas le module, en les supposant commencer toutes par le nombre 1.

Pour $n=3$:

(1, 2, 4),	(1, 3, 4),
(1, 2, 6),	(1, 5, 6),
(1, 3, 7),	(1, 5, 7);

Pour $n = 4$:

(1, 2, 5, 7), (1, 3, 6, 7),
(1, 2, 9, 11), (1, 3, 10, 11),
(1, 4, 5, 12), (1, 8, 9, 12),
(1, 4, 6, 13), (1, 8, 10, 13);

Pour $n = 5$:

(1, 3, 8, 9, 12), (1, 4, 5, 10, 12),
(1, 2, 5, 15, 17), (1, 3, 13, 16, 17),
(1, 2, 7, 9, 19), (1, 11, 13, 18, 19),
(1, 6, 7, 10, 20), (1, 11, 14, 15, 20),
(1, 4, 14, 16, 21), (1, 6, 8, 18, 21);

Pour $n = 6$:

(1, 2, 5, 7, 14, 22), (1, 9, 16, 18, 21, 22),
(1, 8, 10, 13, 14, 24), (1, 11, 12, 15, 17, 24),
(1, 3, 6, 7, 17, 25), (1, 9, 19, 20, 23, 25),
(1, 2, 12, 20, 27, 29), (1, 3, 10, 18, 28, 29),
(1, 4, 5, 15, 23, 30), (1, 8, 16, 26, 27, 30),
(1, 4, 6, 13, 21, 31). (1, 11, 19, 26, 28, 31).

E. Malo.

3085. (**1906**, 185) (*Hergé*), (**1907**, 42). — Dans le même ordre d'idées, on peut signaler *Le Courrier de la Presse* (Paris, boulevard Montmartre, 21) qui communique aussi les articles relatifs à un sujet ou une personne déterminés. *Anonyme.*

3111. (**1906**, 236) (G. Lemaire). — *Sur la tétralogie allégorique, arc, corde, flèche, sinus* (**1907**, 47). — Je viens de trouver le passage suivant dans l'Ouvrage *Mathematical Tables,* par Charles Hutton (Londres, 1804, 4[e] édition, p. 18) : *sinus* doit provenir du mot latin signifiant *sein* ou *poitrine,* en référence avec la position de l'arme de jet *arc* (arcus), sa *corde* (chorda) et sa *flèche* (sagitta). Je reproduis en anglais le texte de Hutton. Après avoir cité l'opinion de Montucla, Godin, Lansberg, Viète, Guarinus, Vitalis, il dit :

« Long before I either saw or heard of any conjecture, or observation concerning the etymology of the word *sinus,* I remember that

I *imagined* it to be taken from the same Latin word, signifying breast or bosom, and that our sine was so called allegorically. I had observed, that several of the terms in trigonometry were derived from a bow to shoot with, and its appendages; as *arcus* the bow, *chorda* the string, and *sagitta* the arrow, by which name the versed sine, which represents it, was sometimes called; also, that the *tangens* was so called from its office, being a line *touching* the circle, and *secans* from its cutting the same : I therefore imagined that the *sinus* was so called, either from its resemblance to the breast or bosom, or from its being a line drawn within the bosom (*sinus*) of the arc, or from its being that part of the string (*chorda*) of a bow (*arcus*) which is drawn near the breast (*sinus*) in the act of shooting. And perhaps Vitalis's definition, above-quoted, has some allusion to the same similitude. Also Vieta seems to allude to the same thing, in calling *sinus* an allegorical word, in page 417 of his works, as published by Schooten, where, with his usual judgment and precision, he treats of the propriety of the terms used in trigonometry... »

C. WARGNY (Valparaiso).

3126. (1906, 260) (G. LEMAIRE). — Le mode de division n'étant pas spécifié, il faudra faire diverses hypothèses dont voici probablement les plus simples :

1° Division par des droites menées d'un point M du triangle aux trois sommets A, B, C;

2° Division en trois quadrilatères birectangles par des perpendiculaires menées du point M du triangle aux trois côtés;

3° Division en trois quadrilatères par les droites MA′, MB′, MC′ prolongements des droites MA, MB, MC.

Ces trois divisions donnent des figures équivalentes lorsque le point M est le barycentre.

Elles sont, de plus, isopérimètres, lorsque le triangle est équilatéral.

Les surfaces restent équivalentes par projection cylindrique, mais la condition d'isopérimétrie s'exprime par des équations extraordinairement compliquées, et qui prouvent que le choix d'un point M autre que le barycentre conduirait à des formules inextricables.

On peut présenter aussi le problème en y introduisant un lieu géométrique; l'arc d'hyperbole enveloppe des segments rectilignes qui détachent dans deux angles B et C un triangle d'aire constante.

Deux tangentes diviseront alors le triangle en trois parties équivalentes, mais la condition d'isopérimétrie deviendra d'une rebutante complication.

La conclusion de plusieurs essais infructueux est que le problème ne peut se résoudre par une construction graphique à la règle et au compas.

On pourrait, au moins, étudier à nouveau le cas particulier indiqué dans l'énoncé. H. Brocard.

La question ainsi posée est indéterminée; car après avoir séparé un tiers du triangle par une droite menée d'un sommet au côté opposé, ce tiers étant proprement choisi de manière à avoir un plus grand périmètre que les deux autres, on divisera par une droite la partie restante en deux parties équivalentes et isopérimétriques, puis on remplacera la ligne de division par une ligne brisée convenablement choisie pour satisfaire à la question; il est évident que cette ligne brisée peut être choisie d'une infinité de manières différentes.

G.-A. L'Hommedé.

3138. (**1907**, 5) (*Altschuler*). — L'algorithme des Hindous mentionné par Laplace pourrait être l'*Algoritmus de numero Indorum* ou l'art de calculer, nom emprunté à celui de l'auteur de ce Traité, le mathématicien arabe Al Kouarizmi (première moitié du ixe siècle).

L'ingénieux algorithme des Hindous, au sens de Laplace, désignerait simplement leur système de numération, ou le système décimal.

Je suis fondé à croire qu'il n'y a là aucune allusion aux logarithmes, ignorés d'ailleurs des Hindous.

Le témoignage de P. Tannery me paraît confirmer l'explication que je viens de proposer. Voir *Revue archéologique,* 1894, *Sur l'étymologie du mot « chiffre »*. H. Brocard.

3152. (**1907**, 26) (G. Lemaire). — Voir *Procès-verbaux de la Commission extraparlementaire du Cadastre* (décret du 30 mai 1891). Paris, Imprimerie nationale.

E. Cheysson. — Rapport général sur les travaux de la sous-commission technique. Fasc. n° 6, p. 495-566 (Paris, 1898).

A la page 536, il est fait allusion à l'étude des conditions d'établis-

sement du cadastre parcellaire que venait d'ordonner la loi du 15 septembre 1807. Il n'est donné qu'un résumé de la vue d'ensemble et du rapport que présenta Delambre, président de la Commission d'étude. L'original existe sans doute aux Archives nationales; on pourrait s'y adresser, ou mieux, consulter les anciens membres de la sous-commission précitée. H. BROCARD.

3162. (**1907**, 29) (E.-N. BARISIEN). — *Quadrilatère inscriptible* (**1907**, 186). — Il y a encore dans *Entwickelung der Elementar-Geometrie im* XIX. *Jahrhundert,* dans les triangles spéciaux, une mention.

E.-E. KUMMER. — Vierecke mit rationalen Seiten und Diagonalen (auch die Stücke der Diagonalen sind rational) (*Crelle,* t. 37, 1848, p. 1).

SCHWERING. — Rationale Tetraeder ders. Programm (*Crelle,* t. 115, 1895, p. 301).

DÜRIN. — Geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen (1898).

SCHLÖMILCH. — Rationale Dreiecke und Vierecke aus pythagorischen Dreiecken (*Hoffmann,* t. XXIV, 1893, p. 401).

N. PLAKHOWO.

3248. (**1907**, 169) (E.-N. BARISIEN). — 1° La généralisation proposée est seulement arithmétique. Elle n'est pas définie par des conditions géométriques. Pour la compléter, il faudrait dire, par exemple : Construire le point dont les distances aux côtés a, b, c sont la, mb, nc. (Pour $l = m = n = 1$, on retrouve le point de Lemoine.)

Ainsi posée, la question se résoudra aisément par les équations

$$\delta_a = \mathrm{K}la, \qquad \delta_b = \mathrm{K}mb, \qquad \delta_c = \mathrm{K}nc,$$
$$2\mathrm{S} = a\,\delta_a + b\,\delta_b + c\,\delta_c$$

(*A. F.,* Rouen, 1883, p. 188-196; *J. S.,* 1884, p. 197-209). Mais l'indétermination des nombres l, m, n (entiers ou non) enlève tout intérêt à une étude plus suivie.

2° La remarque est *évidente* pour le barycentre G. Elle est très élémentaire aussi pour l'orthocentre H. C'est la conséquence d'un théorème remontant au moins à Carnot (*Géométrie de position,* 1803) (rappelé *N. A.,* 1877, p. 188-190, rép. 2); *Exercices de Géométrie,* de F. J., 3[e] édit., 1896, p. 275 et 282, et de G. M., 4[e] édit.,

1907, p. 278. *Voir* aussi *Géométrie* de Rouché, 1900, p. 306-309.

Le n° 2 est d'ailleurs formellement énoncé et démontré dans la *Recente Geometria del triangolo* de C. Alasia, 1900, p. 190-193.

3° Ces divers éléments n'ont pas encore été, que je sache, étudiés systématiquement, mais je suis en mesure de prouver qu'ils se sont présentés dans la Géométrie du triangle avant la publication de la question 3248. H. BROCARD.

3260. (1907, 173) (NAZAREVSKI). — *Formule de la théorie des nombres.* — Considérant le cercle de rayon 1, soient sa circonférence partagée en p parties égales et les points de division numérotés de 1 à p : il s'agit d'établir que la somme algébrique des distances des points en question au diamètre passant par le point p est égal à $\frac{1}{2}\sqrt{p}$, si l'on se borne à ceux dont le numéro d'ordre est un résidu quadratique de p, supposé premier et de la forme $4m+3$.

Il y a lieu de remarquer tout d'abord que, relativement à un tel module, $p-a$ (ou $-a$) étant un non-résidu du moment que a est un résidu quadratique, la somme algébrique des distances au même diamètre des sommets dont le numéro est un non-résidu quadratique de p doit être égale à $-\frac{1}{2}\sqrt{p}$.

Je forme maintenant l'équation dont la distance de chaque sommet au diamètre considéré est une racine. Puisqu'on a par hypothèse

$$(x+iy)^p = 1,$$

on a séparément

$$x^p - \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}y^2 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}x^{p-4}y^4 - \ldots = 1,$$

$$\frac{p}{1}x^{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}y^2 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1.2.3.4.5}x^{p-5}y^4 - \ldots = 0,$$

en supprimant la racine $y=0$: la relation $x^2+y^2=1$ (vérifiée toujours par hypothèse) donne alors

$$0 = \frac{p}{1}(y^2-1)^{\frac{p-1}{2}} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}y^2(y^2-1)^{\frac{p-3}{2}} + \frac{p(p-1)\ldots(p-4)}{1.2.3.4.5}y^4(y^2-1)^{\frac{p-5}{2}} + \ldots.$$

Le coefficient de y^{p-1} est manifestement 2^{p-1}; celui de y^{p-3} est

$-2^{p-3}p$; celui de y^{p-5} est $2^{p-5}\frac{p(p-3)}{1.2}$, et, en général, celui de y^{p-2k}

$$2^{p-2k}\frac{p(p-k-1)(p-k-2)\ldots(p-2k+1)}{1.2\ldots k}.$$

Si l'on suppose que le deuxième membre de l'équation en y, de degré pair, qu'on vient de former soit décomposable en deux facteurs de degré $\frac{p-1}{2}$, l'un des deux s'écrivant

$$y^{\frac{p-1}{2}}-\alpha y^{\frac{p-3}{2}}+\beta y^{\frac{p-5}{2}}-\gamma y^{\frac{p-7}{2}}+\ldots,$$

l'autre sera

$$y^{\frac{p-1}{2}}+\alpha y^{\frac{p-3}{2}}+\beta y^{\frac{p-5}{2}}+\gamma y^{\frac{p-7}{2}}+\ldots,$$

et l'on aura à déterminer α, β, γ, ... par les relations

$$\alpha^2-2\beta=\frac{1}{4}p,$$

$$\beta^2-2\alpha\gamma+2\delta=\frac{1}{16}\frac{p(p-3)}{1.2},$$

....

La démonstration du théorème proposé est donc ramenée à celle de l'identité $\beta=0$, c'est-à-dire à celle de l'identité suivante,

$$\sum\cos\frac{2(a+b)\pi}{p}=\sum\cos\frac{2(a-b)\pi}{p},$$

a et b désignant successivement tous les résidus quadratiques de p, mais b ne pouvant jamais être égal à a.

Je dis que *cette identité a lieu terme par terme*, c'est-à-dire qu'à tout binome $a+b$ du premier membre répond un binome $c-d$ qui est congru à $\pm(a+b)$ suivant le module p.

Cette proposition, qui est facile à vérifier sur un exemple numérique pris à volonté parmi les moindres valeurs de p, ne peut être établie d'une façon entièrement rigoureuse que moyennant une discussion et des développements qui ne sauraient trouver place ici. Je dois donc me borner à une simple esquisse de la démonstration en ne mentionnant que ses linéaments essentiels.

A cet effet, considérant les résidus quadratiques de p pris positivement, je les remplace par les carrés mêmes, plus petits que $\frac{p^2}{4}$,

dont ils procèdent : autrement dit, je forme le Tableau dont la première ligne est obtenue en ajoutant l'unité à chacun des carrés naturels, puis la deuxième en augmentant de 3 chacun des nombres de la première, puis encore la troisième en augmentant de 5 chacun des nombres de la deuxième ligne, etc. Il suffit, du reste, d'écrire les termes situés à droite et au-dessus de la diagonale principale (contenant les doubles des carrés naturels), et, pour un module premier donné p, de la forme $4m+3$, de limiter le Tableau à sa $\left(\frac{p-3}{2}\right)^{\text{ième}}$ colonne, qui, dans l'hypothèse faite, est toujours de rang pair : le Tableau, qui renferme alors $\frac{(p-1)(p-3)}{8}$ nombres, est figuré ci-dessous pour le cas de $p=23$:

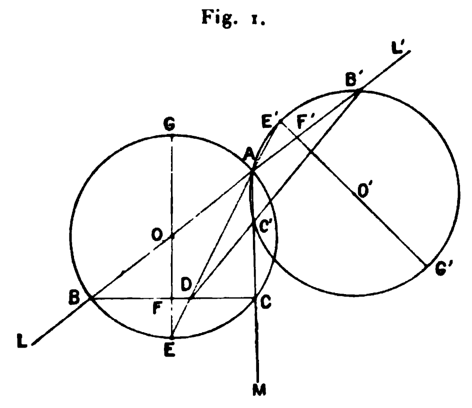
5	10	17	26	37	50	65	82	101	122	...
	13	20	29	40	53	68	85	104	125	...
		25	34	45	58	73	90	109	130	...
			41	52	65	80	97	116	137	...
				61	74	89	106	125	146	...
					85	100	117	136	157	...
						113	130	149	170	...
							145	164	185	...
								181	202	...
									221	...

Les nombres compris dans le Tableau en question peuvent être distingués sous plusieurs points de vue, mais ils jouissent tous, à l'exception de ceux qui sont simplement pairs, de la propriété d'être représentables comme une différence de deux carrés, laquelle, modulairement et eu égard au nombre premier p qu'on envisage, se ramène à la différence de deux carrés moindres que $\frac{p^2}{4}$: même les nombres simplement pairs du Tableau, en les augmentant d'abord de p, deviennent représentables par une somme de deux carrés et rentrent dans la règle générale. Ainsi donc, en partant du Tableau des sommes des carrés moindres que $\frac{p^2}{4}$, on aboutit, sauf l'ordre et le signe des termes, au Tableau des différences des mêmes carrés, composé également de $\frac{(p-1)(p-3)}{8}$ nombres, et, modulairement, équivalent au premier.

On voit quel est l'esprit de la démonstration et aussi sur quels points elle demande à être améliorée : le défaut d'espace oblige à en laisser tout le soin au lecteur. E. MALO.

3309. (1907, 266) (*Steerman*). — *Problème de Pappus*. — Supposons le problème résolu ; D est le point donné sur la bissectrice AD de l'angle LAM.

Fig. 1.



Le cercle circonscrit au triangle ABC est connu en grandeur, puisque la corde BC est donnée ainsi que l'angle en A. La bissectrice AD passe par E, milieu de l'arc BEC, et l'on a

$$ED.EA = EF.FG.$$

EF et EG sont des longueurs connues, et en outre EA — ED = AD ; donc on peut construire ED et EA.

Soit D B′C′ une droite rencontrant AM et AL′, prolongement de AL et telle que $B'C' = BC = l$, longueur donnée. Le cercle circonscrit à A B′C′ est égal au premier et E′F′ = EF, E′G′ = EG, puis

$$E'A.E'D = E'F'.E'G' = EF.EG,$$
$$E'D - E'A = AD,$$

de sorte que E′D = EA.

On a donc la construction suivante :

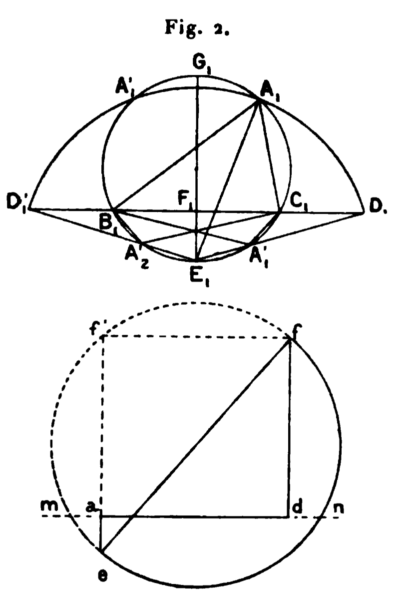
Sur $B_1 C_1 = l$ je construis le segment capable de l'angle donné A. Je trace le diamètre $E_1 F_1 G_1$ perpendiculaire à $B_1 C_1$. Cela fait, aux deux extrémités d'un segment de droite *ad* de longueur AD, j'élève

des perpendiculaires $ae = E_1F_1$, $df = E_1G_1$ de sens contraires, et, sur ef comme diamètre, je trace un cercle qui coupe ad en m et n :

$$an - ma = ad, \qquad ma.an = ea.af' = ea.df.$$

Le cercle de centre E_1 et de rayon an coupe le cercle $B_1C_1G_1$ en A_1 et A'_1 et la droite BC en D_1 et D'_1.

Fig. 2.



Sur la droite AL, il suffit de porter $AB = A_1B_1$ pour avoir une première solution. En portant $AB = A_1C_1$, on aura une solution symétrique par rapport à la bissectrice donnée. Joignons D_1E_1 qui coupe le cercle $B_1C_1G_1$ en A'_1 ; il suffit de porter sur AL′ la longueur $AB' = A'_1B_1$. Si l'on porte sur AL′ une longueur égale à A'_1C_1, soit AB″, B′D et B″D donneront deux solutions symétriques.

Ce problème n'est d'ailleurs que le problème de Pappus, dont on peut trouver beaucoup de solutions dans les Traités d'Algèbre ou de Géométrie analytique. B. Niewenglowski.

Réponses analogues de MM. Duran-Loriga et Haberlach.

QUESTIONS.

3356. [L'17e] Une hyperbole équilatère U et un cercle C étant donnés, une deuxième hyperbole équilatère V se trouve implicitement donnée comme lieu des centres du faisceau de coniques (U, C) ou $U + \lambda C = 0$. Comment démontrerait-on géométriquement que l'hyperbole V reste invariable lorsqu'on considère des cercles C de différents rayons mais de même centre? *E.-A. Majol.*

3357. [J2f] Une urne contient N boules, dont b sont blanches.

On en tire m.

Quelle est la probabilité pour que p blanches soient sorties à ce tirage. Barriol.

3358. [L'15f] Soit un pentagone inscrit dans un cercle et dont les côtés sont, dans un certain ordre, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_5$. On projette orthogonalement un point M de la circonférence de ce cercle, en $P_1, P_2, \ldots, P_5$ sur $\Delta_1, \ldots, \Delta_5$. Les points P sont les sommets d'un pentagone. Je désirerais le lieu géométrique : 1° du centre de la conique inscrite, 2° du centre de la conique circonscrite, pour ce pentagone $P_1 P_2 \ldots P_5$, quand le point M parcourt la circonférence.

A. Boutin.

3359. [I19c] A-t-on résolu la question suivante proposée par Gerono (*N. C.*, n° 599)?

Trouver les valeurs entières et positives qui vérifient l'équation

$$x^3 + 2 = y^2.$$

Stenacencis.

3360. [**K21a**δ] Je désirerais connaître la construction géométrographiquement la plus simple d'une droite passant par les points de concours respectifs α et β de deux couples de droites $(AA_1, A'A'_1)$ et $(BB_1, B'B'_1)$ situées dans un même plan, quand ces points se trouvent en dehors de l'épure.

PAULMIER.

3361. [**I19c**] Y a-t-il une règle ou une loi pour trouver les nombres A qui, élevés à la puissance n, donnent des nombres B, tels que les sommes des chiffres de A et B soient les mêmes?

Ainsi, dans le cas du carré, on a les nombres suivants :

$$1^2 = 1,\quad 9^2 = 81,\quad \overline{18}^2 = 324,\quad \overline{19}^2 = 361,\quad \overline{45}^2 = 2025,$$
$$\overline{46}^2 = 2116,\quad \overline{55}^2 = 3025,\quad \overline{99}^2 = 9801,\quad \overline{145}^2 = 21\,025,$$
$$\overline{189}^2 = 35\,721,\quad \overline{198}^2 = 39\,204,\quad \overline{199}^2 = 39\,601,\quad \ldots,$$
$$\overline{999}^2 = 998\,001,\quad \ldots,\quad \overline{9999}^2 = 9\,998\,0001.$$

Dans le cas du cube, on a

$$1^3 = 1,\quad 8^3 = 512,\quad \overline{171}^3 = 5\,000\,211,\quad \overline{577}^3 = 192\,100\,033,$$
$$\overline{585}^3 = 200\,201\,625.$$

E.-N. BARISIEN.

3362. [**I19c**] Je trouve les 16 solutions entières suivantes de l'équation

$$(10x+y)(x+y)-2(10z+t)(z+t) = x^3+y^3-2(z^3+t^3)$$

dans l'ordre (x, y, z, t) :

$$(6, 4, 4, 2),\quad (6, 4, 4, 6),\quad (6, 4, 5, 1),\quad (6, 4, 9, 1),$$
$$(6, 6, 4, 2),\quad (6, 6, 4, 6),\quad (6, 6, 5, 1),\quad (6, 6, 9, 1),$$
$$(7, 3, 4, 2),\quad (7, 3, 4, 6),\quad (7, 3, 5, 1),\quad (7, 3, 9, 1),$$
$$(9, 3, 4, 2),\quad (9, 3, 4, 6),\quad (9, 3, 5, 1),\quad (9, 3, 9, 1).$$

Il est à remarquer que toutes ces valeurs sont inférieures à 10. Il serait intéressant d'en avoir d'autres, et surtout de trouver des solutions en formules générales.

E.-N. Barisien.

3363. [**B1a**] On vérifie aisément que chacun des déterminants

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \dots & 1 \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{1}{3!}2^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{4!}2^3 & \frac{1}{2!}2 & 1 & \dots & 0 & \frac{1}{3!} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{1}{n!}2^{n-1} & \frac{1}{(n-1)!}2^{n-2} & \frac{1}{(n-2)!}2^{n-3} & \dots & 1 & \frac{1}{(n-1)!} \\ \frac{1}{(n-1)!}2^n & \frac{1}{n!}2^{n-1} & \frac{1}{(n-1)!}2^{n-2} & \dots & \frac{1}{2!}2 & \frac{1}{n!} \end{vmatrix}$$

est nul pour $n = 3, 5$. Mais je voudrais savoir s'il y a d'autres valeurs de n pour lesquelles cette propriété subsiste.

Hernandez.

3364. [**O51** et **Q1d**] Puisqu'on peut prouver que l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) - \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

fournit directement et par elle-même, non pas les géodésiques vraies, mais les simili-géodésiques d'une *pseudo-surface,* pour

$$V = \sqrt{(1+p^2) + 2pqy' + (1+q^2)y'^2},$$

en sorte qu'appliquée, par exemple, au *pseudo-plan,* d'équation

$$a\,dz = y\,dx - x\,dy,$$

ces nouvelles lignes soient représentées par

$$\frac{a^2}{2}(x^2+y^2+a^2)y'' = (y-xy')[a^2(1+y'^2)+(y-xy')^2],$$

faut-il s'étonner que celles-ci, confondues sans cesse, comme elles le sont, avec les *droites* ($y''=0$) de projection horizontale des vraies géodésiques, soit du pseudo-plan, soit du plan, donnent lieu aux confusions les plus regrettables à l'endroit, notamment, des perspectives *rectilignes* (sur un plan) des géodésiques d'une surface? (Beltrami.)

Issaly.

3365. **[I19c]** Je viens de déduire de l'équation

(A) $$x^9 - y^9 = (3t-2)[3t(t^2-1)]+1$$

l'équation suivante :

(B) $$x^6 + x^3y^3 + y^6 - 3t(t^2-1) = 1.$$

Pour ces deux équations les formules suivantes donnent, en même temps, une infinité de solutions entières :

$$t = y(y+1)+1,$$
$$x = y+1,$$

y étant un nombre arbitraire.

On voit que, dans toutes ces relations, x et y sont deux nombres entiers consécutifs.

Je serais très reconnaissant à un correspondant qui voudrait

bien m'indiquer quelques formules qui donnent, en même temps, des solutions entières pour les deux équations (A) et (B), dans lesquelles x et y soient des entiers quelconques (et non seulement consécutifs).

MEHMED NADIR (Alep).

3366. [I19c] Je demande les formules générales qui donnent une infinité de solutions entières pour l'équation

$$4(v^2 - u^2) - 3u^4 = 1,$$

où u est un nombre impair. MEHMED NADIR (Alep.)

3367. [I19c] Trouver les formules générales qui donnent une infinité de solutions entières positives pour l'équation

$$2Tu^2 = x(3x+1) + 2Tv^2,$$

où T est un nombre triangulaire quelconque.

MEHMED NADIR (Alep).

3368. [I19c] Je trouve, pour l'équation

$$ny^4 + 9719z = u^4,$$

la solution

$$n = 7713, \quad y = 20, \quad z = -126\,976, \quad u = 4;$$

pour l'équation

$$ny^7 + 9719z = u^7,$$

la solution

$$n = 1850, \quad y = 20, \quad z = -243\,646\,464, \quad u = 4;$$

pour l'équation

$$ny^{13} + 9719z = u^{13},$$

la solution

$$\begin{cases} n = 7060, \quad y = 20, \quad u = 4, \\ z = -59\,507\,685\,975\,916\,544; \\ n = 7060, \quad y = 281, \quad u = 2000, \\ z = 842\,885\,021\,007\,840\,291\,373\,629\,072\,670\,447\,992\,660. \end{cases}$$

Je désirerais avoir les formules générales qui donnent un grand nombre de solutions entières des équations précédentes.

MEHMED NADIR (Alep).

3369. [M¹8a] Quel est l'ordre et quelle est la classe de l'épicycloïde ou de l'hypocycloïde engendrée par le roulement d'un cercle de rayon r sur un cercle de rayon $\frac{p}{q}r$?

Où sont situés les points doubles?

WEINMEISTER (Tharandt, Saxe).

3370. [M²3h] A-t-on publié une étude détaillée de la surface de révolution engendrée par la rotation de la parabole de Neil $y^2 = px^3$ autour de son axe?

TARNER DE LA FUENTE (Escorial, Espagne).

[Traduit de l'espagnol. (LA RÉD.)]

3371. [H2] Peut-on donner un exemple d'une équation intégrable de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

où $X = 0$ représente une droite ne coupant pas l'ellipse $Y = 0$.

W. KAPTEYN.

3372. [Σ] M. Appell termine ainsi une Note *Sur l'extinction du frottement,* parue dans le *Bull. Soc. math.*, t. XXXV, 1907, p. 131-133 : « Je laisse à d'autres, qui auront plus de loisirs que moi, le soin de généraliser et de préciser les considérations ci-dessus. »

Voir encore L. LECORNU, même Tome., p. 3.

E. MAILLET.

RÉPONSES.

612. (**1895**, 281, **1904**, 185) (W. de Romilly). — *Impossibilité de l'équation*

$$x^n + y^n = z^n. \tag{1}$$

Voir encore : 314 (**1894**, 179; **1895**, 117, 359; **1905**, 11; **1906**, 99); 477 (**1895**, 23; **1901**, 305); 3001 (**1906**, 7, 131, 223). — Il suffit de l'établir pour n premier impair. Les nombres x, y et z sont premiers entre eux. De l'équation (1) on tire

$$x^n = (z - y)[ny^{n-1} + (z - y)P],$$

d'où l'on voit que les deux facteurs de x^n ne peuvent avoir aucun commun diviseur autre que n; on aura donc

$$z - y = b^n, \qquad x = b\beta,$$

ou, si $\lambda \neq 0$,

$$z - y = n^{n\lambda-1} b^n, \qquad x = n^\lambda b \beta, \tag{2}$$

où $n^\lambda b$ et β sont premiers entre eux. Les équations suivantes conduisent aux mêmes conclusions

$$y^n = (z - x)[nx^{n-1} + (z - x)Q],$$
$$z^n = (x + y)[nx^{n-1} + (x + y)R],$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad \begin{cases} z = a\alpha, & x = b\beta, & y = c\gamma, \\ x + y = a^n, & z - y = b^n, & z - x = c^n, \end{cases}$$

où les nombres a, b, c, α, β et γ sont tous premiers entre eux deu à deux, sinon x, y, z auraient un diviseur commun. Si un de ces nombres, par exemple x, était divisible par n, on aurait pour x et $z - y$ les expressions (2).

Au lieu des équations (3) nous considérons les équations plus

simples, mais aussi conséquences nécessaires de l'équation (1) :

$$(4) \qquad b\beta + c\gamma = Aa, \qquad a\alpha - c\gamma = Bb, \qquad a\alpha - b\beta = Cc,$$

où A et α peuvent être supposés premiers entre eux, car si l'on avait

$$A = A_1 d, \qquad \alpha = \alpha_1 d,$$

on prendrait

$$a_1 = a\, d, \qquad Aa = A_1 a_1, \qquad a\alpha = a_1 \alpha_1,$$

où A_1 et α_1 seraient premiers entre eux. De même pour B et β, C et γ.

Ces équations ne changent pas si x (ou y, z) est divisible par n : b peut avoir un diviseur n^λ, premier avec a, c, α, β et γ.

Des équations (4) on tire

$$b = \frac{C - \gamma}{\theta}, \qquad c = \frac{B - \beta}{\theta}, \qquad a = \frac{BC - \beta\gamma}{\alpha\theta},$$

où θ est le plus grand commun diviseur de $B - \beta$ et de $C - \gamma$.

A et α étant premiers entre eux, on aura

$$C\beta + B\gamma - 2\beta\gamma = A\omega, \qquad BC - \beta\gamma = \alpha\omega,$$
$$(B - \beta)(C - \gamma) = (\alpha - A)\omega,$$

d'où il suit

$$A = \alpha - pq, \qquad B = \beta + ps, \qquad C = \gamma + qt, \qquad \omega = st.$$

Ainsi on a

$$\alpha = pq + \frac{\beta q}{s} + \frac{\gamma p}{t},$$

$$a = \frac{st}{\theta}, \qquad b = \frac{qt}{\theta}, \qquad c = \frac{ps}{\theta}.$$

Puisque α est entier et que les nombres pq et α, ps et β, qt et γ sont premiers entre eux, nous aurons

$$q = sf, \qquad p = tg, \qquad \alpha = fgts + f\beta + g\gamma;$$

θ est le plus grand commun diviseur de ps et de qt :

$$ps = stg, \qquad qt = stf, \qquad \theta = st,$$

car f et g n'ont aucun diviseur commun, sinon on aurait α et pq. On obtient donc

$$a = 1, \qquad b = f, \qquad c = g,$$

ce qui démontre l'impossibilité de l'équation (1), puisqu'on a

$$x + y = a^n = 1, \qquad x = 0 \qquad \text{ou} \qquad y = 0.$$

A. Werebrusow.

Les calculs ne nous ont pas semblé assez développés pour nous permettre une vérification. Eu égard à l'importance du résultat, nous demandons à M. Werebrusow de vouloir bien nous adresser une réponse très détaillée. E. Maillet.

2874. (**1905**, 26) (L. Dujardin). — *Résolution graphique d'un système d'équations linéaires* (**1905**, 184; **1906**, 70; **1908**, 7). — J'ai fait connaître en 1875, dans le compte rendu du Congrès de Nantes, de l'*A. F.* (p. 154), une *Méthode graphique pour résoudre un système quelconque de n équations du premier degré à n inconnues*. L'application de cette méthode, de même que sa combinaison avec celle donnée par M. Masson en 1889, semble pouvoir être utilisée dans bien des cas. C'est d'ailleurs à l'occasion d'un problème pratique que j'y ai été conduit, à savoir la *Détermination graphique des moments de flexion d'une poutre à plusieurs travées solidaires* (*C. R.*, t. LXXX, p. 1668, et *Annales des Ponts et Chaussées*, 1876). J'ai indiqué une autre solution qui exige, en général, une transformation préalable du système d'équations (*S. M.*, t. III, p. 93). Ce second procédé est également exposé dans la traduction française, avec notes additionnelles, due à Paul Terrier et éditée par Gauthier-Villars, des *Leçons de Statique graphique*, d'Antonio Favaro (*Calcul graphique*, IIe Partie, p. 229 à 232).

Chasles avait déjà donné une solution graphique de certains systèmes d'équations du premier et même du second degré de formes très particulières (*Traité de Géométrie supérieure*, 2e édition, p. 209 à 213). G. Fouret.

2974. (**1905**, 266) (G. Lemaire) et **2976** (**1905**, 267) (G. Lemaire). — *Problème de la Carte* (**1906**, 122, 219; **1907**, 15). — *Additions bibliographiques diverses.*

1808. C.-F. Beautemps-Beaupré. — Exposé des méthodes employées pour lever et construire les cartes et plans qui composent l'Atlas du voyage du contre-amiral Bruny d'Entrecasteaux.

1829. Beautemps-Beaupré et Daussy. — Exposé des travaux relatifs à la reconnaissance hydrographique des côtes méridionales de la France, par M. Beautemps-Beaupré, suivi d'un Précis des opérations géodésiques qui ont servi de base aux cartes et plans des trois premières parties du *Pilote français*, par M. Daussy.

1837. P. Bégat. — Aperçu général du système adopté au Dépôt de la Marine pour déterminer les positions des points qui se trouvent sur les cartes et plans du *Pilote français*.

1839. P. Bégat. — Traité de Géodésie à l'usage des marins, etc.

1844. P. Bégat. — Exposé des opérations géodésiques relatives aux travaux hydrographiques exécutées sur les côtes méridionales de France.

1854. O. Terquem. — *N. A.*, p. 367-368 (Note sur Pothenot).

1857. Poudra. — Topographie. Détermination d'un point par trois autres points connus (*N. A.*, p. 388-389).

1857. O. Terquem. — Note sur le procédé Pothenot (*N. A.*, Bibliographie, p. 89-92, avec Extraits de W. Snellius).

1872. C.-M. Bauernfeind. — *Arch. de Grunert* (voir *I. M.*, **1897**, p. 231).

1872. Schlesinger. — Nouvelle démonstration des théorèmes de Lehmann relatifs au problème de Pothenot, etc. (*Arch. de Grunert*).

1872. G. Darboux. — Sur les relations entre les groupes de points, de plans et de sphères dans le plan et dans l'espace (*A. E. N.*).

1873 et 1874. G. Bellavitis, F.-J. et C.-A. Laisant. — (Voir *I. M.*, **1897**, p. 231). Théorie et applications des équipollences (*N. A.*).

1874. C.-M. Bauernfeind. — *Abh. K. Akad. München*, t. XI, p. 81-99 (voir *I. M.*, **1898**, p. 101).

1877. Toubin. — Le problème de la Carte (*N. A.*, p. 377).

1884. E. Habich. — Sur un système particulier de coordonnées curvilignes (*N. A.*, p. 353-367).

1896-1897. D. Fellini. — Le problème de Pothenot (*Ac. des Sc. de Turin*, t. XXXII, p. 320-328).

1899. G. Delitala. — Formule definitive di risoluzione del problema di Pothenot (*Atti delle R. Acc. dei Lincei*, juin 1899). Voir aussi *R. T. M.*, 1905. p. 80.

1900. G. Darboux. — Les Œuvres de Gauss (*J. des Savants*, p. 668-678), avec un historique assez détaillé du problème de la

Carte, qu'étudia Pothenot dans un Mémoire de 1692, publié seulement en 1792 (*voir* ci-dessus).

Antérieurement à lui, Willebrord Snellius l'avait posé et résolu dès 1617 dans son *Eratosthenes Batavus de terræ ambitus vera quantitate,* et John Collins l'avait traité dans les *Transactions philosophiques,* de 1671, d'après une question posée par Townley.

C.-F. Gauss a donné une solution du problème de Pothenot, distincte de celle à laquelle s'attachent les Traités élémentaires : elle repose sur la considération de trois points remarquables qui ont reçu le nom de *points de Collins.*

1901. Hatt. — Utilisation des points de Collins pour la détermination d'un quadrilatère (*C. R.,* t. CXXXII, 1901, p. 597-599).

1901. G. Detilata. — Un correlativo del teorema di Stewart (*Period. di Mat.,* t. XVII, juillet-août 1901).

1901. G. Russo. — Il problema di Pothenot (*Annali de Istit. tecn. paregg. di Catanzaro,* t. I).

1904. S. Gunther. — Das Pothenot'sche Problem auf der Kügelfläche (*Acad. de Munich,* t. XXXIV, p. 115-123).

Note. — Dans la liste des procédés mécaniques, il faudra faire mention des télémètres de côte et de l'emploi des appareils optiques, télégraphiques et téléphoniques, dont quelques-uns de ces télémètres sont munis.

Le détail doit s'en trouver dans le *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.*

H. Brocard.

2997. (**1906**, 6) (G. Lemaire). — *Division d'un polygone.* — Au moins comme première réponse, je crois que le mieux est de signaler trois Notes de M. d'Ocagne :

Note sur le partage des polygones. Cas où la ligne de partage passe par un point donné sur leur périmètre (*J. E.,* 1878, p. 332-335).

Sur le partage des polygones (*J. E.,* 1880, p. 487-489).

Partage des polygones (*M.,* 1881, p. 109). — Article terminé par une remarque où M. J. Neuberg cite précisément la Note d'Euzet (*N. A.,* 1854, p. 114-115) : Nouvelle méthode pour diviser un polygone en parties proportionnelles à des quantités données par des droites partant d'un point quelconque pris dans son intérieur.

Il semble que cette question ait depuis longtemps préoccupé les

géomètres, car on en trouvera des traces dans les Ouvrages que voici :

Camus. — Éléments de Géométrie théorique et pratique, nouv. édit., 1755, II[e] Partie, p. 117-120. De la division des figures rectilignes (division d'un hexagone ABCDEF en quatre parties équivalentes par des droites issues d'un point G de AF).

S.-A.-J. Lhuilier. — Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes, et Abrégé d'Isopérimétrie élémentaire, Genève, 1774.

A.-A. Lalmand. — Essai sur la Géodésie ou art de partager les champs. Paris, 1793, 196 pages. — Cet Ouvrage traite du partage des polygones par des droites assujetties à diverses conditions.

L.-M. Desdouits. — Géométrie, 1834, p. 264. — Partage des terres. — L'auteur traite du partage d'un hexagone scalène ABCDGH en cinq triangles équivalents ayant un sommet en A, et leurs bases droites ou brisées sur des fractions du périmètre BCDGH. Il traite aussi de la division d'un quadrilatère scalène en trois parties équivalentes limitées au périmètre et à des droites issues d'un point intérieur.

Brune. — Division du quadrilatère en quatre quadrilatères équivalents [*Cr.*, t. **22**, 1841, p. 379; *N. A.*, 1849, p. 365; démonstration (*N. A.*, 1850, p. 55-56), par G. Foucault et Peaucellier].

J. Dienger. — Die ebene Polygonometrie, vollständig dargestellt und durch zahlreiche Beispiele erlautert. Stuttgard, 1854. — Cet Ouvrage contient des applications numériques paraissant rentrer dans le programme de la question **2996**. (Voir *N. A.*, 1854, p. 437-446).

H. Brocard.

3232. (**1907**, 126) (D.-L. Korteweg). — *Problème d'Huygens.* — Le problème est manifestement résolu par la droite de jonction des barycentres des deux figures DBE et ADEC. Il pourrait donc avoir été suggéré par la détermination du barycentre d'un quadrilatère, dont la situation s'obtient rapidement en joignant tour à tour les barycentres des deux triangles ACD, ECD, et des deux triangles ADE, ACE [*voir* la figure (**1907**, 126)].

La solution graphique est trop simple pour amener à penser qu'elle ait donné le sujet d'un développement historique. Sans remonter dans le passé, Huygens peut donc fort bien avoir proposé spontanément ce problème élémentaire, plus récréatif que mathématique.

H. Brocard.

3261. (**1907**, 174) (NAZAREVSKY). — *Nombres premiers admettant le nombre* 10 *comme résidu biquadratique.* — Il faut tout d'abord distinguer entre les nombres premiers suivant que, relativement au module 4, ils donnent 1 ou 3 pour reste.

Pour tout nombre premier de la deuxième espèce, chaque résidu quadratique est aussi résidu biquadratique, et il ne s'agit dès lors que de déterminer les formes pour lesquelles 10 est résidu quadratique; ce sont les suivantes :

$$40n + 3 = 43,\ 83,\ 163,\ 283,\ \ldots,$$
$$40n + 27 = 67,\ 107,\ 227,\ 307,\ \ldots,$$
$$40n + 31 = 31,\ 71,\ 151,\ 191,\ 271,\ \ldots,$$
$$40n + 39 = 79,\ 199,\ 239,\ \ldots.$$

Le problème ne se pose donc véritablement qu'à l'égard des nombres premiers décomposables en deux carrés : 10 sera résidu quadratique de ceux qui appartiennent à l'une des formes

$$40n + 1,\quad 40n + 9,\quad 40n + 13,\quad 40n + 37;$$

mais il ne sera résidu biquadratique que d'un certain nombre d'entre eux, qu'il ne paraît pas possible de définir par le moyen simplement de formes linéaires particularisées parmi les précédentes, non plus que par des formes quadratiques (qui impliqueraient des formes linéaires).

La discrimination de l'alternative

$$10 \equiv x^2, \qquad 10 \equiv x^4 \qquad (\bmod p)$$

peut du moins être faite assez facilement en utilisant certaines décompositions quadratiques des nombres premiers appartenant aux formes linéaires indiquées ci-dessus.

Il s'agit de vérifier si l'on a

$$10^{\frac{p-1}{4}} \equiv \pm 1 \qquad (\bmod p),$$

le signe supérieur indiquant que 10 est résidu biquadratique, l'inférieur qu'il est résidu simplement quadratique. Or, tout module premier de l'une des formes linéaires $40n + 1$, $40n + 9$, est, quadratiquement, de la forme $z^2 + 10t^2$ (Lagrange) : il vient donc

$$10t^2 = p - z^2,$$

$$10^{\frac{p-1}{4}} t^{\frac{p-1}{2}} \equiv z^{\frac{p-1}{2}} \qquad (\bmod p),$$

et, par suite, 10 est résidu biquadratique ou bien résidu simplement quadratique suivant que les nombres z et t sont de même caractère ou de caractère différent (mod p).

Soit, par exemple, le module premier

$$41 = 1 + 10.2^2;$$

1 et 2 sont résidus quadratiques de 41; donc

$$10 \equiv x^4 \qquad (\text{mod } 41).$$

On a de même

$$241 = 9^2 + 10.4^2,$$

et 10 est encore un résidu biquadratique, puisque 4 et 9 sont des carrés naturels. Mais 281 donne la décomposition $11^2 + 10.4^2$ et 11 n'est pas résidu quadratique de 281, parce que 281 ne l'est pas de 11, laissant comme résidu 6, qui est racine primitive de 11.

D'autre part, les doubles des nombres premiers de chacune des formes linéaires $40n + 13$, $40n + 37$ sont de la forme $(2z)^2 + 10t^2$, et, de l'égalité

$$10t^2 = 2p - (2z)^2,$$

on conclut

$$10^{\frac{p-1}{4}} t^{\frac{p-1}{2}} \equiv -(2z)^{\frac{p-1}{2}} \qquad (\text{mod } p);$$

ici encore 10 sera résidu biquadratique de p si les nombres z et t sont de même caractère relativement au module p, résidu simplement quadratique dans le cas contraire, puisque 2 est ici non-résidu.

Par exemple, on a

$$2.13 = 16 + 10,$$

d'où

$$z = 2, \qquad t = 1;$$

10 n'est donc pas résidu biquadratique de 13 puisque 2 est un non-résidu. Au contraire, pour $p = 53$, on a

$$2p = 106 = 16 + 10.9,$$

$z = 2$, $t = 3$; 3 étant non-résidu comme 2, 10 est résidu biquadratique.

E. Malo.

La forme des nombres premiers dont (a) est un résidu de $m^{\text{ième}}$ puissance est

$$\rho = \text{fact.} \left\{ a\left(n^{\frac{k}{r}}\right)^m \sim \left[n^{\frac{k}{r}} h + (-1)^{k+1} \right]^m \right\},$$

donnée par Wronski, modifiée et généralisée par moi.

Pour appliquer cette formule à la question de M. Nazarevsky, posons, par exemple,

$$n = 1, \qquad k = 2, \qquad r = 1, \qquad a = 10, \qquad m = 4$$

(ces nombres sont arbitraires), et nous aurons

$$\rho = \text{fact.}[10.16 \sim (2h-1)^4] = 160 \sim (2h-1)^4.$$

Exemple. — Pour résoudre la congruence

$$x^4 \equiv 10 \quad (\text{mod } p),$$

posons

$$h = 1;$$

nous obtiendrons

$$\rho = 159 = 3.53,$$

et ces deux modules premiers satisfont aux congruences

$$x^4 \equiv 10 \equiv 1 \quad (\text{mod } 3),$$

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \equiv 10 \\ x \equiv 26 \\ 26^4 \equiv 10 \end{array}\right\} \quad (\text{mod } 53).$$

Et si l'on pose $h = 2$, on obtient

$$\rho = \text{fact.}[160 \sim (3)^4] = 79,$$

qui satisfait à la congruence

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \equiv 10 \\ x \equiv 41 \\ 41^4 \equiv 10 \end{array}\right\} \quad (\text{mod } 79).$$

Mehmed Nadir (Alep).

Autre réponse de M. E.-B. Escott qui renvoie à C.-E. Bickmore [*On the numerical factors of* $a^n - 1$ (*M. M.*, 2ᵉ série, t. XXV, 1895, p. 28; t. XXVI, 1896, p. 2)]. En particulier, si

$$p = 4n + 1 = a^2 + b^2$$

et si

$$a \equiv 1 \ (\text{mod } 4),$$

10 est résidu biquadratique de p quand une des quatre conditions

ci-après est remplie (et seulement dans ce cas) :

1° $b \equiv 0 \pmod{40}$;
2° $a \equiv 0 \pmod{5}$ avec $b = 8h + 4$;
3° $a + b \equiv 0 \pmod{5}$ » $b = 8h + 2$;
4° $a - b \equiv 0 \pmod{5}$ » $b = 8h - 2$.

E.-B. ESCOTT, LA RÉDACTION.

Autre réponse de M. Werebrusow.

3272. (**1907**, 197) (C. WARGNY). — *Courbes de mortalité.* — Il existe un grand nombre de courbes empiriques et analytiques de mortalité et de survie.

Courbes empiriques de

Moivre..... $y = l_x = l_0(86 - x)$

Lambert.... $l_x = A\left(\frac{96 - x}{x}\right)^2 - B(e^{-h_1 x} - e^{-h_2 x})$

Wittstein... $l_x = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n}$

Babbage.... $l_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

Moser...... $l_x = 1 + a_1 x^{\frac{1}{4}} + a_2 x^{\frac{9}{4}} + a_3 x^{\frac{17}{4}} + a_4 x^{\frac{25}{4}} + a_5 x^{\frac{33}{4}}$

et de Littrow, Orchard, Sang, Scheffler.

Courbes analytiques de

Gauss................ $l_x = ke^{Gc^n - Bb^n}$

Gomperz............. $l_x = kg^{c^x}$

Edmonds............. $l_x = e^{\frac{a}{\log p}(1-p^x)}$

Makeham .... $l_x = ks^x g^{c^x}$

Lazarus.............. $l_x = ks^x g_1^{c_1^x} g_2^{c_2^x} g_3^{c_3^x} \dots g_n^{c_n^x}$

Quiquet.............. $l_x = ks^x g_1^{c^x} g_2^{rc^x}$

et d'Oppermann et de Thiele.

Courbe de mortalité de K. Pearson.

Bibliographie :

V. DORSTEN. — Sterblichkeitsformeln. Ned. Naturw. Congress, 1901.

WESTERGAARD. — Mortalität und Morbilität, janvier 1901.

BLASCHKE. — Math. Statistik. Leipzig, 1906.

La Table et la courbe de mortalité suivantes qui n'ont qu'un intérêt historique ont paru en 1806 à Paris :

Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole sur la mortalité de chaque âge et de celle qu'un préservatif comme la vaccination peut avoir sur la population et la longévité, par E. Duvillard.

A. BOHREN (Berne).

3273. (**1907**, 197) (PAULMIER). — *Intersection d'une droite et d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal* (**1908**, 23). — Une solution de ce problème, dans le cas général où les deux directrices et le plan directeur sont quelconques, se trouve dans ma Note de 1889 : *Sur quelques problèmes de Géomérie descriptive concernant les surfaces gauches du second degré* (*N. A.*, 3ᵉ série, t. VIII, p. 34). Cette solution se simplifie naturellement, quand le plan directeur est parallèle à l'un des plans de projection. Elle se réduit alors à ceci : A et B étant les deux directrices données du paraboloïde et D la droite rencontrant cette surface, imaginons le cylindre circonscrit au paraboloïde parallèlement à D. Ce cylindre est coupé par un plan horizontal II suivant une parabole P, à laquelle sont tangentes les projections sur ce plan, faites parallèlement à D, des génératrices horizontales du paraboloïde. Parmi ces projections celles des deux génératrices horizontales qui rencontrent D passent par la trace d de D sur le plan II. En menant de d les tangentes à la parabole P, on obtiendra ces deux projections et, par suite, les deux génératrices horizontales qui couperont D aux points cherchés.

D'ailleurs la parabole P est tangente aux projections, faites parallèlement à D, des droites A et B sur le plan II, en des points qui s'obtiennent par projection oblique des points de contact du paraboloïde avec les plans parallèles à D et passant respectivement par A et par B. On en conclut immédiatement le foyer et la directrice de la parabole et, par suite, les tangentes à cette courbe issues du point d.

G. FOURET.

Voir aussi F. J., *Exercices de Géométrie descriptive*. Dans la deuxième édition de 1884 (analysée *J. E.*, 1885, p. 117) la question est complètement étudiée pour chaque quadrique. Ce développement est reproduit dans la troisième édition de 1893 (n° 156). Au n° 173,



problème corrélatif : *Par une droite donnée mener un plan tangent à une quadrique quelconque.*

Les deux problèmes ci-dessus sont ensuite étudiés simultanément (n° 195).

Enfin, on trouve la monographie et plusieurs solutions du problème : *Déterminer l'intersection d'une droite et d'un ellipsoïde scalène* (n° 202). H. BROCARD.

3276. (**1907**, 198) (S. DE LA CAMPA). — Comme on sait, *le volume engendré par une surface plane quelconque, tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan, a pour mesure le produit de son aire par le cercle décrit par son centre de gravité.*

En représentant par θ l'angle formé par les diamètres conjugués D et D' de la demi-ellipse (E), la demi-ellipse (E_1), qui a pour axe le diamètre D, aura pour second axe $D_1 = D' \sin\theta$, et ces deux demi-ellipses auront des aires équivalentes ou égales à $\frac{\pi}{8} DD' \sin\theta$.

Or le centre de gravité de la demi-ellipse (E_1) se trouvant à la distance $g = \frac{2D_1}{3\pi} = \frac{2D' \sin\theta}{3\pi}$, de l'axe de révolution D, il en sera de même par rapport à la demi-ellipse (E); et, par suite, le volume de l'ellipsoïde de révolution, engendré par la demi-ellipse (E_1), tournant autour de l'axe D, sera égal au volume du solide pointu de révolution, engendré par la demi-ellipse (E), tournant autour du diamètre D.

Il est clair que $D' \sin\theta$ pourra être plus grand ou plus petit que D, et, par suite, le solide de révolution pourra être aplati ou allongé.

Observation. — On arrivera à des résultats analogues en considérant l'hyperbole et la parabole; mais dans ce cas on considère les aires limitées par les courbes et par des cordes, lesquelles peuvent même servir aussi d'axe de révolution. SCHIAPPA MONTEIRO.

Autre réponse de M. MALO.

Formulé suivant les notations usuelles, l'énoncé 3276 revient à dire que le volume engendré par la rotation d'une demi-ellipse de diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, autour du diamètre $2a'$ qui la limite, a pour expression

$$V = \frac{4}{3}\pi a'(b' \sin\theta)^2,$$

θ désignant l'angle des deux diamètres.

Cette formule s'obtient en appliquant le théorème général ci-après :

Lorsqu'on incline les ordonnées d'une surface génératrice, le nouveau corps de révolution V' *égale le premier* V *multiplié par le carré du sinus de l'angle d'inclinaison*

$$V' = V \sin^2\theta$$

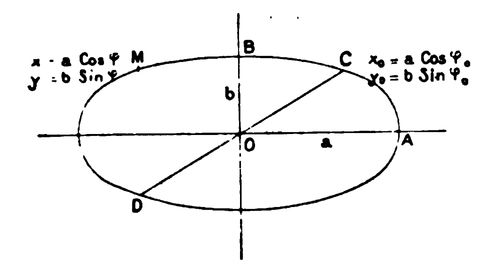
(*Appendice aux Exercices de Géométrie,* par F. I. C., 1877, p. 38, exerc. 34).

On pourrait, ajoute l'auteur, évaluer tout aussi simplement le volume engendré par un segment quelconque d'ellipse tournant autour d'un diamètre quelconque de cette même courbe. Il suffirait de le comparer au volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre quelconque, en tenant compte de la *réduction* et de l'*inclinaison* des ordonnées du segment elliptique par rapport aux ordonnées correspondantes du segment circulaire.

H. Brocard.

3277. (**1907**, 198) (S. de la Campa). — *Arcs d'ellipse.* — Soit

$$x = a\cos\varphi,$$
$$y = b\sin\varphi,$$



le point M cherché, milieu de l'arc $\widehat{CD}$, dont une extrémité C a pour coordonnées

$$x_0 = a\cos\varphi_0,$$
$$y_0 = b\sin\varphi_0;$$

on aura

$$\text{arc}\,\widehat{CM} = \text{arc}\,\widehat{AB}, \qquad \text{arc}\,\widehat{AM} = \text{arc}\,\widehat{AC} + \text{arc}\,\widehat{AB};$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\varphi} d\varphi\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi} = \int_0^{\varphi_0} d\varphi\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi}.$$

La transformation de ces intégrales est classique; en posant

$$\operatorname{sn} u = \cos\varphi, \qquad \operatorname{sn} u_0 = \cos\varphi_0,$$

$$k = \int_0^1 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)}}, \qquad 1 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = \alpha,$$

on a finalement

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \alpha u = \frac{\Theta'(u_0)}{\Theta(u_0)} + \alpha u_0 + \frac{\Theta'(k)}{\Theta(k)} + \alpha k,$$

d'où u, puis

$$x = a \operatorname{sn} u,$$
$$y = b \operatorname{cn} u.$$

P. Hendlé.

3311. (1907, 267) (Mehmed Nadir). — *Équations indéterminées.* — On sait que

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^2$$

et

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = (x^2+y^2-z^2)^2 + (2xz)^2 + (2yz)^2;$$

donc

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = (x^2+y^2+z^2)[(x^2+y^2-z^2)^2+(2xz)^2+(2yz)^2].$$

Par conséquent, il ne faut que poser

$$u = x, \qquad w = y, \qquad t = z,$$
$$u = y, \qquad w = x, \qquad t = z,$$
$$u = z, \qquad w = y, \qquad t = x,$$

ou

$$u = (x+y-z), \qquad s = 2xz, \qquad p = 2yz,$$
$$u = (x+y-z), \qquad s = 2xz, \qquad p = 2yz,$$
$$u = (x+z-y), \qquad s = 2xy, \qquad p = 2yz,$$

etc.

Nous pouvons donc prendre pour x, y, z trois nombres arbitraires, les autres inconnues seront représentées par ces mêmes nombres.

De même, on aura

$$(x^2+y^2+x^2)^5 = (x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2+z^2)^3,$$

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)^5 \\ = \quad & [(x^2+y^2-z^2)^2+(2xz)^2+(2yz)^2] \\ & \times [(x^3-3xz^2-2zy^2+xy^2)^2+(y^3-zx^2-zy^2+4xy^2)^2 \\ & + (z^3-3zx^2-2xy^2+2y^2)].\end{aligned}$$

En prenant pour x, y, z des nombres arbitraires, on représentera les autres inconnues par ces nombres. N. Plakhowo.

Il y a plusieurs méthodes générales. On peut résoudre

$$(fg)^5 = f^5 \cdot g^5 = (fg)^1 \cdot (fg)^4 = (fg)^2 \cdot (fg)^3.$$

Voici des exemples de ce dernier problème :

On a

$$(x^2 + ay^2)^2 = (x^2 - ay^2)^2 + a(2xy)^2,$$
$$(x^2 + ay^2)^3 = (x^3 - 3ay^2x)^2 + a(3x^2y - ay^3)^2$$
$$= (x^3 + axy^2)^2 + a(x^2y + ay^3)^2.$$

Soit donc à résoudre

$$u^5 = u^2 . u^3,$$

on aura

$$u = x^2 + z^2 + t^2,$$
$$u^2 = (z^2 + t^2 - x^2)^2 + (2xz)^2 + (2xt)^2,$$
$$u^3 = (x^3 - 3xz^2 - 3xt^2)^2 + (3x^2z - t^2z - z^3)^2 + (3x^2t - z^2t - t^3)^2$$
$$= (x^3 + xz^2 + xt^2)^2 + (x^2z + zt^2 + z^3)^2 + (x^2t + z^2t + t^3)^2$$
$$= (x^3 - 3xz^2 - 2zt^2 + xt^2)^2 + (t^3 - tx^2 - tz^2 + 4xtz)^2$$
$$+ (z^3 - 3zx^2 - 2xt^2 + zt^2)^2.$$

Consulter :

Legendre. — Théorie des nombres. t. I, p. 312.
Lagrange. — Œuvres, t. VII, p. 167.
Ed. Lucas. — Théorie des nombres, p. 128.

Application. — Soit

$$u = 41 = 6^2 + 2^2 + 1^2;$$

on aura

$$u^2 = 39^2 + 12^2 + 4^2$$
$$= 33^2 + 24^2 + 4^2$$
$$= 31^2 + 24^2 + 12^2,$$

$$u^3 = 246^2 + 82^2 + 41^2$$
$$= 222^2 + 119^2 + 74^2$$
$$= 214^2 + 151^2 + 18^2$$
$$= 214^2 + 150^2 + 25^2$$
$$= 218^2 + 146^2 + 9^2$$
$$= 206^2 + 126^2 + 103^2.$$

Euler (*Comment. Artih. Coll.*, t. II, p. 174, article du 13 janvier 1777) indique ces mêmes résultats et donne de plus

$$(x^2+z^2+t^2)^4 = [x^4 - 6x^2(z^2+t^2) + (z^2+t^2)^2]^2$$
$$+[(4xz)(-x^2+z^2+t^2)]^2+[(4xt)(-x^2+z^2+t^2)]^2.$$

Application :

$$\begin{aligned} N &= 41 = 6^2+2^2+1^2 = 5^2+4^2+0^2,\\ N^4 &= 41^4 = 241^2+744^2+1488^2\\ &= 264^2+497^2+1584^2\\ &= 312^2+936^2+1361^2. \end{aligned}$$

A. Gérardin.

Voici, à défaut de formule, un procédé :

On prend un nombre n, n'ayant que des facteurs premiers de la forme $8m+1$. Ce nombre est décomposable en une somme de trois carrés.

C'est une conséquence d'un théorème de Cauchy (*Œuvres*, 2e série, t. VI, p. 223).

On décompose n^5 en deux facteurs a et b. Ceux-ci sont aussi des sommes de trois carrés.

Ces différents carrés s'obtiennent par tâtonnements, en simplifiant les essais au moyen de diverses remarques de Cauchy, qui se trouvent dans le Volume cité. E. Dubouis.

Autre réponse de M. H. Brocard.

3317. (**1907**, 269) (Mehmed Nadir). — L'équation proposée devient, après quelques transformations,

$$(x+y)^2-(x-y)^2 = [(x+y)-(x-y-u)^2].$$

Posant

$$x+y=a \qquad \text{et} \qquad x-y=b,$$

on a à résoudre

$$a^2-b^2=[a-(b-u)^2]^2$$

et, tous calculs effectués,

$$(b-u)^4-2a(b-u)^2+b^2=0,$$

équation bicarrée dont on a les solutions

$$b - u = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}\right]$$

ou, en remplaçant a et b par leurs valeurs en fonction des inconnues,

$$u = x - y \mp [\sqrt{x} \pm \sqrt{y}].$$

On a donc le groupe des quatre relations

$$(1)\quad u_1 = x - y + (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} + 1),$$

$$(2)\quad u_2 = x - y + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1),$$

$$(3)\quad u_3 = x - y - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1),$$

$$(4)\quad u_4 = x - y - (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1).$$

Si dans la relation (1) on pose

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} + 1 = p, \qquad \sqrt{x} + \sqrt{y} = q;$$

d'où

$$u = pq,$$

on obtient, par addition et soustraction,

$$2\sqrt{x} + 1 = p + q, \qquad -2\sqrt{y} + 1 = p - q;$$

d'où

$$x = \left(\frac{p+q-1}{2}\right)^2, \qquad y = \left(\frac{p-q-1}{2}\right)^2.$$

La relation (2) donne le même résultat avec l'hypothèse

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1 = p \qquad \text{et} \qquad \sqrt{x} - \sqrt{y} = q.$$

Les relations (3) et (4) donnent, par le même procédé, la solution indiquée par M. Mehmed Nadir :

$$x = \left(\frac{p+q+1}{2}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad y = \left(\frac{p-q-1}{2}\right)^2$$

avec $u = pq$.

L'équation proposée admet donc deux systèmes de solutions.

Stenacensis.

Les nombres x et y étant supposés positifs, posons

$$xy = a^2, \qquad x + y = \lambda,$$

d'où

$$(x - y)^2 = \lambda^2 - 4a^2.$$

En extrayant les racines, l'expression pourra s'écrire

$$u^2 - 2u(x - y) + [\lambda^2 - 4a^2 - \lambda + 2a] = 0$$

dont le déterminant sera carré, d'où

$$\lambda - 2a = z^2.$$

Posons maintenant

$$x = y.\rho^2,$$

d'où

$$y(\rho - 1)^2 = z^2, \qquad y = h^2, \qquad a = h^2\rho,$$
$$x - y = h^2(\rho^2 - 1),$$
$$\lambda = h^2(\rho^2 + 1),$$
$$u = h(\rho - 1)[h(\rho + 1) \pm 1].$$

Soit

$$h(\rho - 1) \qquad = p,$$
$$h(\rho + 1) \pm 1 = q.$$

Éliminant h et tirant la valeur de ρ en fonction de p et q, on trouvera la solution demandée, les indéterminées étant affectées de $\pm$.

A. Gérardin.

Autres réponses de MM. E.-B. Escott et Welsch.

3318. (**1907**, 269) (C. Stéphanos) — *Sur une identité en Géométrie.* — L'identité en question a été utilisée dans le *Précis de Géométrie analytique* de M. G. Papelier (Vuibert et Nony, éditeurs), aux paragraphes 435 et 441.

Carevyge.

Dans les *Leçons sur la Géométrie* de Clebsch, recueillies par Lindemann, l'identité dont il s'agit est utilisée pour obtenir l'équation d'une conique à centre rapportée à ses axes (*voir* t. I, p. 7-9 de l'édition française. Gauthier-Villars, 1903).

Alessandro Terracini.

QUESTIONS.

3373. [V7] Que valait le pas du roi au moment où le gouverneur général des îles d'Amérique exposait au ministre la destination des cinquante pas réservés le long du littoral des Antilles (lettre du 8 février 1674)? G. Lemaire.

3374. [V] En Cochinchine, 50 pas géométriques valent 82^m d'après l'arrêté du 25 mai 1874 et 81^m d'après l'arrêté du 15 janvier 1903.

Que valent-ils en France? G. Lemaire.

3375. [D2bα] On demande une expression simple de $\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^3}$. E. Dubouis.

3376. [I2] On sait que toute fonction symétrique entière et à cofficients entiers des $n-1$ premiers nombres entiers, n étant premier, est divisible par n si son degré n'est pas multiple de $n-1$.

Je désirerais connaître un théorème général, concernant la divisibilité de la fonction par n dans le cas où son degré est multiple de $n-1$. E. Dubouis.

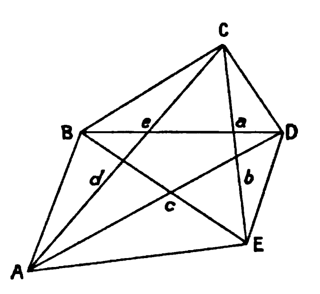
3377. [D6cδ] Existe-t-il une Table très étendue des nombres de Bernoulli successifs? E. Dubouis.

3378. [B1cα] Je désirerais connaître des remarques pouvant abréger le calcul d'un déterminant symétrique dont tous les éléments sont 0 ou 1. E. Dubouis.

3379. [I1] Je lis dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (T. I, Vol. 1, Note 47 de l'édition française) qu'un système de numération à base 11 est en usage chez des naturels de la Nouvelle-Zélande. Quelque correspondant pourrait-il me donner des notions plus précises sur ce point?

Je désirerais savoir notamment si ce système est employé avec exclusion de tout autre, ou s'il est appliqué seulement dans certains cas, comme nous faisons avec les douzaines et les grosses. G. Quijano (Xérès).

3380. [K9a] Si l'on trace les diagonales du pentagone quelconque ABCDE, on détermine un nouveau pentagone



abcde; si dans ce pentagone les diagonales sont aussi tracées, un nouveau pentagone sera déterminé et ainsi de suite. A la limite on trouvera un point.

Ce point a-t-il été étudié? En cas affirmatif, quelles sont ses propriétés principales? G. Quijano (Xérès).

3381. [K9α] Soient $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ les distances d'un point M aux sommets d'un polygone donné. L'expression

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 + \ldots + \alpha_n d_n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres connus, sera un minimum si l'on peut tracer un polygone dont les côtés soient proportionnels aux nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et paral-

lèles respectivement aux droites qui unissent le point M aux sommets du polygone donné.

Cette propriété est-elle connue? le point M vérifiant la condition énoncée a-t-il été étudié au moins pour des valeurs particulières de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$?

G. Quijano (Xérès).

3382. [**H7c**] Pourrait-on signaler tout au moins quelques solutions particulières de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

N'existe-t-il pas une formule permettant de déduire une solution d'une autre, ce qui permettrait peut-être d'utiliser la solution évidente

$$f = ax + by + c.$$

N'existe-t-il pas d'autre part une transformation ramenant l'équation proposée à une équation linéaire ?

A. Buhl.

3383. [**K10e**] Étant donnés un cercle de centre O et n points A, B, C, D, ... sur ce cercle, soit G leur barycentre : le segment $\overline{OG}$, prolongé de $\overline{n-1}$ fois sa longueur, conduit à un point O′, et en prenant le milieu I de $\overline{OO'}$, on pourra construire un polygone A′B′C′D′, ..., symétrique de ABCD, ..., par rapport à I, et par suite inscriptible dans un cercle centre de O′, égal au cercle donné (O).

La figure jouit de la propriété suivante :

Considérant un $(n+1)^{\text{ième}}$ point X, si l'on construit non seulement le point O′ (ou plutôt O'_X) relatif au polygone ABCD, ..., mais les points O'_A, O'_B, O'_C, O'_D, ..., relatifs aux n autres polygones BCD...X, ACD...X, ABD...X, ABC...X, etc., tous ces points seront sur un cercle égal au cercle (O) et formeront un polygone symétrique du polygone de $(n+1)$ sommets considéré, le centre de symétrie étant

sur la droite qui joint le point O au barycentre des $(n+1)$ points, et ce barycentre partageant la distance des centres dans le rapport de 1 à n; et ainsi de suite indéfiniment.

Le cas particulier de $n=4$ a été considéré (*I. M.*, **1894**, 151, question 279) sous la forme suivante : *Les orthocentres des triangles compris dans un quadrangle donné inscriptible au cercle forment un quadrangle symétrique du quadrangle donné par rapport au centre de l'hyperbole équilatère qui contient à la fois les huit points*; mais l'auteur de la question, M. Franel, n'a point indiqué l'inventeur du théorème (déjà connu ce me semble).

Je voudrais savoir si le théorème plus général énoncé ici et qui constitue une assez curieuse application de la géométrie du compas (et même de la géométrie du compas à ouverture constante, à condition qu'on procède à partir des triangles partiels) a été déjà signalé.

J'en possède une démonstration géométrique fort simple; néanmoins je verrais avec intérêt d'autres démonstrations de la même proposition. E. Malo.

3384. [**I 4** et **9**] A-t-on démontré le théorème suivant : *Pour tout nombre* D *qui n'est pas carré et qui dépasse une certaine limite* (*environ* 110), *il y a au moins un nombre premier* $p<\sqrt{D}$, *non facteur de* D, *dont* D *est résidu quadratique.*

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

3385. [**A1b**] Quelle est l'expression la plus générale de $X=ax^2+bx+c$, telle que X^3-X-1 soit divisible par x^3-x-1?

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

3386. [**H2c**] L'équation différentielle

$$y(y+1)dx^2-2xy\,dx\,dy+x(x+1)dy^2=0$$

a la solution

$$\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\beta y} + \sqrt{\gamma} = 0,$$

où α, β, γ sont trois constantes arbitraires dont la somme est nulle.

Comment trouver ce résultat autrement que par une vérification directe?

O. DEGEL (Bayreuth).
[D'après l'allemand. (LA RÉD.)]

3387. [**M²3**] Que sait-on des Haupttangenten-Kurven (courbes asymptotiques) des surfaces du troisième ordre?

O. DEGEL (Bayreuth).
[D'après l'allemand. (LA RÉD.)]

3388. [**I19a**] Le système

$$x^2 + y^2 = a,$$
$$\sqrt{4xy} = b$$

a-t-il des solutions entières, a et b étant des nombres entiers?

R. RAVASCO (Lisbonne).

3389. [**A1b**] Connaît-on l'identité suivante que j'ai trouvée, et qui a lieu quelles que soient les quantités α, β, γ, a_r et b_r :

$$
\begin{aligned}
& (a_1^2 + \alpha a_2^2 + \beta a_3^2 + \alpha\beta a_4^2 + \gamma a_5^2 + \alpha\gamma a_6^2 + \beta\gamma a_7^2 + \alpha\beta\gamma a_8^2) \\
+ & (b_1^2 + \alpha b_2^2 + \beta b_3^2 + \alpha\beta b_4^2 + \gamma b_5^2 + \alpha\gamma b_6^2 + \beta\gamma b_7^2 + \alpha\beta\gamma b_8^2) \\
= & (a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \beta a_3 b_3 + \alpha\beta a_4 b_4 + \gamma a_5 b_5 + \alpha\gamma a_6 b_6 + \beta\gamma a_7 b_7 + \alpha\beta\gamma a_8 b_8)^2 \\
+ & \alpha(a_1 b_2 - a_2 b_1 + \beta a_3 b_4 - \beta a_4 b_3 + \gamma a_5 b_6 - \gamma a_6 b_5 + \beta\gamma a_7 b_8 - \beta\gamma a_8 b_7)^2 \\
+ & \beta(a_1 b_3 - \alpha a_2 b_4 - a_3 b_1 + \alpha a_4 b_2 + \gamma a_5 b_7 - \alpha\gamma a_6 b_8 - \gamma a_7 b_5 + \alpha\gamma a_8 b_6)^2 \\
+ & \alpha\beta(a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1 - \gamma a_5 b_8 + \gamma a_6 b_7 - \gamma a_7 b_6 - \gamma a_8 b_5)^2 \\
+ & \gamma(a_1 b_5 - \alpha a_2 b_6 + \beta a_3 b_7 - \alpha\beta a_4 b_8 - a_5 b_1 + \alpha a_6 b_2 - \beta a_7 b_3 + \alpha\beta a_8 b_4)^2 \\
+ & \alpha\gamma(a_1 b_6 + a_2 b_5 - \beta a_3 b_8 - \beta a_4 b_7 - a_5 b_2 - a_6 b_1 + \beta a_7 b_4 + \beta a_8 b_3)^2 \\
+ & \beta\gamma(a_1 b_7 - \alpha a_2 b_8 - a_3 b_5 + \alpha a_4 b_6 + a_5 b_3 - \alpha a_6 b_4 - a_7 b_1 + \alpha a_8 b_2)^2 \\
+ & \alpha\beta\gamma(a_1 b_8 + a_2 b_7 + a_3 b_6 + a_4 b_5 - a_5 b_4 - a_6 b_3 - a_7 b_2 - a_8 b_1)^2.
\end{aligned}
$$

Comme cas particulier, en faisant $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on retrouve l'identité connue sur la décomposition en une somme de huit carrés du produit de deux quantités dont chacune est la somme de huit carrés.

Fabius Ferrari (Pavie, Italie).

3390. **[I19a]** Pour résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 + y^2 = 2z^2,$$

j'ai donné les identités suivantes :

$$(1)\quad [(p+3q)^2 - 2q^2]^2 + [(p+q)^2 - 2q^2]^2 = 2[(p+2q)^2 + q^2]^2.$$

$$(2)\quad [(p-3q)^2 - 2q^2]^2 + [(p+q)^2 - 2p^2]^2 = 2[(p-2q)^2 + q^2]^2.$$

Ces formules sont-elles connues?

A. Tafelmacher (Dessau).

3391. **[K4]** Construire un triangle, connaissant deux côtés et le rayon du cercle inscrit.

J. Diaz de Rabago (Chafarinas, Espagne).

[D'après l'espagnol. (La Réd.)]

3392. **[I18c]** Toute forme de degré m peut être rendue égale à une puissance, dont l'exposant est premier avec m :

$$\varphi_m \varphi_m^{mn} = \left(\varphi_m^{\frac{mn+1}{p}}\right)^p.$$

Exemple. — Trouver une solution de l'équation

$$x^4 - 2y^4 + z^4 = u^7.$$

Soit $x:y:z = 1:2:3$, on aura $\varphi_4 = 50$,

$$50^{20} = 5^{28}.864^4, \qquad 50^3 : 5^4 = 200,$$

$$864^4 - 2.1728^4 + 2592^4 = 200^7.$$

Ce théorème est-il connu?

A. Werebrusow (Théodosie).



RÉPONSES.

876. (**1896**, 175; **1906**, 84) (V. Retali). — Comme autre étude, non encore mentionnée, peut-être conviendra-t-il de signaler :

B. Igel. — Sur les courbes planes du troisième ordre à un point double (*M. A.*, VI, 1873, 10 p.). H. Brocard.

973. (**1897**, 6; **1906**, 162) (A. Boutin). — Réponse de M. Mehmed Nadir (Alep), transmise à l'auteur de la question.

La Rédaction.

1101. (**1897**, 149; **1907**, 265) (M.-R. de Montessus). — ***Fonctions à variation bornée.*** — D'après un article bibliographique (*B. D.*, 1904, 1re Partie, p. 180-183), je suis porté à croire que les éléments d'une réponse à cette question se trouveront dans l'Ouvrage de M. H. Lebesgue : *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1904. H. Brocard.

2098. (**1901**, 133) (H. Brocard). — ***Portraits de Mathématiciens.*** — Réponse de M. Plakhowo transmise à M. Brocard; M. Plakhowo signale des portraits de A.-M. Ampère, Chasles et L. Euler.

La Rédaction.

2224. (**1901**, 276) (P. Tannery). — Le magistral Ouvrage de M. G.-B. Halsted, récemment publié (***Rational Geometry***, 1907), me paraît, d'après l'analyse qui en a été donnée (*B. D.*, 1re Partie, 1907, p. 309-319), fournir les éléments d'une réponse aussi complète que possible au *desideratum* exprimé ici.

Pour plus de détails, voir *E. M.*, 1908, p. 97-111 : G.-B. Halsted, *La Sphérique non euclidienne* (trad. Barbarin).

H. Brocard.

2894. (**1905**, 73) (La Rédaction). — *Bibliothèque de prêts de Strasbourg.* — Ce service est encore en vigueur. Les personnes qui désirent en user doivent s'adresser au conservateur de la Bibliothèque de l'Université de Strasbourg. Elles reçoivent ensuite un questionnaire imprimé, à remplir, indiquant les formalités et les conditions du prêt d'Ouvrages. H. Brocard.

2903. (**1905**, 76) (E.-B. Escott). — *Équations indéterminées* (**1905**, 207; **1906**, 25, 115). — Réponse de M. Brocard, transmise à M. E.-B. Escott. La Rédaction.

2981. (**1905**, 268) (*Higrec*). — *Force nerveuse extériorisée.* — Réponse de M. Plakhowo transmise à M. *Higrec.* M. Plakhowo mentionne un appareil de M. l'abbé Fortin et une modification de cet appareil par un professeur de Physique de l'Université de Kasan, qui auraient peut-être quelque analogie avec le sthénomètre.

La Rédaction.

3006. (**1906**, 8) (G. Lemaire). — L'auteur de la question est seul juge de ce qu'il entend par opérateur peu versé en Mathématiques. Il me semble donc mieux que tout autre en situation de choisir les Ouvrages désirables. Il pourrait proposer cette question aux directeurs des journaux de Topographie (réponse 3178, **1907**, p. 167), ou bien se renseigner auprès du chef de la section de Géodésie du Service géographique de l'armée, chargé du cours public annuel (en 21 leçons, 140, rue de Grenelle) sur la théorie et la pratique de la Géodésie et des instruments de position. H. Brocard.

3007. (**1906**, 33) (E. Malo). — (**1906**, 133). — p étant premier impair et m un entier $< p-1$, la somme $\sum_{x=1}^{x=p-1} x^m$ est divisible par p.

Pour la démonstration, voir *J. E.*, 1893, p. 75-76. A. Matrot.

Dans une Note intitulée : *Quelques théorèmes d'Arithmétique*, [*B. B.*, (3), VII, 1884], E. Catalan attribue à Lionnet le principe d'une remarque analogue et de plusieurs autres qu'il énonce à la suite.

J'ignore si les démonstrations promises (*loc. cit.*) par E. Catalan ont paru dans ledit Recueil ou ailleurs.

L'article de Lionnet est intitulé : *Note sur la somme des puis-*

sances semblables de plusieurs nombres en progression arithmétique et sur quelques propriétés des nombres premiers (*N. A.*, 1842, p. 175-178). H. BROCARD.

3025. (**1906**, 59) (*Alauda*). — *Droite remarquable* (**1906**, 181). — Réponse de M. Paulmier intitulée : *Construction géométrographique des axes de l'ellipse centrale d'inertie de trois masses égales appliquées aux sommets* A, B, C *d'un triangle.* Cette réponse a été transmise à M. *Alauda.* LA RÉDACTION.

3026. (**1906**, 60) (G. LORIA). — (**1906**, 224; **1907**, 86, 181). — Le texte de J.-A. Serret (*Cours d'Algèbre supérieure,* 5ᵉ édit., 1885, t. I) est utile à rapporter ici.

Après avoir développé (p. 196-200) l'*Application de la théorie du plus grand commun diviseur à la recherche des solutions communes à deux équations à deux inconnues,* Serret termine en disant :

« Il était important d'éviter ces solutions étrangères introduites par la méthode du p. g. c. d. Labatie a fait connaître en 1832 un théorème que nous allons exposer et qui remplit cet objet de la manière la plus heureuse. »

Suit alors un article intitulé : *Théorème de Labatie* (p. 200-206).

Pour un résumé de la méthode, voir l'*Encycl. fr.-all. des Sc. math.*, t. I, Vol. **2**, *Algèbre,* p. 122-124 (E. Netto et R. Le Vavasseur). La note (p. 123) est particulièrement instructive : « Labatie (de Douai) : Méthode d'élimination par le p. g. c. d. entièrement rectifiée et appliquée... Paris, 1835. Une première édition (anonyme) signée L. avait paru à Paris en 1832 sous le titre : Méthode d'élimination par le p. g. c. d. »

Mais voici une indication qui permettra de parvenir au but : un certain Labatie (Anthide-Gabriel-M.), entré à l'École Polytechnique en 1807, âgé de 21 ans, retraité chef d'escadron d'artillerie en 1843. Ce pourrait être l'auteur des brochures de 1832 et 1835.

Il resterait, on le voit, à faire quelques investigations aux secrétariats de l'École Polytechnique de Paris et de la mairie de Douai.

H. BROCARD.

Autre réponse de M. PLAKHOWO.

3041. (**1906**, 89) (E. MALO). — (**1906**, 268). — On a encore iden-

tiquement

$$6(a^2+b^2+c^2+d^2) = (2a+b-c)^2 + 2(a+c-b)^2 + 3(b+c)^2 + 6d^2.$$

MATHIEU.

3074. (**1906**, 142) (G. LEMAIRE). — (**1907**, 36). — Je ne connais pas de traduction d'Ouvrages de M. N. Jadanza et je crois qu'il n'en a pas été fait.

Un grand nombre d'articles de ce savant relatifs à l'Optique, à la Topographie, à la Géodésie, ont paru depuis 1885 dans les *Atti della Accad. d. Sc. di Torino*. La liste complète serait trop longue pour trouver place ici.

Il existe aussi dans le même Recueil plusieurs notes de M. Fr. Porro sur des sujets d'Astronomie. L'auteur est sans doute apparenté à la famille du constructeur naturalisé français (*Rép.* **2964**, **1906**, 120).

M. Salmoiraghi s'est fait connaître par les perfectionnements qu'il a apportés à la construction du tachéomètre Porro (D'ALMEIDA et R. GUIMARAES, *Topogr.*, t. II, p. 284-285).

M. N. Jadanza a publié *Tavole tacheometriche sessagesimale*, Torino, 1900.

H. BROCARD.

3075. (**1906**, 142) (G. LEMAIRE). — *Ouvrage de Crelle.* — Réponse de M. Brocard transmise à M. Lemaire. M. Brocard mentionne le *Traité de Nivellement*, etc., de Breton de Champ (Paris, 1848).

LA RÉDACTION.

3076 et 3077. (**1906**, 142) (E.-N. BARISIEN) (*Rép.* 3076, **1907**, 22, 92; *Rép.* 3077, **1907**, 36, 93). — Questions déjà anciennes. Cauchy a formulé sur les facteurs de $(a+b)^n - a^n - b^n$ un théorème qui, en réalité, s'applique aux facteurs de $x^n + y^n + z^n$ lorsque $x+y+z=0$.

Voir *C. R.*, t. IX, 1839, p. 360, et Note sur quelques théorèmes d'algèbre dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, 1841, p. 137-144.

Le sujet a été repris par Cayley, Muïr, Todhunter, Wolstenholme et J.-W.-L. Glaisher (*Mess. of Math.*, 1878, et *Q. J.*, 1878), etc.

H. BROCARD.

Autre réponse de M. MATHIEU, communiquée à M. Barisien.

LA RÉDACTION.

3086. (**1906**, 185) (H. de Vries). — Je ne puis préciser l'origine et la signification de *perspective cavalière,* mais je pense que, pour l'historique de cette dénomination, il sera intéressant de rappeler quelques témoignages s'y rapportant.

Dans l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert, au mot *Perspective* (1778), le chevalier de Cuzel a cherché à établir les distinctions à faire entre la perspective proprement dite, la perspective militaire et la perspective cavalière.

Dans l'Ouvrage d'Allain Manesson Mallet, intitulé *Les Travaux de Mars* ou *l'Art de la Guerre,* etc. (Paris, 1685), il est dit (t. I, p. 155) que « l'on peut représenter les plans des places régulières avec quelque élévation, par de simples lignes qui sont perpendiculaires ou parallèles entre elles, et que les ingénieurs appellent perspective cavalière, et les peintres, à veuë d'oiseau ».

P. 166, il rappelle que « le chevalier Antoine de Ville, dans son livre de *Fortifications,* imprimé à Lyon en l'année 1628, a donné plusieurs plans de son invention, dont quelques-uns sont elevez sur les règles de la perspective cavalière ».

La perspective cavalière paraît avoir été employée à quelques figures de la *Fortification* de Jean Errard, de Bar-le-Duc, 1619-1622.

H. Brocard.

3090. (**1906**, 186) (R. Guimaraes). — *Trisection de l'angle* (**1907**, 107, 277). — Pour l'histoire de ce problème, *voir* la *Notice historique sur Ch. Hermite,* par M. G. Darboux (18 décembre 1905).

« Descartes et Newton n'avaient pas dédaigné de s'occuper de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Descartes en particulier en avait donné de belles solutions en employant seulement une parabole et un cercle. En réalité, c'est à un géomètre tout contemporain, à Wantzel dont j'ai déjà prononcé le nom, que l'on doit, je crois, la première démonstration connue de l'impossibilité de résoudre ces deux problèmes à l'aide de la règle et du compas. »

La référence bibliographique n'a pas été indiquée, mais je l'avais rencontrée dans trois Notes de Terquem (*N. A.*, 1846, p. 648) : « Wantzel a rigoureusement établi que la trisection graphique de l'angle est impossible en ne prenant que les deux instruments admis par les anciens, règle et compas. » *Voir* aussi *Ibid.*, 1842, p. 328, et 1851, p. 349-350.

En fait, il s'agit du Mémoire de Wantzel : *Recherches sur les*

moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas (*J. M.*, t. II, 1837, p. 366-372).

Pour achever de préciser la bibliographie du sujet, consulter F. KLEIN, rédact. J. Griess, 1896, *Problèmes de Géométrie élémentaire*, où sont indiquées les recherches de Richelot et de Hermes, rappelées ici par M. *Belga*. Je ne m'explique pas d'avoir omis de signaler ce paragraphe, que j'avais pourtant bien des fois remarqué.
H. BROCARD.

3091. (**1906**, 187) (L. GODEAUX). — *Problème de Malfatti* (**1907**, 43). — Ne connaissant pas la bibliographie rédigée par M. Derousseau, je signale à tout hasard :

FR.-G. AFFOLTER. — *B. D.*, t. VIII, 1875.

E. CATALAN. — Note sur le problème de Malfatti.

A. CAYLEY. — Analytical researches connected with Steiner's extension of Malfatti's problem, 1852.

A. DESBOVES. — Questions de Trigonométrie (Malfatti, Desboves, Schellback) et questions de Géométrie (Steiner).

M. SIMONS. — Sur le problème de Malfatti.
G. LEMAIRE.

3141. (**1907**, 6) (*Arcitenens*). — *Tables de nombres premiers.* (**1907**, 116, 139, 224). — Voir *Messenger of Mathematics*, Vol. XXXVI et XXXVII, 1907, où se trouvent environ 400 grands nombres premiers ($> 9.10^4$) pour la plupart récemment constatés par le lieutenant-colonel Allan Cunningham et M. H.-S. Woodall.

Volume XXXVI.

Pages.	Forme de p.	Limites.	Nombre de p.
169	$p = (x^4 + y^4)$	9.10^6 à 2.10^9	22
169	$p = \frac{1}{2}(x^4 + y^4)$	9.10^6 à 225.10^8	18
171	$p = \frac{1}{\mu}(x^4 + y^4)$	9.10^6 à 94.10^7	113
172	$p = \frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}(x^4 + y^4)$	9.10^6 à 110.10^7	106
173	p ou $2p = (x^8 + y^8)$	9.10^6 à 101.10^7	4
173	p ou $2p = \frac{1}{\mu}(x^8 + y^8)$	22.10^6 à 503.10^6	17

VOLUME XXXVII.

82	$p = \frac{1}{\mu}(2^\alpha \mp 2^x \mp 1)$	9.10^6 à 7.10^8	117
82	»	$> 2.10^9$	6

ALLAN CUNNINGHAM (Angleterre).

3149. (**1907**, 25) (E. MAILLET). — I. Une étude de S. Realis intitulée : *Développements sur quelques théorèmes d'Arithmétique* (*N. A.*, 1879, p. 500-509) paraît autoriser à admettre que la démonstration annoncée (*loc. cit.*, p. 507) pour la proposition que tout nombre entier est la somme de quatre carrés (ou d'un nombre moindre) aurait bien pu satisfaire au programme défini dans l'énoncé 3149. J'ignore si cet article a été repris et achevé. Toutefois, une des dernières lettres de Realis (19 septembre 1885) nous a été conservée et contient de précieuses indications. Elle a été publiée par les soins de M. G. de Longchamps (*J. E.*, 1886, p. 87-91) en souvenir de Realis, décédé le 12 février 1886.

Realis a donné en cette lettre des commentaires et des formules qui pourront contribuer à l'étude proposée. Il a rappelé en même temps son article de 1879 (*N. A.*, p. 500) et deux autres antérieurs (*N. A.*, 1873, p. 212, et 1878, p. 331).

II. Pour le théorème sur les cubes, je rencontre une formule de Libri :

$$M = \left(\frac{M + 48q^3}{24q^2}\right)^3 + \left(\frac{M - 48q^3}{24q^2}\right)^3 - \left(\frac{M}{24q^2}\right)^3 - \left(\frac{M}{24q^2}\right)^3,$$

où les cubes peuvent être ramenés à des valeurs positives.

H. BROCARD.

3162. (**1907**, 29) (E.-N. BARISIEN). — *Quadrilatère inscriptible* (**1907**, 186; **1908**, 67). — Réponse complémentaire de M. Plakhowo transmise à M. Barisien. LA RÉDACTION.

3169. (**1907**, 50) (E.-N. BARISIEN). — *Système d'équations indéterminées*

$$x + y + z = u + v + w,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

(**1907**, 200, 227). — On peut dire que toutes les solutions indiquées sont des solutions particulières. La solution suivante est la solution générale.

Le système donné est équivalent au suivant :

$$(1) \qquad x + y + z = u + v + w,$$

$$(2) \qquad xy + yz + zx = uv + vw + wu.$$

C'est un problème analogue à celui que j'ai proposé sous le numéro **2844** (**1904**, 361).

Soit

$$x + y + z = 3S,$$

et faisons la substitution :

$$(3) \qquad \begin{cases} x = x' + S, & u = u' + S, \\ y = y' + S, & v = v' + S, \\ z = z' + S, & w = w' + S. \end{cases}$$

Les équations deviennent

$$(4) \qquad x' + y' + z' = u' + v' + w' = 0,$$

$$(5) \qquad x'y' + y'z' + z'x' = u'v' + v'w' + w'u'.$$

D'après (4),

$$z' = -(x' + y'), \qquad w' = -(u' + v');$$

substituant dans (5),

$$(6) \qquad x'^2 + x'y' + y'^2 = u'^2 + u'v' + v'^2.$$

La solution de la question ne dépend plus que de (6).

Une solution évidente est

$$x' = -u', \qquad y' = -v', \qquad z' = -w'.$$

Les formules de M. Grigorief donnent

$$\begin{array}{ll} x' = -(b + c), & u' = -c, \\ y' = b, & v' = -b, \\ z' = c, & w' = b + c \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} x' = b' + c', & u' = -(b' + c'), \\ y' = -b', & v' = b', \\ z' = -c', & w' = c'. \end{array}$$

Les solutions de MM. Grigorief, Mathieu, Boutin, Brocard, Mehmed Nadir, la seconde solution de M. Dujardin et celle de M. Gérardin rentrent dans le type indiqué. On aura toutes les solutions comme il suit : on prend un nombre N quelconque ne contenant que des facteurs des espèces suivantes : 1° des facteurs premiers de la forme $6n+1$; 2° le facteur 3; 3° des facteurs communs à x', y', z', u', v', w' et qui soient carrés parfaits.

On représente N de toutes les manières possibles sous la forme

$$x^2 + xy + y^2,$$

en remarquant par exemple que

$$4N = (2x+y)^2 + 3y^2.$$

De toute solution (x, y, z, u, v, w) ainsi obtenue on déduira d'autres solutions, en observant que

$$(\alpha x + \beta, \alpha y + \beta, \alpha z + \beta, \alpha u + \beta, \alpha v + \beta, \alpha w + \beta)$$

est aussi une solution.

Note. — Si, pour une solution, $x + y + z$ n'est pas divisible par 3, soit

$$S = x + y + z,$$

et

$$3x = x' + S, \qquad 3u = u' + S,$$
$$3y = y' + S, \qquad 3v = v' + S,$$
$$3z = z' + S, \qquad 3w = w' + S;$$

on peut opérer comme ci-dessus.

Exemple. — Soit

$$N = 91 = 7 \times 13:$$

$$91 = 9^2 + 9.1 + 1^2 = 6^2 + 6.5 + 5^2,$$

d'où

u'	v'	w'	x'	y'	z'
9	1	−10	11	−5	−6
			10	−1	−9
			6	5	−11;

soit

$$u = -2u' + 27, \qquad x = -2x' + 27,$$
$$v = -2v' + 27, \qquad y = -2y' + 27,$$
$$w = -2w' + 27, \qquad z = -2z' + 27;$$

on a les trois solutions de M. L. Dujardin.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3171. (**1907**, 50) (E.-N. Barisien). — *Problème rélatif à trois boules* (**1907**, 203). — Nouvelle réponse de M. Quijano contenant la démonstration de la dernière formule indiquée dans sa précédente réponse (**1907**, 209). La Rédaction.

3178. (**1907**, 51) (G. Lemaire). — *Journaux français de Topographie* (**1907**, 167). — Il est à présumer que le *Journal des Géomètres*, organe officiel de la Société des Géomètres de France, mensuel, fondé en 1848, s'occupe de Topographie.

On pourra se renseigner à Benais (Indre-et-Loire), où il paraissait encore en 1896. H. Brocard.

3325. (**1908**, 6) (E.-N. Barisien). — *Courbes telles que l'aire comprise entre la courbe et ses asymptotes soit finie*. — Parmi ces courbes, il convient de citer celles étudiées par M. H. Wieleitner dans un récent article paru dans *Monatshefte für Mathematik und Physik* (1907, p. 132) et intitulé : *Ueber zwei Familien von rationalen Kubiken*. J. Rose.

La question coïncide à peu près avec la question **1860** (**1900**, 163; **1901**, 181) du même auteur.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

Aux six courbes douées d'asymptotes rectilignes, mentionnées dans l'énoncé, il conviendra d'ajouter la liste d'une vingtaine d'autres courbes algébriques ou transcendantes, ayant reçu des noms particuliers en raison de l'intérêt qui s'attache à leur étude et à leurs propriétés. Plusieurs ont une aire finie limitée à l'asymptote. Il faudrait donc au moins épuiser cette nouvelle série, ce qui n'exigera qu'un peu d'attention. *Recta*.

Extrait d'une réponse de M. *Picpus*.

Exemples : Les deux cubiques

$$y = kx\sqrt{\frac{a-\lambda x}{b+\mu x}}, \qquad y = \mathrm{A}\sqrt{\frac{a-\lambda x}{b+\mu x}},$$

dont on sait calculer l'aire. La première donne comme cas particu-

liers :

Courbes.	Valeurs de k.	a.	λ.	b.	μ.
La cissoïde droite........................	1	0	-1	b	-1
La strophoïde droite.....................	1	a	1	a	1
Le folium de Descartes..................	1	a	1	a	3
La trisectrice de Maclaurin..............	$\sqrt{3}$	a	1	a	3
La *visiera* (G. Peano, *Appl. geom. del calcolo infin.*, Turin, 1887, p. 87)......	$\sqrt{2}$	a	1	$-a$	2

La deuxième donne la *versiera* ou courbe d'Agnesi pour

$$A = a, \qquad \lambda = 1, \qquad b = 0, \qquad \mu = 1.$$

Picpus.

Soit, en coordonnées cartésiennes, $y = ax + b$ l'équation d'une asymptote non parallèle à Oy (pour les asymptotes parallèles à Oy on raisonnera de même sur x et y au lieu de y et x). La condition nécessaire et suffisante pour que l'aire de la branche correspondante, jusqu'à $+\infty$ par exemple, soit finie, c'est que l'intégrale

$$\int_c^\infty (y - ax - b)\, dx$$

ait une valeur finie (c fini convenable).

Soient $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe, $v = \frac{1}{x}$, $u = y - ax - b$; on a $f(v, u) = 0$; il suffira *en général*, en particulier quand $F = 0$ est algébrique, que la courbe $f = 0$ en coordonnées cartésiennes v, u ait, à l'origine, l'axe des v pour tangente, car alors u sera un infiniment petit d'ordre supérieur à v, pour v infiniment petit. Si l'on voulait préciser dans des cas très généraux, il suffirait de consulter, pour les calculs à faire, par exemple :

E. Pruvost, *Géométrie analytique*, t. I, p. 306, Paris, Dupont, 1888; Serret, *Alg. sup.*, t. I, 5e édition, p. 613, Paris, Gauthier-Villars, 1885; C. Jordan, *Cours autographié d'Analyse de l'École Polytechnique*, 1re année, 1903-1904, p. 223 et suivantes.

Ainsi, F étant algébrique et l'asymptote simple, $y - ax - b$ a un développement $\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots$ (Serret); la condition nécessaire et suffisante est $\alpha_1 = 0$.

E. Maillet.

3326. (1908, 27) (E.-N. BARISIEN). — *Probabilité pour qu'un nombre écrit ou pensé soit premier.* — Soient N un nombre, P la quantité ou totalité de nombres premiers qui le précèdent. La probabilité que N soit premier est évidemment $\frac{P}{N}$, ou mieux $\frac{2P}{N}$, en ayant soin que N soit impair, puisque les nombres pairs doivent être écartés.

En réalité, la question se réduit à évaluer le nombre P. C'est sur quoi l'on trouvera d'amples indications dans des articles de la *N. C.*, *Sur la fréquence et la totalité des nombres premiers* (1879, p. 1-7, 33-39, 65-71, 113-117, 263-269; 1880, p. 255-263, 481-488, 529-542), et notamment dans la monographie très complète de M. G. TORELLI, *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato* (Napoli, 1901, in-folio de VIII-215 pages, 1 pl.).

Le problème est résolu provisoirement par les formules remarquablement approchées d'Encke, de Legendre, de Gauss, de Tchebychef, de Cesaro, etc.

La probabilité demandée s'évalue directement dans les limites des Tables; elle est de 0,246 pour les nombres impairs $< 10^4$; elle serait de 0,132 pour les nombres impairs voisins de 10^7. Elle diminuerait un peu au delà. *Voir* la Table qui termine l'Ouvrage de M. Torelli.

Vieujeu.

La probabilité qu'un nombre N choisi au hasard (par exemple le nombre écrit dans le système sénaire en lançant n fois de suite un dé ordinaire et écrivant successivement les points amenés soit de droite à gauche, soit de gauche à droite) n'est pas divisible par 2 est manifestement $\frac{1}{2}$; celle qu'il n'est pas divisible par 3 est $\frac{2}{3}$; celle qu'il n'est pas divisible par 5 est $\frac{4}{5}$, etc.; celle qu'il n'est pas divisible par le nombre premier p est $\frac{p-1}{p}$; enfin celle qu'il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ..., ni par p, est

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{p-1}{p}.$$

Il est clair que la probabilité qui vient d'être calculée a un certain rapport avec la probabilité que le nombre N soit premier, encore que cette dernière probabilité présente quelque obscurité dans la

définition. La probabilité de la non-divisibilité par 2, 3, 5, ..., p, simultanément, d'abord plus grande que la probabilité que N soit premier, finit par être plus faible; il y a donc un certain choix de p pour lequel la confusion des deux probabilités peut se faire avec le moins de chance d'erreur. Il semble plausible que la valeur la plus favorable de p soit la plus grande de celles qui ne surpassent pas $\sqrt{N}$; mais on ne saurait espérer d'obtenir en cette manière autre chose qu'une première approximation; c'est au surplus tout ce que demande l'auteur de la question 3326.

J'ai voulu faire une application des considérations qui précèdent en prenant $p = 97$, d'où

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{96}{97} = 0,1200\ldots.$$

Or, par les Tables de nombres premiers on trouve qu'il tombe :

Entre	10 001	et	10 100........	11	nombres premiers
»	10 021	»	10 120........	11	»
»	10 041	»	10 140........	11	»
»	10 061	»	10 160........	14	»
»	10 081	»	10 180........	13	»

la moyenne est précisément de 12 nombres premiers pour 100 nombres consécutifs.

E. Malo.

La formule connue (*voir* Tchebycheff, *Journal de Liouville*, 1852)

$$y = \frac{x}{lx - 1,08366},$$

qui donne très approximativement le nombre des nombres premiers inférieurs à x, donne pour la probabilité demandée

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{lx - 1,08366}.$$

A. Boutin.

Autres réponses de MM. Delannoy et Quijano.

3332. (1908, 28) (*Ixe*). — *Bibliographies diverses.* — 1° *Méthode des moindres carrés.* — La bibliographie de ce sujet exigerait un long développement. Pour aller au plus pressé, j'indiquerai seulement quelques noms.

A.-M. Legendre (1811); C.-F. Gauss (1821); P.-S. Laplace (1847); L. Bouvier (1848); I.-Y. Bienaymé (1850); A. Cauchy (1853); Biver (1853); J. Zech (1857); M. Jullien (1858); E. Ritter, 1858; F. Hultmann (1860); W. von Freeden (1863); R. Henke (1868); J.-W.-L. Glaisher (1873); F. Minding (1873); A.-R. Mees (1875); H. Faye (1875); Geer (1875); L. Natani (1875); W. von Rudiger (1876); C. Niven (1878); E. Catalan (1878); F.-R. Helmert (1880); J.-P. Gram (1881); P. Mansion (1885); A. Steinhauser (1889); P. Tchebychef (1891); H. Poincaré (1902).

Applications à la Géodésie :

P.-A. Hansen. — Von der Meth. der kl. Quad. im Allgemeinen u. in ihrer Anwend. auf die Geodäsie, 1867. — Fortgesetzte geodät. Unters. bestehend in 10 Supplem. zur Abhandl. von der Meth. der kl. Quadr. im Allgem. auf die Geodäsie, 1868.

F.-R. Helmert. — Die Ausgleichungsrechnung nach der Meth. der kl. Quadr. mit Anwend. auf die Geodäsie, 1872 et 1880-1884 (et aussi 1907).

O. Koll. — Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Meth. der kl. Quadr. mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen, 1903.

Applications à la Topographie :

E. Hegemann. — Uebungsbuch für die Anwendung der Ausgleichsrechnung nach der Meth. der kl. Quadr. auf die prakt. Geometrie, 1903.

2° *Application des fonctions elliptiques à la Géodésie :*

J. Houel. — Recueil de formules et de Tables numériques, 3e éd., 1885, p. LXIII-LXV.

G.-H. Halphen. — Traité des fonctions elliptiques, IIe partie, 1888. Ch. VII. Problèmes de Géodésie.

3° *Application des Mathématiques à l'Artillerie :*

A. Projets de bouches à feu (Cours des Écoles de Metz et de Fontainebleau).

B. Balistique intérieure et Balistique extérieure.

A.-M. Legendre, 1782; F. Français, an XIII, 1805; C.-J. Jacobi, 1842; J. Didion, 1848; J.-B. Welter, 1867; M. de Sparre, 1875; A.-G. Greenhill, 1882 et 1886; Hélie, 1884; F. Siacci, 1892; A. Morel, 1904; P. Charbonnier, 1907.

C. Questions diverses. *Voir* **1906**, p. 121, rép. **2973**.

L.-N. Machaut.

Autres réponses de MM. Plakhowo et Rose.

3335. (**1908**, 29) (A. Simionov). — *Courbe superposable ou identique à sa développée.* — Question résolue sous le n° **2345** (**1903**, 69; **1903**, 195, 220).

Le Mémoire de Puiseux est intitulé: *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes* (*J. M.*, t. IX, 1844, p. 377-399).

Bibliographie sommaire. — Jean Bernoulli; Maupertuis (1728); L. Euler (1750 et 1787); Gergone; Puiseux (1844); Haton de la Goupillière (1875 et 1877); G. Pirondini (1886); G. Loria (*Spezielle, etc., Curven*, 1902, p. 622).

Recta.

Puiseux a effectué (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. IX, p. 377) la détermination de la courbe semblable directement ou inversement à sa $n^{\text{ième}}$ développée.

J'ai moi-même (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1877) étendu la question à la $n^{\text{ième}}$ développoïde prise sous n angles arbitraires successifs. (Rapport de Puiseux, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXI, 30 août 1875).

Ces problèmes dépendent de l'intégration d'équations d'ordre n aux *différences mêlées* finies et infiniment petites.

Haton de la Goupillière.

Voir Tisserand, *Exercices de Calcul infinitésimal*, p. 259.

Dubouis.

3337. (**1908**, 30) (A. Simionov). — *Divergence de la série formée par les inverses des nombres premiers.* — Euler a signalé que le produit

$$\Pi = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{a_n}\right),$$

où a_n représente le $n^{\text{ième}}$ nombre premier, tend vers zéro (et par voie de conséquence que la suite des nombres premiers est illimitée) parce que l'inverse de ce produit, qui est de la forme

$$\Sigma\, 2^\alpha\, 3^\beta\, 5^\gamma \ldots a_n^\lambda,$$

tend à se confondre avec la série harmonique (qui est divergente) lorsque l'indice n augmente indéfiniment, et, d'autre part, reproduirait nécessairement et intégralement cette série, si, n étant limité, il n'y avait qu'un nombre fini et déterminable de nombres premiers.

Or, en prenant les logarithmes, on obtient la série

$$\begin{aligned}-\log \Pi = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}\right)\\ +\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{a_n^3}\right)\\ +\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots+\frac{1}{a_n^4}\right)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

dont la somme, pour n croissant, grandit indéfiniment, et il est facile de voir que cela a lieu exclusivement du fait du premier terme. Soit, en effet,

$$\Pi' = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right);$$

on aura

$$\begin{aligned}\log \Pi' = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}\right)\\ +\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{a_n^3}\right)\\ -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots+\frac{1}{a_n^4}\right)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et par différence

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\log \Pi\Pi' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}\right)\\ +\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots+\frac{1}{a_n^4}\right)\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

quantité finie puisque l'inverse de $\Pi\Pi'$, pour n indéfiniment croissant, a pour limite la série convergente

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots.$$

Cette observation suffit, du moment que les sommes

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\ldots+\frac{1}{a_n^m}\right)$$

vont en décroissant à mesure que m grandit, quel que soit n. J'ajoute seulement qu'il est aisé d'établir que la croissance de la somme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

est beaucoup plus lente que celle de $\log n$. E. MALO.

Ce résultat est donné par Tchebycheff (*Journal de Liouville*, 1852), avec d'autres analogues ; ainsi, la série

$$\sum \frac{1}{p\,llp}$$

est divergente, tandis que les séries

$$\sum \frac{1}{p\,lp} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{p\,l^2(lp)}$$

sont convergentes. A. BOUTIN.

On trouvera une démonstration, semblable à celle indiquée par M. E. Malo, dans V.-A. LE BESGUE, *Exercices d'Analyse numérique*, Paris, 1859, p. 139. E. MAILLET.

Voir LEGENDRE, *Théorie des nombres*, t. II, 3e édit., p. 68.
DUBOUIS.

Autre réponse de M. *Vieujeu*.

3339. (**1908**, 31) (*Steerman*). — *Sommation des séries*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

Du développement de $\sin x$ en produit infini on déduit, par dérivation,

$$x\cot x = 1-\sum_{1}^{\infty}\frac{2x^2}{n^2\pi^2-x^2} = 1-\sum_{1}^{\infty}\frac{2x^2}{n^2\pi^2}+\frac{2x^4}{n^4\pi^4}+\ldots\Big)$$

$$= 1-2\left(\frac{s_2x^2}{\pi^2}+\frac{s_4x^4}{\pi^4}+\frac{s_6x^6}{\pi^6}+\ldots\right),$$

si

$$s_p = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$$

En comparant avec l'autre formule connue

$$x \cot x = 1 - \left(\frac{4 B_2 x^2}{2!} - \frac{4^2 B_4 x^4}{4!} + \frac{4^3 B_6 x^6}{6!} - \ldots \right),$$

on déduit

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p}} = \left(-1\right)^{p-1} \frac{2^{2p-1} B_{2p} \pi^{2p}}{1.2.3\ldots.2p}.$$

Donc le calcul de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^k}$ est possible pour toutes les valeurs de k paires. En particulier $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

En ce qui concerne s_p pour p impair, on n'est pas encore parvenu à exprimer cette somme. On connaît seulement des tranformations en séries plus convergentes, qui permettent un calcul numérique rapide.

Ainsi, $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots = 1,2020569031595942854\ldots.$ (*voir*, par exemple, Markoff, *C. R.*, 1889, p. 16-12, et Stieltjes, *Acta mathematica*, 1887). J. Rose.

Autre réponse de MM. Boutin et Hendlé.

On a sans doute déjà évalué $\sum \frac{1}{n^n}$, car on obtient aisément 8 à 10 décimales exactes, $\sum \frac{1}{n^n} = 1,29126\ldots.$

Quant aux séries $\sum \frac{1}{n^2}, \ldots, \sum \frac{1}{n^k}$, elles ont été étudiées à diverses reprises. *Voir* questions **201** (**1894**, 100; **1894**, 220; **1895**, 45, 344) et **2053** (**1901**, 83; **1901**, 270; **1902**, 75).

Voir aussi : V. Lebesgue, (*N. A.*, 1859, p. 82-84); J.-W.-L. Glaisher (*Q. J.*, t. XXV, 1893). *E. Liminon.*

On trouve le calcul de la valeur de $\sum \frac{1}{n^{2p}}$ par la méthode signalée par M. J. Rose dans C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1882, p. 140.

E. Maillet.

Voir *Œuvres de Cauchy*, t. 6, p. 411. Dubouis.

Autre réponse de M. Paulmier.

QUESTIONS.

3393. [I 2b] Déterminer les nombres premiers p tels que $(p^2-1)^2$ ait quatre diviseurs de la forme $px+1$, avec $x<p$. Je n'ai trouvé que les suivants :

$p=29$,	$x=1, 6, 11, 27$,
$p=71$,	$x=1, 9, 19, 69$,
$p=239$,	$x=1, 16, 41, 237$,
$p=3191$,	$x=1, 57, 666, 3189$,
$p=60761$,	$x=1, 247, 1559, 60759$,
$p=2370059$,	$x=1, 1540, 17821, 2370057$,
$p=6679639$,	$x=1, 2585, 35531, 6679637$.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3394. [V 9 et 10] Je serais reconnaissant aux mathématiciens qui voudraient m'envoyer des renseignements complétant ceux qui sont indiqués dans l'article : *Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven* de l'*Encyclopédie mathématique allemande*, t. III, C. 2, p. 161 à 256). A. Grévy.

3395. [H 5] Quelle est la solution générale de l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$x^{2n}\frac{d^n y}{dx^n}\pm k^2 y=0\,?$$

Elle admet la solution particulière $y=x^{n-1}e^{\frac{\alpha}{x}}$ pour

$$(-1)^n\alpha^n=\mp k^2.$$

La connaissance d'une telle intégrale particulière peut-elle être mise à profit dans la recherche de l'intégrale générale?

W. GAEDECKE (Berlin).

3396. [V9 et 10] Existe-t-il ou doit-il paraître bientôt dans quelque journal une liste des nombreuses publication mathématiques de H. Laurent, récemment décédé? Je serais heureux en particulier de savoir si l'Institut des Actuaires français s'occupe de la question.

Anonyme.

3397. [A3j] 1° Comment trouver les valeurs de x_1, x_2, ..., x_n satisfaisant aux $(n-1)$ équations

$$\begin{aligned} A_1 x_1 \quad + \ldots + A_n x_n \quad &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ A_1 x_1^{n-1} + \ldots + A_n x_n^{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

A_1, A_2, ..., A_n étant donnés?

2° Quelle est la condition pour que les n équations

$$\begin{aligned} A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ A_1 x_1^n + \ldots + A_n x_n^n &= 0 \end{aligned}$$

admettent un système de solutions en x_1, x_2, ..., x_n?

3° Mêmes questions que les précédentes, relatives aux systèmes

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \ldots + \quad x_n \quad &= 0, \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + \quad A_n x_n^2 \quad &= 0, \\ A_1^2 x_1^3 + A_2^2 x_2^3 + \ldots + \quad A_n^2 x_n^3 \quad &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ A_1^{n-2} x_1^{n-1} + \ldots + A_n^{n-2} x_n^{n-1} &= 0 \end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \ldots + \quad x_n \quad &= 0, \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + \quad A_n x_n^2 \quad &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ A_1^{n-1} x_1^n + \ldots + A_n^{n-1} x_n^n &= 0. \end{aligned}\right.$$

A. PELLET.

3398. **[F8f]** Soient les courbes

1° $$a^2(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2)=(a^2-b^2)^2b^2x^4,$$

2° $$a^2(b^2x^2+a^2y^2)^3=b^6x^4(a^2-b^2)^2.$$

On demande d'exprimer les coordonnées x, y d'un point quelconque de ces courbes en fonctions elliptiques (fonctions de Weierstrass) d'un paramètre u et de déterminer l'élément d'arc. W. Gaedecke (Berlin).

3399. **[X2]** Je serais heureux de voir confirmer l'exactitude des nombres suivants :

sin 1° = 0,01745 24064 37283 51281 94189 78516,
sin 1′ = 0,00029 08882 04563 42459 63742 97416,
sin 1″ = 0,00000 48481 36811 07636 78200 79091,
cos 1° = 0,99984 76951 56391 23915 70115 58814,
cos 1′ = 0,99999 99576 92025 32795 12624 87173,
cos 1″ = 0,99999 99999 88247 78473 04740 76218,

que j'ai calculés avec soin.

G. Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

3400. **[V9]** M. Collet, doyen de la Faculté de Grenoble, et le colonel Laussedat font le plus grand éloge du *Handbuch der Vermessungskunde* du Dr W. Jordan.

Peut-on espérer qu'un mathématicien et un éditeur de bonne volonté donneront bientôt, en langue française, une traduction de cet Ouvrage?

G. Lemaire (Rachgia, Cochinchine).

3401. **[O2]** On considère une courbe fermée dont l'aire est C et dont l'aire de sa développée est D. Chacune des bissectrices de l'angle formé par une tangente et une normale à la courbe enveloppe une courbe dont l'aire semble être une fonction des aires C et D.

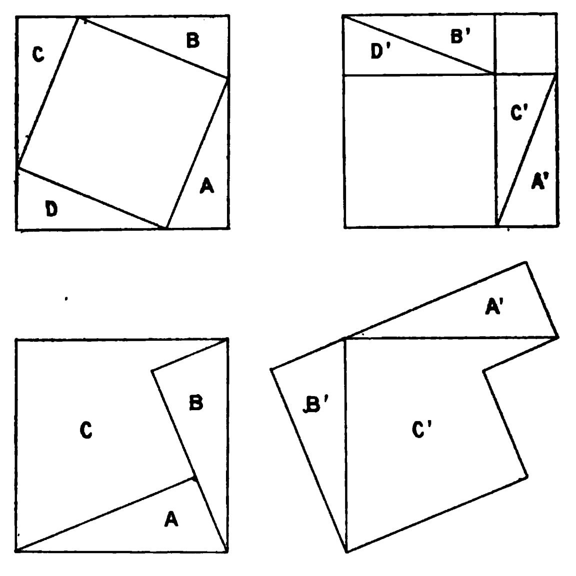
Ma supposition est-elle fondée? Ou peut-on spécifier les cas où elle l'est? E.-N. Barisien.

3402. [D2b] Je désirerais une démonstration directe de l'identité suivante :

$$\frac{1}{m+1} = 1 - \frac{m}{1.2} + \frac{m(m-1)}{1.2.3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4} + \ldots$$

que je trouve par voie indirecte. MATHIEU.

3403. [K1] A qui sont dues les deux démonstrations suivantes du théorème de Pythagore :



Agnès Morri.

3404 [I2bα] M. Jolivald (1904, 98) construisait en 1904 un appareil servant à décomposer les nombres en facteurs premiers, et pratique jusqu'à un milliard. Cet appareil est-il terminé? A. GÉRARDIN.

3405. [I19c] Il n'y a pas d'autres sommes égales de deux cubes que celles données dans la question 2980 (1905,

268). Ces formules donnent donc la solution de l'équation

$$x^3+y^3=x'^3+y'^3=x''^3+y''^3=x'''^3+y'''^3,$$

identique avec

$$\begin{aligned}(M\psi-\omega\varphi^2)^3&+(-M\varphi+\omega\psi^2)^3\\ &=(N\psi-\omega\varphi^2)^3+(-N\varphi+\omega\psi^2)^3\\ &=[-(M+N)\psi-\omega\varphi^2]^3+[(M+N)\varphi+\omega\psi^2]^3\end{aligned}$$

(**1904**, 288).

A. Werebrusow (Théodosie, Crimée).

3406. **[I18]** Connaît-on la formule suivante pour n impair :

$$(x+y+z)^n=x^n+y^n+z^n+n(x+y)(x+z)(y+z)\,M,$$
$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3\,(x+y)(x+z)(y+z)?$$

A. Werebrusow (Théodosie, Crimée).

3407. **[D2b]** J'ai trouvé les sommations suivantes :

$$S_1=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}+(n+1)x^n$$
$$=\frac{(n+2)x^{n+1}-\left(\dfrac{x^{n+2}-1}{x-1}\right)}{x-1},$$

$$S_2=1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\ldots+(n-1)^2x^{n-2}+n^2x^{n-1}+(n+1)^2x^n$$
$$=\frac{(n+1)^2x^{n+3}-(2n^2+6n+3)x^{n+2}+(n+2)^2x^{n+1}-x-1}{(x-1)^3}.$$

Je désire obtenir aussi la sommation

$$S_3=1+2^3x+3^3x^2+\ldots+(n-1)^3x^{n-2}+n^3x^{n-1}+(n+1)^3x^n$$

et, en général,

$$S_p=1+2^px+3^px^2+\ldots+n^px^{n-1}+(n+1)^px^n.$$

Je trouve encore la sommation des séries suivantes lorsque $x>1$:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\ldots=\frac{x}{(x-1)^2},$$
$$\frac{1}{x}+\frac{2^2}{x^2}+\frac{3^2}{x^3}+\frac{4^2}{x^4}+\ldots=\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Peut-on avoir, en général, la somme de la série

$$\frac{1}{x} + \frac{2^n}{x^2} + \frac{3^n}{x^3} + \frac{4^n}{x^4} + \ldots ?$$

Onponale.

3408. [A2b] Comment résoudrait-on par des procédés élémentaires, c'est-à-dire sans faire intervenir de dérivées, la question suivante :

Parmi tous les parallélépipèdes rectangles dont les diagonales ont la même longueur, quel est celui de surface maximum? *Anonyme.*

3409. [I2b] La proposition :

Pour reconnaître si un nombre p est premier, on peut lui ajouter successivement les carrés des $\frac{p-1}{2}$ premiers nombres 1, 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$; *si le premier des nombres ainsi formés qui soit lui-même le carré d'un nombre est*

$$p + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

le nombre p est premier,

est-elle bien posée?

Car en supposant $p = 9$, on a pour $p + 1^2, p + 2^2, p + 3^2, p + 4^2$, les nombres 10, 13, 18, 25, mais 9 n'est pas un nombre premier. *Anonyme.*

3410 [I 2bα] Le *Journal de Mathématiques* (Liouville), 2ᵉ série, t. II, 1866 (*Les nombres premiers de* 100 000 001 *à* 100 001 169, par W.-B. Davis), donne une liste de 99 nombres premiers. Or 8 de ces nombres sont composés d'après M. le lieutenant-colonel Allan Cunningham (**3141**, **1908**, 139). Nous serions désireux de connaître ces nombres.

Ceci constituera en même temps une nouvelle réponse à **2855** (**1904**, 285). A. Gérardin.

RÉPONSES.

206. (**1894**, 102) (G. Houssin). — *Ouvrages de Géométrie* (**1894**, 205; **1895**, 51; **1899**, 108; **1900**, 51). Il faut mentionner encore l'Ouvrage de R.-A. Proctor, *Sur la cycloïde;* l'auteur traite non seulement de la cycloïde, mais aussi de beaucoup d'autres courbes par la Géométrie élémentaire.

L'auteur se plaignit amèrement dans son Journal *Knowledge* de ce que son Livre ne trouvait pas d'acheteurs. Ceux qui ont vu l'Ouvrage en font de grands éloges.

G.-A. L'Hommedé (Los Angeles, Californie).

1093. (**1897**, 47; **1907**, 242) (Juan J. Duran-Loriga). — *Nombres pyramidaux, etc.* — On peut déduire les relations demandées en éliminant n entre les deux équations

$$x = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

et

$$y = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{k!}.$$

On a, en effet,

$$\frac{y}{x} = \frac{n+1}{n-k+1},$$

d'où

$$n = \frac{(k-1)y+x}{y-x}, \qquad n-1 = \frac{(k-2)y+2x}{y-x},$$

$$n-2 = \frac{(k-3)y+3x}{y-x}, \qquad \ldots, \qquad n-k+1 = \frac{kx}{y-x},$$

et conséquemment

$$(k-1)!\,(y-x)^k = [(k-1)y+x]\,[(k-x)y+x]\ldots[y+(k-1)x],$$

ou bien

$$(y-x)^k = \left(y+\frac{x}{k-1}\right)\left(y+\frac{2x}{k-2}\right)\cdots[y+(k-1)x].$$

G. Quijano (Xérès).

1110. (**1897**, 171; **1908**, 2) (DESPRATS). — *Volume commun à une sphère et à un ellipsoïde concentriques.* — Considérons la partie du volume comprise dans le trièdre positif.

1° $r < b$; une portion de calotte sphérique émerge seule au-dessus de l'ellipsoïde vers l'axe des z. La projection sur xy de la courbe limite de cette calotte est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{r^2 - x^2 - y^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Le volume de la calotte est la différence des cylindres ayant cette courbe pour base et arrêtés l'un à la sphère avec

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2},$$

l'autre à l'ellipsoïde avec

$$z_1 = c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

On a donc

$$V = \frac{\pi r^3}{6} - \int dx\,dy\,(z - z_1)$$

à l'intérieur de la courbe (1).

2° $r > b$; une portion de calotte ellipsoïdale émerge seule vers les x positifs.

La projection sur yz de la courbe limite de cette calotte est

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{r^2 - y^2 - z^2}{a^2} = 1. \tag{2}$$

Le volume de cette calotte est la différence des cylindres ayant cette courbe pour base et arrêtés l'un à l'ellipsoïde avec

$$x' = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}},$$

l'autre à la sphère avec

$$x'_1 = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}.$$

On a donc

$$V = \frac{\pi abc}{6} - \int dy\,dz\,(x' - x'_1)$$

à l'intérieur de la courbe (2).

Dans les deux cas, la première intégration est facile en appliquant

la formule connue

$$\int\sqrt{\alpha^2-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{\alpha^2-t^2}+\frac{\alpha^2}{2}\arc\sin\frac{t}{\alpha}.$$

Les limites de l'intégration laissent subsister seulement l'arc sin. Pour avoir V il reste à faire une quadrature. V. Aubry.

1124. (**1897**, 193; **1908**, 25) (E.-N. Barisien). — *Quadrature d'une courbe.* — L'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

étant rapportée à ses axes, le point S de la courbe C, correspondant à un point T (α,β) du cercle de Monge, a pour coordonnées

$$x=\frac{2a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}-\frac{a^2\alpha}{a^2+b^2},$$

$$y=\frac{2a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}-\frac{b^2\beta}{a^2+b^2}.$$

Posons

$$\frac{\alpha}{\cos\omega}=\frac{\beta}{\sin\omega}=\sqrt{a^2+b^2}\qquad\text{et}\qquad\operatorname{tang}\omega=z,$$

d'où

$$d\alpha=-\beta\frac{dz}{1+z^2},\qquad d\beta=\alpha\frac{dz}{1+z^2}.$$

L'aire demandée est donnée par l'intégrale

$$I=2\int_0^\pi\left(\frac{2a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}-\frac{b^2\beta}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{4a^2b^2c^2\alpha^2\beta}{(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)^2}+\frac{2a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}-\frac{a^2\beta}{a^2+b^2}\right)\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=2\int_0^\pi\left[\frac{8a^4b^4c^2\alpha^2\beta^2}{(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)^3}-\frac{2a^2b^2c^2\beta^2}{(a^2+b^2)(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)}+\frac{a^2b^2\beta^2}{(a^2+b^2)^2}\right]\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\frac{2}{a^2+b^2}\left[\int_0^\pi\frac{8a^4b^4c^2z^2\,dz}{(b^2+a^2z^2)^3}-\int_0^\pi\frac{2a^2b^2c^2z^2\,dz}{(1+z^2)(b^2+a^2z^2)}+\int_0^\pi\frac{a^2b^2z^2\,dz}{(1+z^2)^2}\right]$$

$$=\frac{2\pi}{a^2+b^2}\left[abc^2-2ab^2(a-b)+\frac{a^2b^2}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi ab}{a^2+b^2}(2a^2+2b^2-3ab).$$

Welsch.

M. *E.-A. Majol* obtient le même résultat par une méthode différente. La Rédaction.

1128. (**1897**, 194; **1908**, 26) (Droz-Farny). — **Étant donnés un triangle de référence ABC et le cercle circonscrit (O), la transformation isogonale remplace deux parallèles quelconques équidistantes du centre par deux coniques semblables circonscrites à ABC : pour quelle direction et quelle équidistance a-t-on deux coniques non seulement semblables, mais égales?**

Les transformées isogonales d'un faisceau de droites parallèles sont les coniques d'un faisceau admettant comme points fixes les sommets du triangle de référence et le point D du cercle circonscrit qui correspond au point à l'infini du faisceau rectilinéaire, point facile à construire et qu'on peut même se donner *a priori*. Les axes de ces coniques sont parallèles et leurs centres appartiennent à l'hyperbole équilatère (Υ) ayant pour centre le barycentre G des quatre points A, B, C, D, et passant : 1° par le point O; 2° par les points milieux des segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, etc.; 3° par le point O′, centre de l'hyperbole équilatère comprise dans le faisceau, symétrique de O par rapport à G; enfin, *les centres des coniques deux à deux semblables sont les extrémités des cordes conjuguées au diamètre* $\overline{OGO'}$.

Sur l'hyperbole équilatère, lieu des centres, il y a lieu de distinguer les arcs qui correspondent à des ellipses, ou bien à des hyperboles comprises dans l'angle aigu de leurs asymptotes, et les arcs qui correspondent à des hyperboles situées dans l'angle obtus de leurs asymptotes. Le théorème de *Faure,* d'après lequel *tout cercle circonscrit à un triangle autopolaire relativement à une conique coupe orthogonalement le cercle orthoptique de cette conique,* en donne le moyen : les arcs considérés sont, les premiers extérieurs, les seconds intérieurs au cercle (ω) circonscrit au triangle PQR, qui est l'unique triangle autopolaire commun à toutes les coniques du faisceau considéré. En outre, il est manifeste que tout cercle concentrique coupe l'hyperbole (Υ) en des points correspondant à des coniques ayant des cercles orthoptiques de même rayon.

Pour préciser davantage, la branche d'hyperbole qui contient le point O correspond exclusivement à des ellipses, l'autre branche exclusivement à des hyperboles; mais les arcs s'étendant entre les points O′ et P, d'une part, et depuis les points Q et R jusqu'à l'infini, d'autre part, donnent lieu à des hyperboles acutangles, les deux autres arcs à des hyperboles obtusangles.

En somme, pour la résolution du problème proposé, il faut et il

suffit que deux des quatre points d'intersection de l'hyperbole (Υ) avec l'un des cercles de centre ω aient le milieu de leur droite de jonction sur $\overline{OGO'}$. Or, il est clair que, lorsque le rayon du cercle de centre ω varie, les points qui sont les milieux des six droites de jonction que les points d'intersection déterminent deux à deux décrivent un lieu géométrique, rencontrant la droite $\overline{OGO'}$ en autant de points que l'indique l'ordre de ce lieu. Par conséquent, la direction des parallèles considérées est indifférente et *à chaque direction correspond un même nombre d'équidistances satisfaisant à la question* posée : ce nombre est tout ce qu'il s'agit encore de déterminer.

La méthode géométrique y parvient avec au moins autant de brièveté que le calcul algébrique : elle consiste à examiner les points communs au lieu géométrique cherché et à l'hyperbole (Υ). Ces points ne sauraient correspondre à une corde d'intersection de l'hyperbole et d'un cercle $(\omega)_x$ ayant une longueur finie, car une telle hypothèse reviendrait à admettre qu'on peut trouver sur l'hyperbole trois points en ligne droite. La corde est donc infiniment petite et appartient à une tangente commune de l'hyperbole et de l'enveloppe des cordes interceptées sur cette hyperbole par les cercles $(\omega)_x$, enveloppe dont le lieu cherché est une podaire. *Il n'y a, par suite, sur l'hyperbole que quatre points du lieu,* savoir les pieds des normales abaissées de ω sur la courbe, et ces points sont des points de traversée et non de contact : par conséquent, l'ordre du lieu étudié est 2, ce lieu est une conique. Quelques considérations supplémentaires simples, mais que j'omettrai, établissent que cette conique est l'hyperbole d'Apollonius du point ω relativement à l'hyperbole (Υ), passant en particulier par le centre de cette hyperbole. On a ainsi une solution, toujours imaginaire, correspondant au point G, et une deuxième solution, facile à construire, fournie par l'autre point d'intersection de l'hyperbole considérée avec la droite $\overline{OGO'}$.

E. MALO.

1149. (**1897**, 220; **1908**, 50) (LARONDE). — *Périodiques en langue tchèque.* — 1° Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky, publié aux frais de la Société mathématique *Iednota českých mathematiků,* à Prague.

2° Rozpravy české Akademie císarě Františka Iosefa provědy, slovesnost a umění, IIe classe (Sciences), Prague.

(Les Mémoires sont quelquefois traduits en grandes langues et publiés dans le *Bulletin de l'Académie tchèque de l'empereur François-Joseph Ier.*)

3° Vestník české Akademie císaře Františka Iosefa, etc. (Les Mémoires mathématiques y sont rares.)

4° Věstník královské české společnosti nauk (*Sitzungsberichte der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften*), publie les Mémoires en différentes langues, en particulier en langue tchèque et allemande. M. LERCH (Brünn).

Autre réponse de M. G. LEMAIRE.

1152. (**1897**, 221; **1908**, 51) (CESARO). — *Fonctions vérifiant l'équation*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{x+\nu}{n}\right).$$

La forme générale d'une telle fonction, tant qu'elle admet dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = 1$ un développement trigonométrique, est

$$A\left(\frac{1}{2} - x\right) + B \log|2 \sin x\pi|.$$

La démonstration élémentaire de ce fait, ainsi que la solution générale relative à l'intervalle infini, me paraît fort désirable.

M. LERCH (Brünn).

1440. (**1899**, 6) (E.-B. ESCOTT). — *Criterium pour qu'une équation cubique ait des racines commensurables.* — (**1899**, 204). *Voir* réponse à question 3306 (**1908**, 47).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

1622. (**1899**, 200) (JONESCO). — La question ne paraît pas exacte, car il semble qu'un nombre N étant renversé ne peut jamais être de la forme 9N.

Cela est évident pour un nombre de 2 chiffres.

Si N a 3 chiffres et de la forme xyz, on devra avoir

$$9(100x + 10y + z) = 100z + 10y + x,$$

ou

$$899x + 80y = 91z.$$

Or, le maximum du chiffre z étant 9, le second membre serait

alors 91 × 9 ou 819, qui est toujours inférieur au premier membre.

On verrait de même que la propriété est aussi impossible avec un nombre de 4, 5, 6, ... chiffres. E.-N. Barisien.

1972. (**1900**, 359) (H. Brocard, E. Maillet). — *Travaux sur la topologie des courbes et surfaces algébriques.* — De précieux renseignements nous sont donnés dans l'*Evanston Colloquium* de F. Klein (1893), dans le paragraphe XVI des *Problèmes* de D. Hilbert, traduct. Laugel, Congrès de Paris 1900, et dans le compte rendu de l'Ouvrage de Mlle V. Ragsdale (*B. D.*, 1re Partie, 1907, p. 266-267). Il suffira de transcrire les titres de ces divers documents.

1° *Pour les courbes algébriques planes :*

G.-K.-C. von Staudt. — Geometrie der Lage. 1847.

H.-G. Zeuthen. — Sur les différentes formes des courbes planes du 4e ordre (*C. R.*, t. LXXVII, 1873, p. 270).

H.-G. Zeuthen. — (Même titre) (*M. A.*, t. VII, 1874, 23 p., 2 pl.).

A. Harnack. — Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebr. Curven (*M. A.*, t. X, 1876, p. 189-198).

F. Klein. — Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebr. Curve (*Ibid.*, p. 199-209).

H.-G. Zeuthen. — Note sur les singularités des courbes planes (*Ibid.*, p. 210-220).

Brill. — Ueber Singularitäten ebener algebr. Curven und eine neue Curvenspecies (*M. A.*, t. XVI, 1880, p. 348-408).

D. Hilbert. — Ueber die reelle Züge algebr. Curven (*M. A.*, t. XXXVIII, 1891, p. 115-138).

Hulburt (*Amer. J. of Math.*, t. XX, 1892).

Mlle V. Ragsdale. — On the arrangement of the real branches of plane algeb. Curves, 1906.

2° *Pour les surfaces algébriques :*

H.-G. Zeuthen, F. Klein (*loc. cit.*).

Rohn. — Die verschiedenen Gestalten der Kummers'chen Fläche (*M. A.*, t. XVIII, 1881, p. 99-159).

Rohn. — Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gesteltung (*M. A.*, t. XXIX, 1887, p. 81-96).

H. Brocard.

2218. (**1901**, 274) (G. de Rocquigny) (**1902**, 183). — J'ai affirmé, à tort, que 36 et 225 n'étaient pas sommes de cinq carrés. Il n'en est

rien, car on obtient très facilement

$$36 = 16 + 9 + 9 + 1 + 1,$$

et

$$225 = 25 + 36 + 36 + 64 + 64,$$

ou encore

$$225 = 9 + 16 + 36 + 64 + 100.$$

Cela dit, observons que tout carré pair > 4 (ou le carré d'un hexagone pair) est une somme de cinq carrés (quest. 1875, **1900**, 195, résolue **1900**, 392).

Il resterait donc à étendre la proposition à la série des hexagones impairs > 1,

$$15, \quad 45, \quad 91, \quad \ldots, \quad (n+1)(2n+1).$$

Or, elle est vérifiée ci-dessus pour $15^2 = 225$.

On a ensuite, et aisément,

$$\overline{45}^2 = 2025 = 1 + 36 + 64 + 900 + 1024,$$
$$\overline{91}^2 = 8281 = 16 + 16 + 49 + 100 + 8100.$$

Ces résultats suffisent à établir la vraisemblance de la proposition énoncée. H. Brocard.

2604. (**1903**, 153) (E. Grigorieff). — Je trouve

$$263^4 + 2.43^4 = 257^4 + 2.121^4 = 4791188163.$$

Voir question 3155 (**1907**, 184).

A. Werebrusow (Théodosie, Crimée).

2895. (**1905**, 73) (*Nester*). — *Nomenclature de problèmes* (**1906**, 201). — On peut trouver des listes partielles dans les Ouvrages suivants :

1° Julius Petersen. — Méthodes et théories pour la solution des problèmes géométriques. Copenhagen, 1879.

I. Alexandroff. — Problèmes de Géométrie élémentaire. — Traduit du russe par D. Aitoff. Paris, Hermann, 1899.

2° T.-H. Eagles. — Constructive Geometry of plane curves. London, Macmillan and C°, 1885.

Cet Ouvrage contient 15 problèmes de construction de cercles,

24 problèmes de construction de paraboles, 60 problèmes de construction d'ellipses et d'hyperboles.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

2932. (**1906**, 87) (L.-E. Dickson). — *Divisibilité de* $p^{\frac{n}{\delta}} - 1$ *par* $d\left(p^{\frac{n}{d}} - 1\right)$, *δ étant un diviseur de d.* — J'ai adressé une solution de cette question à M. Dickson; elle a été publiée dans l'*American Mathematical Monthly*, t. XIII, 1906, p. 155-156.

Voici un résumé de mes résultats :

Soit $p^{\frac{n}{\delta}} = P$ et $d = \delta\alpha$. La question est la suivante :

Si $P^{\delta\alpha} - 1$ est divisible par $\delta\alpha$, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression $\frac{P^\alpha - 1}{\delta\alpha(P-1)}$ soit un entier?

1° α doit être divisible par e, c'est-à-dire par le plus petit entier, tel que $P^e - 1$ soit divisible par α_k, où α_k prend successivement les diverses valeurs des facteurs premiers de α qui ne divisent pas $P - 1$.

2° δ est un diviseur de $\frac{P^\alpha - 1}{\alpha(P-1)}$.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

2996. (**1906**, 6) (G. Lemaire). — (**1906**, 130). — D'une lettre de M. G. Lemaire j'extrais les remarques suivantes :

« Puisque la formule I de l'énoncé n'est pas explicitement attribuée à Waring, était-elle connue avant lui?

» Quant aux deux autres formules II et III, E.-E. Regneault (*Traité de Topog. et de Géod. forest.*, Nancy, 1844, p. 316 et 322) et Porro (*Ann. des P. et C.*, *Mém.*, t. IV, 1852, p. 357) les ont attribuées à Puissant. »

Je ne puis vérifier cette dernière information, mais, pour la première, je crois qu'elle est justifiée. Si la formule I n'est pas de Waring, elle doit pouvoir être attribuée à Roger Cotes. Cela resterait à élucider.

M. P. Mansion (*Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles*, t. V, 1881, p. 231-291, et *Supplément* à *Mathesis*, 1882) a publié *Sur l'évaluation approchée des aires planes* une notice qui débute par ces mots : « Il existe un grand nombre de formules pour le calcul ap-

proché des aires planes. La plus ancienne, dont l'idée première est due à Cotes et que Newton a insérée dans ses *Principes* (Livre III, lemme V), repose sur la substitution à la courbe donnée d'une parabole de degré n, ayant avec cette courbe $(n+1)$ points communs. »

La bibliographie du sujet pouvant entraîner trop loin, je me bornerai à rappeler *N. A.*, 1856, p 107-129 : C.-F. Gauss, Méthode de quadrature de Cotes (article de 1814). H. Brocard.

3082. (**1906**, 164) (G. Lemaire). — *Étymologie de théodolite* (**1907**, 40, 105). — *Voir :*

H.-C.-E. Martus. — Astronomische Erdkunde. 3. Aufl. Dresden, 1904, C.-A. Koch, p. 25.

Didolff. — Preussische Jahrbuecher, 1904, 116, p. 362-364.

La bibliographie est tirée de E. Haentzschel (*Grun. Archiv*, 3ᵉ série, t. XII, 1907, p. 85).

Voir aussi :

C. Reinhertz. — Geodaesie. Leipzig, 1899, G.-J. Goeschen, p. 53.

O. Degel (Bayreuth).

3084. (**1906**, 164) (*Neisirab*). — *Somme de trois carrés* (**1907**, 41, 106). — Réponse de M. O. Degel (Bayreuth), transmise à M. *Neisirab*. La Rédaction.

3129. (**1906**, 261) (Barisien). — *Somme de cubes*. — (**1907**, 112). — Ayant une solution

$$a^3+b^3+c^3=d^2,$$

on en aura une infinité par la formule

$$(a+\alpha x)^3+(b-\alpha x)^3+(c+x)^3=(d+\delta x)^2,$$
$$2d\delta=3[(a^2-b^2)\alpha+c^2],\qquad x=\delta^2-3[(a+b)\alpha^2+c].$$

Ainsi, de l'identité $(n^2)^3+0^3+0^3=(n^3)^2$ il vient

$$(ax^3y+b\beta^6y^4)^3-(ax^3y)^3-(3\beta^2x^2y^2)^3=(9\beta^3x^3y^3+c\beta^9y^6)^2,$$

où

$$a=6,\ 3,\ 2,\ 1,$$
$$b=1,\ 4,\ 9,\ 36,$$
$$c=1,\ 8,\ 27,\ 216,$$

Voici les plus petites solutions x, y, z, u :

$$\begin{array}{cccc} 3, & -1, & -1, & 5, \\ 3, & 2, & 1, & 6, \\ 3, & 3, & 3, & 9, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

A. Werebrusow (Théodosie, Crimée).

3177. (**1907**, 51) (G. Lemaire). — (**1907**, 166). — Étant donné que la notice biographique de 1853 est de Francœur fils, le fait que celui-ci a réédité les œuvres mathématiques de son père autorise à penser qu'il n'aurait pas manqué de publier ce qu'il aurait trouvé d'achevé dans les biographies de mathématiciens. Il est donc probable que ce travail est demeuré trop incomplet pour pouvoir être livré à l'impression.

Il serait intéressant de savoir si ces Notes manuscrites ont été conservées et si des extraits en ont été publiés dans quelque recueil biographique. H. Brocard.

3190. (**1907**, 75) (Nazarevsky). — *Sur le signe de*

$$(a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv \mathrm{A} \equiv \pm 1 \qquad (\text{mod. } p).$$

— On a

$$b \equiv x^2, \qquad (a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv \mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{b} \qquad (\text{mod. } p),$$

$$\mathrm{A} \pm \mathrm{B}x \equiv (a \pm x)^{\frac{p-1}{2}} \qquad (\text{mod. } p),$$

d'où, à cause de $\mathrm{B} = 0$,

$$(a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv \mathrm{A} \equiv (a \pm x)^{\frac{p-1}{2}} \qquad (\text{mod. } p),$$

c'est-à-dire : A sera $+1$ ou -1 selon que $a+x$ et $a-x$ seront tous deux des résidus ou des non-résidus quadratiques (mod. p).

Exemple :

$$(5+\sqrt{3})^6 \equiv \quad 1 \quad (\text{mod. } 13), \qquad \left(\frac{5+4}{13}\right) = \left(\frac{5-4}{13}\right) = \quad 1,$$

$$(2+\sqrt{3})^6 \equiv -1 \quad (\text{mod. } 13), \qquad \left(\frac{2+4}{13}\right) = \left(\frac{2-4}{13}\right) = -1.$$

Le caractère biquadratique de 10 est exprimé pour tous les cas

par la formule

$$\left(\left(\frac{10}{a^2+b^2}\right)\right) \equiv i^{\frac{-b(b+1)}{2}}(a^2+b^2)(a-bi)^2 \qquad (\text{mod. } 5).$$

A. WERERRUSOW (Théodosie, Crimée).

3199. (**1907**, 78) (G. LEMAIRE). — *Planimètre d'Amsler* (**1907**, 236). — Réponse de M. Gleizes communiquée à M. G. Lemaire.

LA RÉDACTION.

3201. (**1907**, 98) (BARISIEN). — *Enveloppes* (**1907**, 247). — Autre réponse de M. V. RETALI (Milan), communiquée à M. Barisien, et qui sera insérée ultérieurement si la place le permet. Autre réponse de M. *Picpus*.

LA RÉDACTION.

3210. (**1907**, 101) (E. LEBON). — (**1907**, 254). — Voir *M.*, 1883, p. 104-105 (divisibilité par 7, 13, 17, 19, 37, 43, 67), et E. GELIN, *Caractères de divisibilité* (*M.*, 1892, p. 65-74, 93-99) avec applications à 13, 17, 19, 23, 29, 31, 43, 47, 53, 59, 83, 113, 131, 151, 229, 263, 571, 673, 811.

Une Table synoptique, p. 99, renferme 246 décompositions relatives à 86 nombres premiers, dont, entre autres, 37, 41, 73, 101, 137, 239 et 271 cités dans l'énoncé.

H. BROCARD.

3225. (**1907**, 124) (H. LAURENT). — *Intégrale*. (**1907**, 256). — La réponse annoncée se trouve établie avec tous les développements nécessaires dans le *Casopis pro pestování math. a fys.*, t. XXXVII, p. 225-230. Il n'y a pas de tirages à part.

M. LERCH (Brünn).

3229. (**1907**, 126) (*Nester*). — *Équation*

$$(n^2+1)(5n^2+1) = r^2$$

(**1907**, 257). — Si n est fractionnaire l'équation se réduit à

$$x^4+18x^2y^2+y^4 = z^2,$$

ce qui est impossible.

A. WERERRUSOW (Théodosie, Crimée).

3235. (**1907**, 147) (*Crut*). — *Intégrales définies*. — Réponses de MM. DUBOUIS et ESCOTT, communiquées à M. *Crut*. — M. Dubouis

remarque que la première intégrale est infinie et calcule la deuxième par application du théorème des résidus de Cauchy. (*Voir*, par exemple, le *Cours autographié d'Analyse de l'École Polytechnique*, où l'on trouvera tous les éléments pour pousser les calculs jusqu'au bout.) La réponse de M. Escott traite aussi complètement la question.

LA RÉDACTION.

Autre réponse de M. WELSCH.

3247. (**1907**, 169) (*Arcitenens*). — *Nombres sommes de deux carrés* (**1908**, 18). — Réponse de M. FABIO FERRARI (Pavie), transmise à M. *Arcitenens*.

LA RÉDACTION.

3248. (**1907**, 169) (E.-N. BARISIEN). — (**1908**, 68). — Réponse de M. A. SCHIAPPA MONTEIRO (Lisbonne), transmise à M. Barisien.

LA RÉDACTION.

3258. (**1907**, 173) (NAZAREVSKY). — *Quadrilatère.* — Soit

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad \alpha + \beta = \varphi.$$

En projetant le périmètre sur une perpendiculaire à BC, on obtient

$$a \sin\alpha = b \sin\varphi + c \sin\delta.$$

Par analogie, on a

$$a \sin\beta = d \sin\varphi + c \sin\gamma.$$

Donc $\frac{b}{a}$ et $\frac{d}{a}$ sont des fonctions linéaires de $\frac{c}{a}$.

Par les aires, on obtient

$$\sin\omega \sqrt{d^2 + a^2 - 2da\cos\alpha}\sqrt{b^2 + a^2 - 2ba\cos\beta} = ad\sin\alpha + bc\sin\gamma.$$

On prend a pour unité, on élimine b et d, et il vient pour c l'équation irrationnelle

$$\sin\omega\sqrt{PQ} = R\sin\varphi,$$

en posant

$$P = c^2\sin^2\gamma + 2c\sin\alpha\sin\gamma\cos\varphi + \sin^2\alpha,$$
$$Q = c^2\sin^2\delta + 2c\sin\beta\sin\delta\cos\varphi + \sin^2\beta,$$
$$R = \sin\alpha\sin\beta - c^2\sin\gamma\sin\delta.$$

DUBOUIS.

Autres réponses de MM. QUIJANO et WELSCH, transmises à M. Nazarevsky.

3262. (**1907**, 174) (E. Lefèvre). — Pour aider, me semble-t-il, à une solution de cette question, je pense que l'on trouvera à tirer parti des indications données par J. Liouville dans deux articles intitulés : *Sur l'équation aux différences partielles*

$$\frac{d^2 \log\lambda}{dx\,dy} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0,$$

parus au *J. M.*, 1853, p. 71-72, et aux *C. R.*, 1853, t. XXXVI, p. 371-373.

H. Brocard.

3266. (**1907**, 194) (E.-B. Escott). — (**1908**, 20). — *Extrait d'une réponse de M. M. Plancherel.*

Le théorème en question est extensible à toute conique; il s'énonce :

C *étant le milieu d'une corde* AB *d'une conique,* KL *et* MN *deux droites quelconques passant par* C, *coupant la conique aux points* K, L, M, N, *les droites* KM, LN *coupent* AB *en deux points* D, E *tels que* DC = CE. (Ici la démonstration.)

Le théorème dualistique correspondant s'obtient par simple traduction :

Par un point C *quelconque on mène une corde conjuguée au diamètre* OC *d'une eonique de centre* O. A *et* B *étant deux points quelconques sur cette corde, on mène par ces points les tangentes à la conique. Désignons par* A_1, A_2 *et* B_1, B_2 *les points de contact.* D *et* E *étant les intersections de* AA_1, BB_1 *et* AA_2, BB_2, *les droites* CD, CE, CO, CA *forment un faisceau harmonique.*

En particulier, si la conique se réduit à un cercle, CO *et* CA *étant perpendiculaires, l'angle* DCE *a pour bissectrice* CO.

Le théorème est immédiatement extensible aux coniques sphériques.

Michel Plancherel.

3268. (**1907**, 195) (E.-B. Escott). — L'exercice proposé dans l'Ouvrage cité a peut-être été donné d'improvisation, après avoir constaté que les termes, considérés isolément, sont inférieurs à l'unité, ce qui donne à penser que la série est convergente ; mais en réalité elle est divergente, car le rapport d'un terme au précédent est > 1. La question est donc à modifier.

H. Brocard.

3271. (**1907**, 196) (Paulmier). — *Courbe d'ombre* (**1908**, 22). — *Voir:*

1° Le *Traité de Stéréotomie* de A. Leroy, 4e édition, 1866, p. 24 à 26;

2° Le *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique,* par Mannheim, 1880, p. 101 à 104.

H. Lez.

3278. (**1907**, 198) (E.-N. Barisien). — *Théorèmes sur les normales à la parabole.* — Réponse de M. E. Malo, transmise à M. Barisien.

La Rédaction.

3281. (**1907**, 218) (E.-B. Escott). — *Séries.* — Le terme général de la série cherchée sera

$$u_n = a_0 + a_1 n(n-1) + a_2 n(n-1)(n-2)(n-3) + \ldots + a_k \frac{n!}{(n-2k)!} + \ldots,$$

a_0, a_1, a_2, ... étant des nombres quelconques.

En effet, les deux premiers termes sont égaux et leur différence sera nulle; les quatre premiers sont les valeurs successives d'une fonction du second degré et leur différence troisième sera nulle, et ainsi de suite.

Quijano (Xérès).

3282. (**1907**, 218) (G. Petit-Bois). — Soit AB le segment rectiligne fixe, de longueur l; une solution immédiate est représentée par les deux ensembles suivants :

I. Dans le plan : 1° toutes les droites D parallèles à AB ; 2° toutes les circonférences passant par les points A et B.

II. Dans l'espace : 1° toutes les droites D de l'espace, parallèles à AB, et les plans passant par AB et par les droites D; 2° toutes les sections, par des plans menés par AB, de toutes les sphères passant par les points A et B.

Note. — En traçant une branche de courbe asymptote à une droite D, soit d'un côté, soit de l'autre, on se rend compte de la difficulté ou de l'impossibilité de courbes à branches infinies, car l'arc intercepté serait toujours différent de la longueur l interceptée sur la droite D.

H. Brocard.

3283. (**1907**, 219) (*Trinitario*). — J'ignore s'il existe une construction du rayon d'un cercle où l'on puisse inscrire un polygone de côtés

donnés a, b, ..., l. Je ne connais de solution de ce problème que pour le quadrilatère (problème de Sturm).

Voir *E. M.*, 1901, p. 285-295 : F. Redl, *Nouvelles formules pour les fonctions trigonométriques des angles d'un quadrilatère.*

En particulier, pour le quadrilatère supposé inscriptible, voir *J. E.*, 1897, p 53-54 : Lecocq, *Relations métriques et trigonométriques entre les éléments linéaires et angulaires du quadrilatère inscrit complet.* H. Brocard.

Le problème n'est pas résoluble en général par la règle et le compas. En effet, si tous les côtés sont égaux, le problème équivaut à diviser la circonférence en un nombre quelconque de parties égales.

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sont les côtés donnés, le rayon R du cercle vérifiera l'équation

$$\arcsin \frac{a_1}{2R} \pm \arcsin \frac{a_2}{2R} \pm \ldots \pm \arcsin \frac{a_n}{2R} = k\pi,$$

ou bien

$$\sin\left(\arcsin \frac{a_1}{2R} \pm \arcsin \frac{a_2}{R2} \pm \ldots \pm \arcsin \frac{a_n}{2R}\right) = 0.$$

On peut facilement mettre cette équation sous forme algébrique et rationnelle en développant le premier membre et en faisant disparaître ensuite les radicaux de la forme $\sqrt{1 - \frac{a_i^2}{4R^2}}$.

Les différentes valeurs de R données par cette équation correspondent aux formes différentes que le polygone peut avoir.

Quijano (Xérès).

3286. (**1907**, 219) (*Trinitario*). — *Partage d'un polygone.* — La division en n parties équivalentes pèut se ramener à $(n-1)$ divisions en deux parties proportionnelles à des nombres donnés.

Ce dernier problème est résolu dans E.-E. Regneault, *Traité de Topographie et de Géodésie forestières* (Nancy, J. Troup, 1844, p. 335). G. Lemaire.

Autre réponse de M. Brocard.

3290. (**1907**, 220) (E.-B. Escott). — Exemples de l'équation de Pell $x^2 - \Delta y^2 = 1$, où, dès la solution fondamentale, le nombre y admet en commun avec le module Δ un diviseur premier de la forme $4m + 3$.

Je trouve :

Pour $\Delta = 75 = 3.25$,	$x = 26$,	$y = 3$,
$\Delta = 78 = 2.3.13$,	$x = 53$,	$y = 6 = 2.3$,
$\Delta = 321 = 3.107$,	$x = 215$,	$y = 12 = 4.3$,
$\Delta = 327 = 3.109$,	$x = 217$,	$y = 12 = 4.3$,
$\Delta = 2387 = 7.11.31$,	$x = 342$,	$y = 7$,
$\Delta = 2415 = 3.5.7.23$,	$x = 344$,	$y = 7$,
$\Delta = 14619 = 3.11.443$,	$x = 1330$,	$y = 11$,
$\Delta = 14663 = 11.31.43$,	$x = 1332$,	$y = 11$,
....		

E.-A. Majol.

3292. (**1907**, 221) (G. Lemaire). — Les erreurs relevées aux Tables de logarithmes de Schrön ont été assez régulièrement signalées dans les *N. A.*

Exemples (au hasard) : 1873, p. 528; 1878, p. 96; 1881, p. 240; 1885, p. 109 et 573; 1886, p. 208; 1887, p. 502, etc.

Je suis tout prêt à les réunir.

Pour les Tables de Callet, *voir* E. Lefort et J. Houël, *N. A.*, 1858, 2e Partie, p. 41-45.

H. Brocard.

3293. (**1907**, 221) (Paulmier). — *Ombre de piédouche* (**1908**, 34). — Autres réponses de MM. J.-G. Alvarez Ude (Saragosse), H. Brocard et F. Michel, communiquées à M. Paulmier. M. Brocard reproduit un passage des *Notes du Cours de Géométrie de Mannheim* en 1866, où la question est traitée.

La Rédaction.

3294. (**1907**, 222) (Paulmier). — *Intersection de deux cônes* (**1908**, 35). — Autre réponse de M. J.-G. Alvarez Ude (Saragosse), communiquée à M. Paulmier.

La Rédaction.

3296. (**1907**, 243) (*Arcitenens*) (**1908**, 41). — Réponse de M. Dubouis communiquée à M. *Arcitenens.*

La Rédaction.

3297. (**1907**, 243) (*Picpus*). — *Équation indéterminée* (**1908**, 41). — Autres réponses de MM. Escott, Mehmed Nadir (Alep), Plakhowo (Russie), A. Schiappa Monteiro (Lisbonne), communiquées à M. *Picpus.*

La Rédaction.

3298 (**1907**, 243) (E. Lemoine). — *Division d'une droite* AB *en trois parties égales* (**1908**, 43). — Je m'abstiens d'employer l'équerre et j'obtiens de la manière suivante la simplicité 16 : Cercle (1)

de centre A et de rayon AB. Cercle (2) de centre B, même rayon. Points d'intersection C et D. Droite (3) BD. Cercle (4) de centre D et de même rayon que les autres. E point de rencontre du cercle (4) et de BD. Droite (5) CE. Intersection F de CE et AB. On porte sur FB une longueur FH = FA. Les points de division sont F et H.

Démonstration : Soit le diamètre CAI de (1). BE est équipollent à CI. Donc CE est médiane de CBI, etc. De A et B comme centres on trace deux circonférences de même rayon. Elles se coupent en C et D. Avec le même rayon, on trace une circonférence de centre D. On mène la droite BD. Elle coupe le troisième cercle en B et E. On trace CE, qui coupe AB en F, puis le cercle de centre F et de rayon FA. Ce cercle et le point F partagent AB en trois parties égales. On le démontre en remarquant que les distances de C et E à AB sont dans le rapport de 1 à 2. Simplicité = 15. E. Dubouis.

M. E. Lemoine demande-t-il de diviser en trois parties égales un *segment tracé,* ou un segment dont on donne *seulement les deux extrémités ?*

Dans la seconde hypothèse, la solution suivante équivaut à peu près à celle de M. Lemoine ; mais elle est plus simple dans la première hypothèse.

Soit AB le segment : tracer un cercle de centre A et de rayon l = AB, puis un cercle de centre B et de rayon l. Ces deux cercles se coupent en C et D. Tracer un cercle de centre D, de rayon l. Il coupe le cercle (A) en B et E. Tracer un cercle de centre E, de rayon l. Il coupe le cercle (D) en A et F.

Joindre CF (et tracer AB s'il ne l'est déjà); CF et AB se coupent en G, au tiers de AB.

Tracer un cercle de centre G, de rayon GA, qui coupe AB en A et en H, deuxième point de division cherché.

Op. $7C_1 + 5C_3 + 2R_1 + R_2$ (si AB n'était pas tracé, il faudrait ajouter encore $2R_1 + R_2$).

Simplicité : 15; exactitude : 9 ; 1 droite, 5 cercles. (Si AB n'était pas tracé, simplicité : 18; exactitude : 11 ; 2 droites, 5 cercles.)

A. Decerf.

3302. (**1907**, 244) (*Arcitenens*). — *Équation indéterminée* (**1908**, 45). — Réponses de MM. A. Boutin et *Stenacencis,* communiquées à M. *Arcitenens.* La Rédaction.

QUESTIONS.

1154. [I24b] (**1897**, 221) Dans la valeur de π, calculée avec 707 décimales, le chiffre 7 se rencontre beaucoup moins fréquemment qu'aucun des autres. Cela peut-il s'expliquer?

E.-B. Escott (U. S. A.).

1157. [I25b] (**1897**, 222) La formule suivante est-elle connue?

$$\frac{(n!)^3}{{}^{n-1}(n-1)n^2} = [1+2][3+4+5][6+7+8+9][10+\ldots+14]\ldots \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}+2+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n-2\right].$$

G. de Rocquigny.

1162. [I24b] (**1897**, 241) Étant donnée une circonférence de rayon 1, je trace deux diamètres fixes AOA′, BOB′. Je divise OA, OB, OA′, OB′ en n parties égales et par tous les points de division situés respectivement sur AA′, BB′ je mène des parallèles à BB′, AA′. Soit $\varphi(n)$ le nombre des carrés formés par les parallèles et dont tous les sommets sont à l'intérieur de la circonférence; la quantité $\pi - \frac{\varphi(n)}{n^2}$ tend évidemment vers zéro quand n tend vers ∞. Peut-on l'exprimer en fonction de n, au moins asymptotiquement? *Grip.*

1163. [K7c] (**1897**, 242) Je voudrais connaître une construction *directe* de ce problème : *Une division homo-*

grafique étant déterminée sur une droite par les trois couples de points corespondants a, a'; b, b'; c, c', *placer sur la droite les points doubles* ω *et* ω'. Voici ce que j'entends dans ce cas par une construction directe : c'est une construction qui ne dérive pas de la solution de la question suivante : *Une division homografique étant déterminée sur une circonférence par trois couples de points correspondants* A, A'; B, B'; C, C', *placer sur la circonférence les points doubles* Ω *et* Ω'. Cèle-ci, très conue, me serait inutile. E. LEMOINE.

1164. [V1a] (1897, 242) Doit-on dire : inverser ou invertir une fonction? Le second terme me semble plus correct. Le premier n'est-il pas plus usité? *Quid.*

1170. [K9a] (1897, 244) Dans son *Aperçu historique* (Note XXII, p. 353) Chasles généralise deux théorèmes de Stewart, qui ont été publiés sans démonstration. Le premier de ces théorèmes généralisés consiste en ce que, si A, B, C, ... sont m points d'un plan et a, b, c, ... autant de coefficients, on peut trouver $n+1$ autres points ($n < m$) tels que, si on les désigne par A', B', C', ..., on ait

$$a\,\mathrm{MA}^{2(n-\delta)} + b\,\mathrm{MB}^{2(n-\delta)} + \ldots$$
$$= (\mathrm{MA'}^{2(n-\delta)} + \mathrm{MB'}^{2(n-\delta)} + \ldots)\frac{a+b+c+\ldots}{n+1},$$

δ pouvant recevoir les n valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$. Pour $\delta = 0$, on a l'énoncé de Stewart.

La deuxième proposition s'applique à un système de m droites d'un plan.

Chasles ne donne aucune démonstration de ces théorèmes, dans la Note précitée. En a-t-il donné ailleurs? A-t-il été publié ailleurs quelque chose sur ce sujet? Un correspondant qui pourrait me renseigner sur cette double question me rendrait service. *Milèse.*

3411. **[I19c]** Trouver les formules générales qui donnent une infinité de nombres entiers pour les deux rapports

$$\frac{x^6+y^6}{4T+1} \quad \text{et} \quad \frac{x^4+y^4+u^4}{2}$$

égaux entre eux et de la forme $4m^2-3$;

Ou résoudre en entiers les équations

$$\frac{x^6+y^6}{4T+1} = \frac{x^4+y^4+u^4}{2} = 4m^2-3 = 4T^2+8T+1;$$

$m = T+1$ (T étant un nombre triangulaire).

Mehmed Nadir (Alep).

3412. **[I23]** Lorsqu'on développe en fraction continue une racine d'une équation du troisième degré à coefficients entiers, on parvient à des équations successives telles que

$$Ay^3 - By^2 - Cy - D = 0 \qquad (B, C, D > 0);$$

arrivera-t-il *toujours,* et pour *chacune des racines* (quand les trois racines sont réelles), que l'une de ces équations successives puisse s'écrire identiquement

$$y = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \ddots + \cfrac{1}{y}} + \cfrac{1}{\beta' + \cfrac{1}{\gamma' + \ddots + \cfrac{1}{y}}}},$$

$\beta, \gamma, \ldots, \beta', \gamma', \ldots$ étant entiers et positifs et α étant le quotient incomplet du développement de la racine considérée que donnerait cette équation?

On ne parviendra évidemment pas à la même équation pour les trois racines, à moins qu'elles ne puissent être représentées par

$$x, \quad \theta x, \quad \theta^2 x \qquad \text{avec} \qquad \theta x = \frac{ax+b}{a'x+b'}.$$

Espanet.

3413. [**K8**] Soit un quadrilatère ABCD. Par le milieu M_1 de AC on mène M_1O parallèle à BD et, par le milieu M_2 de BD, on mène M_2O parallèle à AC.

Le point O ne jouit-il pas de propriétés remarquables?

Exemple : Si l'on joint O aux milieux M, N, P, Q des côtés AB, BC, CD, DA, les quatre quadrilatères OMBN, ONCP, OPDQ, OQAM sont équivalents.

G. Lemaire.

3414. [**I9a**] a et b étant premiers entre eux, on sait (Lejeune-Dirichlet) qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $ax + b$. Connaît-on une formule

$$f(a, b, N)$$

qui donne, assez approximativement, le nombre des nombres premiers de cette forme, jusqu'à la limite N?

A. Boutin.

3415. [**I9a**] a et b étant premiers entre eux, ainsi que c et d, il existe une infinité de nombres premiers des formes linéaires $ax + b$, $cx + d$. Soit $f(a, b, N)$ le nombre des nombres premiers de la forme $ax + b$, de O à N; a-t-on une formule qui donne la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{f(a, b, N)}{f(c, d, N)}$$

quand N tend vers l'infini?

A. Boutin.



RÉPONSES.

3288. (**1907**, 220) (*Trinitario*). — Sans vouloir répondre par une autre question, j'observerai qu'il y a ici, pour moi, une équivoque. Le *point lumineux* désigné dans l'énoncé me semble se confondre avec ce que les peintres, dessinateurs et artistes appellent plus généralement le *point brillant*. S'il en est ainsi, je pourrai en donner un aperçu plus étendu. H. BROCARD.

3289. (**1907**, 220) (*Trinitario*). — Pourrait-on remplacer le cercle fixe de Steiner par une conique fixe de grandeur donnée?

L'emploi d'une ellipse ou d'une hyperbole aurait l'inconvénient d'introduire deux paramètres a et b, au lieu d'un.

Il faudrait donc adopter soit une hyperbole équilatère, soit une parabole, coniques toujours semblables et à un seul paramètre, comme déjà le cercle fixe; mais la présence de branches infinies rendrait les intersections assez imprécises lorsqu'elles s'éloigneraient du centre de la feuille; elles pourraient même tomber en dehors.

En outre, le tracé mécanique de ces deux coniques nécessiterait des appareils spéciaux et peu maniables, tandis que le cercle se trace pour ainsi dire instantanément et avec une précision graphique absolue.

On ne voit donc pas ce que gagnerait la méthode, même dans les conditions les plus favorables; on voit, au contraire, ce qu'elle y perdrait.

En tout cas, au point de vue du tracé, la parabole serait certainement à préférer, et, au besoin, on pourrait la découper dans une plaque de métal.

Ce n'est d'ailleurs pas la première fois qu'on a conseillé ou utilisé des courbes autres qu'un cercle fixe. On trouvera dans le *Traité de la résolution des équations numériques* de L. Saint-Loup (Paris,

1861) l'indication d'emploi de courbes fixes ou constantes

$$y = x^2, \qquad \text{p. 84-104;}$$
$$y = x^3, \qquad \text{p. 84-90;}$$
$$y = (1 + x^2)^{-1}, \qquad \text{p. 95;}$$
$$y = 4x^3 - 3x, \qquad \text{p. 128.}$$

Associée au cercle, l'hyperbole équilatère a été conseillée pour la trisection de l'angle (*Algèbre* de Bourdon, etc.), et la parabole pour la résolution graphique des équations des 3[e] et 4[e] degrés (Saint-Loup, p. 87).

Quant à une extension à l'espace par l'emploi de sphères fixes, ou d'autres surfaces, elle ne paraît avoir qu'un intérêt théorique ; mais la proposition en a été faite par M. E. Lemoine lorsqu'il a défini les conditions de la géométrographie dans l'espace (*Comptes rendus,* 3 décembre 1900).

Note. — Je rappellerai que l'analyse de l'Ouvrage de J. Steiner, *Die geom. Konstr. ausge fuhrt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises,* a été donnée *N. A.,* 1855, 2[e] Partie, p. 24-28.

H. Brocard.

3295. (**1907**, 222) (S. Prikto). — *Suite périodique* (**1908**, 36). — Autre réponse de M. E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

La Rédaction.

3300. (**1907**, 243) (E.-N. Barisien). — *Recueils d'intégrales* (**1908**, 44). — Aux Tables déjà mentionnées on peut ajouter :

B.-O. Peirce. — A short Table of integrals (Boston, Jinn und C°, 1902). Cette Table contient 479 intégrales indéfinies élémentaires, 44 intégrales définies, 46 intégrales elliptiques, 328 formules auxiliaires, etc.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3301. (**1907**, 243) (E.-N. Barisien). — Chacun des chiffres pouvant prendre toutes les valeurs de 1 à 9 inclusivement, le nombre des nombres de n chiffres est

$$P'_n = 9^n;$$

chacun de ces nombres étant de n chiffres, le nombre total des chiffres est

$$N'_n = n \times 9^n;$$

la valeur moyenne des chiffres étant 5, la somme de tous les chiffres est

$$5\,n \times 9^n;$$

la valeur moyenne des nombres étant $5 \times \frac{10^n - 1}{9}$, leur somme est

$$5 \times 9^{n-1}(10^n - 1).$$

WELSCH.

Réponse analogue de M. QUIJANO (Xérès).

3305. (1907, 246) (U. BINI). — *Équation indéterminée.* — Prenons $x:y:z:s$ comme coordonnées tétraédiques : l'équation

$$(1)\qquad x^2 + my^2 + nz^2 + 2ayz + 2bxy + 2cxz = s^2$$

est celle d'une surface du second ordre. Soit le point

$$x:y:z:s = 1:0:0:1,$$

qui va nous servir à représenter la surface sur un plan [comp. A. CLEBSCH, *Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung* (*Journ. de Borchardt,* t. LXV, 1866, p. 380)]. On aura les formules

$$(2)\qquad \xi_1 = \rho x - \sigma, \qquad \xi_2 = \rho y, \qquad \xi_3 = \rho z, \qquad \xi_4 = \rho s - \sigma.$$

Prenons le plan $\xi_4 = 0$ comme plan de représentation; on a $\rho s = \sigma$. Substituant dans (1), σ est déterminé par l'équation

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^2 + m\,\xi_2^2 + n\,\xi_3^2 + 2a\,\xi_2\xi_3 \\ \quad + 2b\,\xi_1\xi_2 + 2c\,\xi_1\xi_3 + 2\sigma(\xi_1 + b\,\xi_2 + c\,\xi_3) = 0. \end{array} \right.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface s'expriment alors par les équations

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho x = -(-\xi_1^2 + m\,\xi_2^2 + n\,\xi_3^2 + 2a\xi_2\xi_3), \\ \rho y = 2\,\xi_2(\xi_1 + b\,\xi_2 + c\,\xi_3), \\ \rho z = 2\,\xi_3(\xi_1 + b\,\xi_2 + c\,\xi_3), \\ \rho s = -(\xi_1^2 + m\,\xi_2^2 + n\,\xi_3^2 + 2a\,\xi_2\xi_3 + 2b\,\xi_1\xi_2 + 2c\,\xi_1\xi_3). \end{array} \right.$$

Si $\xi_1 = p$, $\xi_2 = q$, $\xi_3 = 1$,

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho x = -(-p^2 + mq^2 + n + 2aq), \\ \rho y = 2q(p + bq + c), \\ \rho z = 2(p + bq + c), \\ \rho s = -(p^2 + mq^2 + n + 2aq + 2bpq + 2cp). \end{array} \right.$$



Si p et q sont entiers, les formules (5) donnent pour x, y, z, s des valeurs entières; ρ est un facteur de proportionnalité.

O. Degel (Bayreuth).

[D'après l'allemand. (La Réd.)]

3306. (**1907**, 246) (U. Bini). — (**1908**, 47). — Si les racines de l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

sont entières, on aura

$$A = 3(p^2 - 3q) = a^2 + ab + b^2 = (a.b) = \tfrac{1}{2}[a^2 + b^2 + (a+b)^2],$$
$$B = 2p^3 - 9pq + 27r = ab(a+b),$$
$$x = \frac{-p+a}{3}, \quad \frac{-p+b}{3}, \quad \frac{-p-a-b}{3}.$$

Exemple :

$$x^3 + 7x^2 - 14x - 120 = 0; \; A = 273 = (16.1) = (11.8), \; B = -1672;$$
$$16.1.17 = 272, \qquad 11.8.19 = 1672,$$
$$a = -11, \qquad b = -8, \qquad x = -6, -5, +4.$$

Pareillement, pour l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

on a

$$6p^2 - 16q = \tfrac{1}{2}[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2]$$
$$= \tfrac{1}{2}[a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2],$$
$$8(p^3 - 4pq + 8r) = \tfrac{1}{3}[(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3],$$
$$3p^4 - 16p^2q + 64pr - 256s = abc(a+b+c),$$
$$x = \frac{-p+a}{4}, \quad \frac{-p+b}{4}, \quad \frac{-p+c}{4}, \quad \frac{-p-a-b-c}{4}.$$

A. Werebrusow (Théodosie, Crimée).

3307. (**1907**, 246) (U. Bini). — *Équation indéterminée.* — Les formules pour la transformation

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^2,$$

avec la condition

$$+ 2B\alpha\beta + C\beta^2 = a^n \qquad (D = B^2 - AC = b^2 - ac),$$

se trouvent dans mon article « sur la transformation des formes quadratiques en puissances » (*Math. Sbornik,* t. XXII), où il est démontré que

$$X = \alpha x^n + n\alpha' x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha'' x^{n-2}y^2 + \ldots + \alpha^{(n)}y^n,$$

$$Y = \beta x^n + n\beta' x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}\beta'' x^{n-2}y^2 + \ldots + \beta^{(n)}y^n,$$

$$\beta' = \frac{A\alpha + (b+B)\beta}{a}, \qquad \alpha' = \frac{(b-B)\beta' - c\beta}{A},$$

$$\beta'' = \frac{2b\beta' - c\beta}{a}, \qquad \alpha'' = \frac{(b-B)\beta'' - c\beta'}{A},$$

$$\beta''' = \frac{2b\beta'' - c\beta'}{a}, \qquad \alpha''' = \frac{(b-B)\beta''' - c\beta''}{A}, \qquad \ldots.$$

C'est la même question que **2236** (**1901**, 282; **1906**, 242).

A. Werebrusow (Théodosie, Crimée).

L'équation peut s'écrire

$$(2X + aY)^2 - (a^2 - 4b)Y^2 = 4Z^n.$$

Soit

$$D = a^2 - 4b.$$

On a identiquement

$$\left[(x + y\sqrt{D})^n + (x - y\sqrt{D})^n\right]^2 - D\left[\frac{(x + y\sqrt{D})^n - (x - y\sqrt{D})^n}{\sqrt{D}}\right]^2 = 4(x^2 - Dy^2)^n$$

et

$$2X + aY = (x + y\sqrt{D})^n + (x - y\sqrt{D})^n = 2\left[x^n + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2D + \ldots\right),$$

$$Y = \frac{(x + y\sqrt{D})^n - (x - y\sqrt{D})^n}{\sqrt{D}} = 2\left[nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3D + \ldots\right],$$

$$Z = x^2 - Dy^2.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.)

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

Autre réponse de M. U. Bini (Rome).

3309. (**1907**, 266) (*Steerman*). — *Problème de Pappus*. (**1908**, 72). — Réponses de MM. *Agnès Morri*, Degel, Dubouis, Escott, Farid-Boulad, Silbermann et Welsch, transmises à M. *Steerman*. M. Escott renvoie aux solutions qui se trouvent dans Ivan Alexandroff, *Problèmes de Géométrie élémentaire*, p. 138 (traduction D. Aitoff; Paris, Hermann, 1899), et E. Catalan, *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, p. 188. *Voir* aussi G. Lemaire, *Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de Géométrie*, p. 53 (Paris, Vuibert et Nony, 1904). La Rédaction.

3310. (**1907**, 267). — (Mehmed Nadir). — L'équation proposée se réduit simplement à

$$(x^2+y^2)(z^2+u^2)(v^2+w^2)=s^2+t^2+p^2+q^2.$$

Or, $(x^2+y^2)(z^2+u^2)$, produit de deux sommes de deux carrés, est lui-même une somme de deux carrés, A^2+B^2. A son tour, $(A^2+B^2)(v^2+w^2)$ est une somme de quatre carrés :

$$(Av)^2+(Bv)^2+(Aw)^2+(Bw)^2.$$

Ces remarques pourront sans doute amener à des solutions numériques. H. Brocard.

Autre réponse de M. Plakhowo.

La première expression entre crochets est la somme de quatre carrés. Donc, lorsque v^2+w^2 sera aussi la somme de quatre carrés, on aura une solution générale du problème par la formule d'*Euler*.

A. Gérardin.

3317. (**1907**, 269) (Mehmed Nadir). — *Équation indéterminée*. — (**1908**, 94) L'équation

$$(1)\quad 4xy=[(1-x)x+(1-y)y+2(y+u)x-(2y+u)u]^2$$

se met sous la forme

$$(2)\quad (x-y-u)^4+(x-y)^2-2(x+y)(x-y-u)^2=0.$$

Posant

$$(2')\quad x-y-u=\frac{x_1}{x_4},\qquad x-y=\frac{x_2}{x_4},\qquad x+y=\frac{x_3}{x_4},$$

et multipliant les deux membres par x_4^2, (2) devient

$$(3) \qquad x_1^4 + x_2^2 x_4^2 - 2x_1^2 x_3 x_4 = 0.$$

Quand on regarde $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ comme des coordonnées tétraédriques, l'équation (3) est celle d'une surface du quatrième ordre, qui a les droites doubles $x_1 = x_2 = 0$ et $x_1 = x_4 = 0$; leur point d'intersection $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : 0 : 1 : 0$ est un point triple de la surface. C'est un cas particulier de la surface de Steiner où, parmi les trois droites doubles, deux sont confondues. En partant du point triple, on pourra représenter la surface sur un plan par les formules

$$(4) \qquad \xi_1 = \rho x_1, \qquad \xi_2 = \rho x_2, \qquad \xi_3 = \rho x_4, \qquad \xi_4 = \rho x_3 - \sigma.$$

Choisissant le plan $\xi_4 = 0$ comme plan de représentation, on a

$$\rho x_3 = 0.$$

Si l'on substitue dans (3), σ est déterminé par l'équation

$$(5) \qquad \xi_1^4 + \xi_2^2 \xi_3^2 - 2\xi_1^2 \xi_3 . \sigma = 0.$$

D'où résultent les équations paramétriques de la surface

$$(6) \quad \rho x_1 = 2\xi_1^3 \xi_3, \quad \rho x_2 = 2\xi_1^2 \xi_2 \xi_3, \quad \rho x_3 = \xi_1^4 + \xi_2^2 \xi_3^2, \quad \rho x_4 = 2\xi_1^2 \xi_3^2.$$

Les substitutions

$$(7) \qquad \xi_1^2 = y_1, \qquad \xi_2 \xi_3 = y_2, \qquad \xi_1 \xi_3 = y_3$$

transforment (6) en

$$(8) \quad \rho x_1 = 2y_1 y_3, \quad \rho x_2 = 2y_1 y_2, \quad \rho x_3 = y_1^2 + y_2^2, \quad \rho x_4 = 2y_3^2.$$

[*Comp.* A. Clebsch, *Ueber die Steinersche Fläche* (*Journal de Borchardt*, t. LXVII, 1867, p. 1 und 2).]

(2') donne

$$(9) \qquad x = \frac{x_3 + x_2}{2x_4}, \qquad y = \frac{x_3 - x_2}{2x_4}, \qquad u = \frac{x_2 - x_1}{x_4}.$$

Soit

$$a = \frac{y_1}{y_3}, \qquad b = \frac{y_2}{y_3};$$

d'après (8),

$$(10) \qquad x = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \qquad y = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \qquad u = a(b-1).$$

Lorsque a et b sont des entiers à la fois pairs ou impairs, x, y, u sont entiers; si l'une des quantités a et b est paire, l'autre étant impaire, x et y sont des fractions et u est entier.

On obtient les formules signalées par M. Mehmed Nadir en posant

$$a = p, \qquad b = q + 1,$$

d'où

$$(11) \quad x = \left(\frac{p+q+1}{2}\right)^2, \qquad y = \left(\frac{p-q-1}{2}\right)^2, \qquad u = p.q.$$

O. Degel (Bayreuth).
[D'après l'allemand. (La Réd.)]

3321. (**1908**, 4) (*Rudis*). — *Équation indéterminée.* — Réponses de MM. Mathieu et Plakhowo transmises à M. *Rudis*. *Voir* aussi la réponse de M. Werebrusow à **3229** (**1908**, 138).

La Rédaction.

3327. (**1908**, 27) (*Eix*). — La probabilité d'un événement quelconque, bien ou mal défini, invraisemblable ou même impossible, est toujours $\frac{1}{2}$. En effet, l'événement se produira, ou non. C'est le fameux *to be or not to be, that is the question*. Le calcul des probabilités n'a rien à voir ici; les Mathématiques n'ont pas à intervenir dans une interrogation arbitraire. En disant : la probabilité de tout événement est toujours $\frac{1}{2}$, on donne une apparence mathématique à une figure de rhétorique. Ce dilemme est un truisme, et pas autre chose. Il n'a pas plus de force démonstrative que la prétendue promesse de prouver quelque chose par $a + b$, celui qui s'exprime ainsi étant bien souvent dénué de toute connaissance mathématique.

Cette réserve faite, on peut dire cependant que la probabilité $\frac{1}{2}$ a un incontestable droit de cité. Elle représente, en langage mathématique, la solution immédiate et triviale qui convient à toute question de probabilité, mais à titre de solution étrangère, singulière ou particulière, qui se présente dans beaucoup d'autres questions mathématiques, où elle n'est d'aucun secours pour la connaissance ou la détermination des autres solutions spéciales et vraiment décisives. Il suffira d'en rappeler quelques exemples. L'équation indéterminée

$$x + ay = 1$$

est toujours vérifiée par $x = 1$, $y = 0$, quel que soit a. Même re-

marque pour l'équation de Fermat

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

et, pour achever d'établir le bien fondé de cette observation, il suffira de rappeler que pour une foule d'équations indéterminées $f(x, y, a) = 0$, vérifiées pour $x = 1$, $y = 0$, il n'existe pas d'autre solution, ou bien il en existe une infinité ou seulement un nombre limité.

Note. — Ce postulat du pari d'un contre deux pourrait bien se trouver dans l'esprit humain depuis les temps les plus reculés. Le fait avéré ou supposé, la tradition historique ou fabuleuse, l'affirmation physique ou métaphysique, tout ce que l'homme a pensé, lu, écrit, affirmé ou imaginé, est dominé par ce dilemme. Cela pourrait expliquer comment il s'est glissé jusque dans le calcul des probabilités. Dr *Charbonier.*

3330. (**1908**, 28) (Hazard). — *Table de racines primitives et d'indices.* — J'ai donné dans ma réponse à **2248** (**1905**, 17, 177; **1907**, 111) une liste étendue de Tables de racines primitives, et une bibliographie du sujet. On y trouve aussi (**1905**, 179) une liste de Tables de facteurs de $10^n - 1$. Ceci permet de déterminer les nombres dont 10 est une racine primitive, c'est-à-dire les nombres p tels que la fraction décimale périodique égale à $\frac{1}{p}$ a justement $p - 1$ figures dans sa période. E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.)

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

Autre réponse de M. Plakhowo, qui renvoie à l'*Analyse indéterminée* de Desmarest (Paris, Hachette, 1852), aux *Tables d'indices* de Tchebychef, et à la *Théorie des nombres* de M. Cahen.

3331. (**1908**, 28) (Hazard). — *Tables de carrés et de cubes.* — Question déjà posée sous le numéro **416** (**1896**, 40, 69; **1907**, 247). *Voir* encore Dr A.-L. Crelle. — Rechentafeln, welche alles Multiplizieren u. Dividieren m. Zahlen unter 1000 ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechn. erleichtern u. sicherer machen. Nouvelle édition préparée par O. Seeliger, avec Tables des carrés et cubes des nombres de 1 à 1000 (501 pages), $39^{cm},5 \times 26^{cm}$. Berlin, G. Reimer, 1907. Preis gebunden in Leinwand, 15 mark.

O. Degel (Bayreuth).

Autre réponse de M. *E. Liminon.*

La Table des carrés de M. Retsin, signalée par M. Lemaire, est épuisée; une autre Table a pour titre : « Association des élèves sortis de l'École industrielle de Liège. *Table des carrés et des cubes des nombres de* 1 *à* 1000. Liège, imprimerie H. Vaillant-Carmanne, 1902. »
N. PLAKHOWO.

M. Plakhowo renvoie encore à la page 37 de la *Théorie des nombres* de E. Lucas.
LA RÉDACTION.

A signaler la Table des carrés et des cubes de 1 à 10000 par Claudel. Ces Tables sont extraites du *Manuel d'Architecture* de Séguin. *Voir* aussi **1465** (**1899**, 191; **1900**, 141).
A. GÉRARDIN.

3342. (**1908**, 32) (E. MAILLET). — On peut lire dans J.-F. Laharpe (*Lycée,* ou *Cours de litt. anc. et mod.,* t. XIV, p. 9; Paris, Amable Costes, 1813) :

« ... Faut-il autre chose que du bon sens pour trouver souverainement ridicule un emploi de la Science tel que celui qu'en a fait un savant moderne, Condorcet, l'application du calcul mathématique aux vraisemblances morales, calcul qu'il substituait, avec un sérieux aussi incompréhensible qu'infatigable, et dans toute l'étendue d'un in-4° hérissé d'algèbre, aux preuves juridiques, écrites ou testimoniales, les seules admises, dans tous les tribunaux du monde, par le bon sens de toutes les nations?... »

Or, à la mort de Laharpe (1803), Stuart Mill avait 30 ans et Auguste Comte 5 ans.

Les critiques de Laharpe ont donc certainement précédé celles d'Auguste Comte et, peut-être, celles de Stuart Mill.

Pour Stuart Mill, voir *Système de logique déductive et inductive,* t. II, p. 64; traduction Peisse, sur la 6e édition anglaise (1865); Paris, Ladrange, 1866. (La première édition anglaise date de 1843.)

Pour une réfutation sommaire des critiques de Laharpe, *voir* LOUIS FIGUIER, *Vies des savants illustres,* XVIIIe *siècle;* Paris, Hachette, 1882, p. 419.
G. LEMAIRE.

3347 et **3348**. (**1908**, 52) (A. WEREBRUSOW). — *Équation indéterminée.* — Comment faut-il entendre les questions posées par M. Werebrusow? Dans la première Partie de la question **3347**,

M. Werebrusow ne peut exprimer que l'équation

$$x^4 + mx^2y^2 + y^4 = z^2$$

est impossible pour m positif quelconque, car il est cependant possible de trouver une infinité de solutions de cette équation, avec des valeurs positives ou négatives de m, au moyen de l'une des identités ci-dessous :

$$(1) \quad \begin{cases} x^4 + (x^2y^2 \pm 2x^2 \mp 2y^2 - 2)x^2y^2 + y^4 = (x^2y^2 \pm x^2 \mp y^2)^2, \\ x^4 + (x^2y^2 \pm 2x^2 \pm 2y^2 + 2)x^2y^2 + y^4 = (x^2y^2 \pm x^2 \pm y^2)^2. \end{cases}$$

Ainsi, pour $x = 2$ et $y = 3$, nous avons

$$2^4 + 12 \times 2^2.3^2 + 3^4 = \overline{23}^2, \qquad 2^4 + 44 \times 2^2.3^2 + 3^4 = \overline{41}^2,$$

$$2^4 + 24 \times 2^2.3^2 + 3^4 = \overline{31}^2, \qquad 2^4 + 64 \times 2^2.3^2 + 3^4 = \overline{49}^2.$$

Les valeurs de m qui répondent à la question sont de l'une des formes

$$m_1 = (x^2 - 2)y^2 \pm 2(x - 1)(x + 1),$$
$$m_2 = (x^2 + 2)y^2 \pm 2(x^2 + 1),$$

ou de la forme plus générale

$$m = (x^2 \pm 2)y^2 \pm 2(x^2 \pm 1).$$

Il ne m'a pas été possible de m'assurer si toutes les solutions de l'équation donnée sont contenues dans les identités (1).

GLEIZES.

Si l'on pose

$$m - 2 = n^2x^2y^2 + 2n(x^2 + y^2),$$
$$m + 2 = n^2x^2y^2 + 2n(x^2 - y^2)$$

(n nombre entier positif ou négatif), les valeurs de m qui résultent de chacune de ces deux équations rendent l'équation donnée carré parfait :

$$z^2 = (x^2 + y^2 + nx^2y^2)^2,$$
$$z^2 = (x^2 - y^2 + nx^2y^2)^2.$$

J'ai formé par ce procédé un grand nombre de valeurs de m ; aucune n'est comprise dans la liste des valeurs données. MATHIEU.

Consulter EULER, *Commentationes Arithmeticæ collectæ,* t. II, p. 183 et 492.

Euler indique (p. 495) les valeurs suivantes, donnant une solution du problème, pour m positif : 91, 94, 95, 96, 100, 104, 106, 107, 112, 118, 122, 127, 128, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 140, 143, 151, 152, 153, 156, 159, 160, 162, 166, 168, 169, 171, 172, 173, 174, 177, 178, 183, 184, 187, 188, 191, 194, 196, 197, 198, 199, 200.

Pour m négatif, il indique (p. 498) les valeurs suivantes : 72, 90, 96, ..., puis 100, 101, 102, 103, 106, 109, 113, 116, 118, 119, 121, 123, 126, 134, 136, 142, 144, 146, 148, 149, 151, 156, 166, 167, 169, 179, 182, 187, 188, 189, 190, 191, 193, 196, 197, 198, 200.

Pour m négatif, il y aurait donc lieu d'étudier les valeurs 15, 35, 39, 51, 63, 71, 77, 79, 80, 84, 87, 95, 99, qui ne se trouvent dans aucune des deux listes comparées. A. GÉRARDIN.

3352. (1908, 53) (G. LEMAIRE). — *Théorème de Stewart.* — Des recherches de M. J.-S. Mackay, insérées dans le Tome X des *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* (in-8°, 1892), il résulte que le théorème *dit* de Stewart, énoncé par lui en 1746, a été découvert par Robert Simson, probablement avant 1741. *Voir* à ce sujet les Notes publiées par M. E. Lebon dans le *Bulletin scientifique,* Paris, 1893, p. 153, et dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques,* 1902, p. 210. *Anonyme,* PLAKHOWO.

L'indication désirée se trouve dans un article de M. S. Mackay (*P. E. M. S.,* t. X, 1891-1892) dont le résumé a été publié (*Mathesis,* 1893, p. 63-64).

En 1746, Mathew Stewart, alors candidat à la chaire de Mathématiques vacante à l'Université d'Édimbourg, par suite du décès de Maclaurin, publia son premier Ouvrage : *Some general theorems of considerable use in the higher parts of Mathematics.* Dans la préface, il dit que les théorèmes contenus dans son Livre sont entièrement nouveaux, à part un ou deux au plus, qu'il ne spécifie pas.

Voici ces deux propositions :

I. Si l'on joint le sommet A d'un triangle à un point D du côté BC, et qu'on mène les droites DE, DF parallèles à AC, AB et rencontrant AB, AC en E, F, on a

$$\overline{AD}^2 + BD.CD = AB.AE + AC.AF. \qquad (1)$$

II. Si l'on joint le sommet A d'un triangle ABC à un point D de la base, on a

$$(2) \qquad \overline{AB}^2.CD + \overline{AC}^2.BD = BC.BD.CD + \overline{AD}^2.BC.$$

Stewart se sert de la première pour démontrer la seconde; celle-ci porte généralement le nom de *théorème de Stewart.*

Dans le second livre (p. 156, lemme X) de ses *Loci Plani* publiés en 1749, Simson énonce le théorème suivant :

D étant un point quelconque de la base BC d'un triangle ABC, on a

$$(3) \quad \overline{AB}^2.CD + \overline{AC}^2.BD = \overline{BD}^2.CD + \overline{CD}^2.BD + \overline{AD}^2.BC.$$

Les relations (2) et (3) ne diffèrent pas essentiellement. Simson fait observer que l'égalité (3), quand BD = DC, rentre dans la proposition 122 des *Collections* de Pappus.

Dans l'appendice des *Loci Plani* (p. 221), il la démontre lorsque les points A, B, C, D sont en ligne droite et dit avoir trouvé ce cas particulier avant le lemme X. Il ajoute que d'autres démonstrations de ce cas lui avaient été communiquées dans le temps par ses anciens disciples, James Moor et Mathew Stewart, qu'il avait engagés à s'en occuper; que Stewart avait donné une autre démonstration du dernier cas du lemme X dans les deux premières propositions de ses *Some general theorems.*

Ces extraits des *Loci Plani* et de la préface de Stewart prouvent que la relation (2) appartient à Simson. Il y était parvenu probablement avant 1741; car c'est alors qu'il informa Stewart de son intention de publier les *Loci Plani.*

Le théorème de Stewart (ou plutôt de Simson) a été démontré en 1751 par Thomas Simpson dans les *Select exercices for young proficients in the Mathematics;* en 1780, par Euler, dans les *Acta Acad. Petropol.*, Pars I, p. 92-93; en 1803, par Carnot, qui en fit ressortir l'utilité.

Chasles, dans l'*Aperçu historique*, en montra l'importance. Enfin, M. Cl. Thiry lui a consacré une brochure spéciale : *Applications du théorème de Stewart et théorie du barycentre,* 1891.

A cet intéressant exposé je me permettrai d'ajouter quelques références bibliographiques sommaires.

Simson, *Loci Plani,* 1749; M. Stewart, *Some geom. theor.,* 1746

et 1763; P. DEMOURS, 1759; CARNOT, *Géom. de posit.*, 1803, p. 263; J. GLENIE, 1828; DAVIES, 1844; P. BRETON DE CHAMP, *C. R.*, 1846, 2 juin; *J. M.*, 1848, p. 281-332: *N. A.*, 1849, p. 390-392; M. CHASLES, 1852, *Géom. supér.* et *Aperçu hist.;* CRELLE, 1858, p. 225.

Questions diverses (*N. A.*, 1859, 118, 184, 207; 1870, 403).

C.-A. BRETSCHNEIDER, *A. Gr.*, 1869; J. NEUBERG, *N. A.*, 1870, p. 407; MENTZNER, *Progr.*, 1874: Référence part., *N. C.*, 1880, 167; B. NIEWENGLOWSKI, *N. A.*, 1887, p. 173-175; F. FARJON, *N. A.*, 1888, p. 288-292; A. MANNHEIM, *M. M.*, 1890, p. 178-180; S. MACKAY, *M.*, 1893, p. 63-64; L. GÉRARD, *Bull. Mém. Gér.*, 1895-1896, p. 113-118.

Comparer aussi question 1822 (**1900**, 125; **1901**, 176; **1904**, 241) et question 2277 (**1902**, 33).

Voir enfin C. DELITALA : *Un correlativo del teorema di Stewart* (*Period. di Matem.*, XVII, 1901). *Vieujeu.*

3353. (**1908**, 54) (GLEIZES). — *Intégrales définies.* — L'intégrale

$$I_1 = \int_0^\infty \cos px \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^n dx$$

s'obtient sous forme finie à l'aide du même procédé qui m'a servi à évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\alpha t}{t^{n+1}} \sin^n t \, dt,$$

à l'occasion des développements relatifs à la question 3225 (*Casopis pro pestováni mathematiky a fysiky,* t. XXXVII, p. 226) (**1907**, 256; **1908**, 138).

L'autre intégrale

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos px}{x^{2n}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)^n dx$$

se traite de la même façon comme la valeur de la fonction analytique de s,

$$F(s) = \int_0^\infty \cos px \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)^n x^{s-1} \, dx,$$

correspondant à la valeur de $s = 1 - 2n$.

Pour effectuer les calculs, on admet d'abord la partie réelle de s entre o et 1, et l'on décompose $F(s)$ en intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \cos px \cos^{n-\nu} x \sin^\nu x\, x^{s-\nu-1}\, dx$$

qui sont faciles à déterminer. M. LERCH (Brünn).

Autre réponse de M. BOHREN qui paraîtra ultérieurement.

3354 (1908, 54) (E.-N. BARISIEN). — Parmi les problèmes ainsi proposés, on peut en distinguer trois :

(A) $$\sum_1^x x^3 = y^2,$$

(B) $$\sum_x^{x+(n-1)r} x^3 = y^2,$$

(C) $$\sum_x^{x+(n-1)r} x^3 = (x+nr)^3.$$

A. L'équation revient à

$$\frac{x^2(x+1)^2}{4} = y^2$$

ou encore à

$$\frac{m(m+1)}{2} = f^3$$

ou à

$$n(2n+1) = f^3,$$

d'où

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8f^3}}{4}.$$

$8f^3$ est un cube, g^3 ; on a donc à résoudre l'équation

$$g^3 + 1 = h^2,$$

vérifiée par $g = 2$, $h = 3$, ce qui entraîne la condition $f = 1$ ou $m = 1$.

Le problème (A) est donc impossible, ou tout au moins encore à résoudre. Il revient à une proposition empirique formulée par E. Catalan dans sa seule communication au *Journal de Crelle*.

B et C. Ces deux équations ont été proposées en 1864 dans les *N. A.*, question 703, p. 176, B. Boncompagni.

Cette question est demeurée non résolue dans le recueil précité; mais, à l'occasion de résultats numériques de M. E. Grigorieff (*I. M.*, énoncé **2488**, **1902**, 319) s'appliquant à l'équation B, il a été rappelé par M. N. Plakhowo (**1903**, 170, 188) que ce problème a été résolu dans *Z. H.* par L. Matthiessen (1902, p. 372).

Quant à l'équation (C), on peut l'écrire

$$(n-1)x^3+3\left[\frac{n(n-1)}{2}-1\right]rx^2$$
$$+3\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}-n^2\right]r^2x+\frac{n^2(n-1)^2}{4}-n^3=0.$$

Posons $x = ur$ et faisons $n = 2, 3, 4, \ldots$. Nous aurons

$$\begin{array}{ll}
n=2, & 1u^3-3.1u^2-3.3u-7=0,\\
n=3, & 2u^3+3.0u^2-3.4u-18=0,\\
n=4, & 3u^3+3.2u^2-3.2u-28=0,\\
n=5, & 4u^3+3.5u^2+3.5u-25=0,\\
n=6, & 5u^3+3.9u^2-3.19u-9=0,\\
n=7, & 6u^3+3.14u^2+3.42u+98=0,\\
\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Il est aisé de vérifier qu'à partir de $n = 7$, on n'a plus pour les coefficients que des valeurs positives. On reconnaît facilement aussi que, parmi les équations précédentes, la deuxième ($n = 3$) est la seule à admettre une racine positive entière, $u = 3$. Ainsi $x = 3r$.

L'équation (C) devient alors

$$x^3+(x+r)^3+(x+2r)^3=(x+3r)^3,$$

et, après y avoir fait $x = 3r$, elle se réduit à l'identité connue

$$3^3+4^3+5^3=6^3.$$

L.-N. Machaut.

Réponse en partie analogue de M. Plakhowo.

3355 (**1908**, 54) (E.-N. Barisien). — *Équations indéterminées.* — En retranchant la première équation de la deuxième, et la deuxième de la troisième, on trouve

$$(1)\qquad x = u^2 - t^2,$$
$$(2)\qquad x = v^2 - u^2.$$

Le problème revient donc à trouver trois carrés en progression arithmétique.

La solution de ce problème est donnée par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} t = 2p^2 - q^2, \\ u = p^2 + (p+q)^2, \\ v = 2(p+q)^2 - q^2, \end{cases}$$

où p et q sont des entiers quelconques.

Toutefois, il suffira de prendre p et q positifs et premiers entre eux, et q impair, pour obtenir tous les systèmes t, u, v, distincts et irréductibles. Les valeurs t, u, v, négatives, sont admissibles, puisqu'elles n'entrent dans le résultat que par leurs carrés.

Ayant ainsi fait choix d'un système t, u, v, on déduira x de l'équation (1), et l'équation indéterminée du premier degré

$$(4)\qquad (u^2 - t^2)z - y = t^2$$

donnera une infinité de solutions pour z et y.

Les deux premières solutions de M. Barisien appartiennent au système $p = 1$, $q = 1$, la dernière au système $p = 1$, $q = 3$.

L. Dujardin.

Réponses analogues de MM. Degel, Dubouis, Escott, A. Gérardin, Gleizes, *Forte*, L'Hommedé (Los Angeles, Califormie), *E. Liminon*, Mathieu, Paulmier, Plakhowo, Rodrigo Ravasco (Lisbonne), A. Schiappa Monteiro (Lisbonne), Stübler, Tafelmacher, transmises à M. Barisien.

La Rédaction.

3356. (**1908**, 73) (*E.-A. Majol*). — *Hyperbole.* — Étant données deux coniques *quelconques* U et C, le lieu des centres des coniques $U + \lambda C = 0$ est celui de l'intersection des polaires par rapport à U et C d'un point M variable sur la droite de l'infini.

Ces polaires ne changent pas si l'on remplace U et C par deux coniques ayant respectivement mêmes centres et mêmes asymptotes.

Donc le lieu V des centres ne change pas si l'on remplace C, en particulier, par un cercle concentrique.

Résultat identique si U et C sont deux quadriques.

Dans le cas de l'énoncé, V est l'hyperbole d'Apollonius du centre de C par rapport à U.

L. Bickart.

Autres réponses de MM. Dubouis, Espanet, Hendlé, A. Terracini (Turin), Welsch, transmises à M. *E. A. Majol*.

3363. (1908, 75) (Hernandez). — *Déterminants.* — Un théorème énoncé par M. Hadamard [1] permet de répondre assez rapidement à la première partie de la question.

Si l'on pose, $F(x)$ étant une fonction entière,

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$\frac{1}{F(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

on aura

$$\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \ldots & c_{m+p} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \ldots & c_{m+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m+p} & c_{m+p+1} & \ldots & c_{m+2p} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}}}{a_0^{m+2p+1}} \begin{vmatrix} a_{p+1} & a_p & \ldots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{p+2} & a_{p+1} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+2p} & a_{m+2p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{p+1} \end{vmatrix};$$

soit

$$F(x) = \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots = \sum \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

On aura, d'après la définition des nombres de Bernoulli,

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu-1},$$

et, par conséquent, $c_0 = 1$, $c_{2n} = 0$, $n \neq 0$.

En faisant $p = 0$, $m = 2n$, on aura donc

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n} & a_{2n-1} & \ldots & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \ldots & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

C. Q. F. D.

---

[1] *Propriété des fonctions entières* (*Journal de M. Jordan*, 1893, p. 199).

Il est moins aisé de répondre à la deuxième partie de la question, car le déterminant considéré n'a pas une loi de formation bien régulière; mais il est possible d'arriver à un résultat qui se rapproche beaucoup de celui énoncé et qui se présente comme une conséquence assez directe de celui que nous venons d'obtenir.

Nous avons évidemment

$$F(x) \times \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2},$$

d'où

$$\frac{1}{F(x)} \times \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} = \frac{e^x - 1}{x}$$

et

$$\frac{1}{F(x)} \times \sum (2^{n+2} - 2)\frac{x^n}{(n+2)!} = \sum \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

On obtient ainsi un système d'équations linéaires auquel satisfont les coefficients $c_0 = 1$, c_1, c_2, c_3, ..., et, comme nous avons

$$c_{2n} = 0 \qquad (n \neq 0),$$

on aura évidemment

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \frac{2^3-2}{3!} & 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{2!} \\ \frac{2^4-2}{4!} & \frac{2^3-2}{3!} & 1 & \ldots & 0 & \frac{1}{3!} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{2^{2n+1}-2}{(2n+1)!} & \frac{2^{2n}-2}{(2n)!} & \ldots & \ldots & 1 & \frac{1}{(2n)!} \\ \frac{2^{2n+2}-2}{(2n+2)!} & \frac{2^{2n+1}-2}{(2n+1)!} & \ldots & \ldots & \frac{2^3-2}{3!} & \frac{1}{(2n+1)!} \end{vmatrix} = 0.$$

D'une manière générale, on pourrait profiter de ce que la fonction

$$x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{ax} - 1}\right) = x\,\frac{e^{ax} + 1}{e^{ax} - 1}$$

est paire quelle que soit la quantité a.

En additionnant ou en multipliant un nombre quelconque de ces fonctions, on aura toujours une fonction paire, et, en tenant compte de ce que $c_{2n} = 0$, on pourra généraliser les propriétés énoncées.

A. Auric.

Le premier de ces déterminants a pour valeur

$$\Delta_n = \frac{1}{2!}\Delta_{n-1} - \frac{1}{3!}\Delta_{n-2} + \frac{1}{4!}\Delta_{n-3} - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{1}{n!}\Delta_1 + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}.$$

Ce déterminant est nul pour

$$n = 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15.$$

Les calculs devenant pénibles pour des valeurs de n supérieures à 15, je n'ai pas poussé plus loin la vérification. L'expression Δ_n se forme facilement et, en l'admettant vraie pour Δ_n, on montre aisément qu'elle a lieu encore pour Δ_{n+1}.

Le deuxième déterminant proposé a pour valeur

$$D_n = \frac{2}{2!}D_{n-1} - \frac{2^2}{3!}D_{n-2} + \frac{2^3}{4!}D_{n-3} - \ldots$$
$$-(-1)^n \frac{2^{n-2}}{(n-1)!}D_2 + (-1)^n\left[\frac{2^n}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right].$$

J'ai vérifié que D_n est nul pour

$$n = 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13.$$

Même remarque que plus haut.

N. B. — Il s'est glissé une erreur dans la transcription du deuxième déterminant; en effet, le déterminant est du $n^{\text{ième}}$ ordre, comme on le voit par la première et la dernière colonne, tandis que la deuxième et la troisième colonne renferment visiblement $(n+1)$ termes. *Stenacensis.*

Il semble que le terme $\frac{1}{2!}2$ doive être remplacé par $\frac{1}{3!}2^2$ dans la deuxième et l'avant-dernière colonne. La Rédaction.

QUESTIONS.

1176. [**O2c**β] (**1897**, 266) Un correspondant pourrait-il me donner une solution du problème suivant, dans laquelle on éviterait ou plutôt on rendrait simple l'élimination de la variable ω?

On donne : 1° deux axes fixes rectangulaires OX et OY; 2° deux axes mobiles rectangulaires Ox, Oy dont la position est déterminée par l'angle variable ω que fait OX avec Ox; 3° une courbe OC dont l'équation par rapport aux axes mobiles est $y = ax^2 \cos\omega$. On demande quel est le lieu des points M tels que la longueur de l'arc OM soit égale à $b + c \sin\omega$. (Les quantités a, b, c sont des constantes.)

E. Lefèvre (Bruxelles).

1177. [**V8**] (**1897**, 266) Dans un Ouvrage : *Essais sur l'histoire des Belles-Lettres, des Sciences et des Arts*, par Juvenel de Carlencas (Lyon, 1757), il est dit (t. II, p. 280) : « On découvrit par son moyen (il s'agit de la lunette d'approche) les trente petites Planettes qui font leur révolution autour du Soleil. » De quelles *petites planètes* est-il ici question? Je ne puis croire qu'il soit fait allusion aux satellites dont il est parlé (*loc. cit.*); on n'en connaissait alors que 13 (4 de Jupiter et 9 de Saturne). H. Brocard.

1179. [**Q4a**] (**1897**, 267) Disposer dans le plan n cercles tangents, de telle sorte que le nombre des points de contact soit maximum. G. de Rocquigny.

1180. [**Q4a**] (**1897**, 267) Disposer n sphères tangentes,

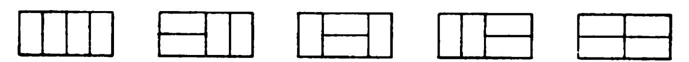
dans l'espace, de telle sorte que le nombre des points de contact soit maximum. G. DE ROCQUIGNY.

1183. **[Q4b]** (**1897**, 267) De combien de façons différentes peut-on ranger mnp parallélépipèdes rectangles de dimensions : $1 \times 1 \times 2$, dans une boîte de même forme dont les dimensions sont : $m \times n \times 2p$ (m, n, p entiers)?

Pourrait-on du moins donner une solution pour $m = 1$, c'est-à-dire indiquer de combien de manières peut-on disposer np dominos (ils n'interviennent que par leur forme $= 1 \times 2$) dans une plaque rectangulaire de dimensions $n \times 2p$?

Dans le cas particulier où $p = 1$, je trouve le nombre cherché x_n, $n_n = u_{n+1}$, u_{n+1} étant le terme de rang $n + 1$, de la suite de Fibonacci, où $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, ...

Je considère comme différentes deux dispositions d'aspect différent et non la même décomposition, où l'on permuterait les dominos ou les parallélépipèdes; ainsi pour $m = 1$, $n = 4$, $p = 1$, j'ai les cinq seules dispositions que voici :



A. BOUTIN.

1184. **[L²1b]** (**1897**, 268) Terquem (*N. A.*; 1858, p. 241) a mis à la fin d'un article la note suivante :

« M. Blum a fait voir, par une construction mécanique ingénieuse, comment les cercles directeurs et les droites directrices peuvent servir à décrire les coniques (*N. A.*, 1843, p. 60). Ne pourrait-on pas, par une construction mécanique et à l'aide des plans directeurs, décrire les surfaces du second degré? »

Je ne crois pas qu'on ait fait d'essais dans cète voie; la question ofre évidemment assez d'intérêt pour que nous puissions la rapeler ici. E. LEMOINE.

1186. **[C1e]** (**1897**, 269) A-t-on fait des objections

sérieuses à la démonstration suivante, bien connue, de la formule de Maclaurin?

Soit

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

x étant intérieur à un ensemble E où la série du second membre est continue, convergente et a pour dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., d'où

$$f'(x) = A_1 + 2A_2 x + \ldots,$$
$$f''(x) = 2A_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En faisant $x = 0$, cette valeur nulle supposée comprise dans E,

$$f(0) = A_0, \quad f'(0) = A_1, \quad f''(0) = 2A_2, \quad \ldots.$$

Donc

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots.$$

M.-R. de Montessus.

1187. **[V9]** (**1897**, 270) Existe-t-il un dictionnaire français des notations actuellement en usage en Mathématiques? Graciano Ricalde (Mérida, Yucatan).

3416. **[K8]** Le rectangle maximum contenu dans un triangle donné a-t-il nécessairement un de ses côtés appuyé sur un des côtés du triangle? *Agnès Morri.*

3417. **[M¹1h]** Quelle courbe satisfait à l'équation

$$\sqrt{-x^2 + 2ax} - \sqrt{-x^2 + 2ax + b^2}$$
$$- \sqrt{-y^2 + 2by} + \sqrt{-y^2 + 2by + a^2} = a - b,$$

que j'obtiens dans la recherche d'un lieu géométrique?

A-t-elle un nom? *Agnès Morri.*

3418. **[C1f et K9a]** Déterminer une droite telle que la somme des carrés des distances de n points à cette droite soit un minimum. Les n points sont situés dans le même plan. GLEIZES.

3419. **[I18]** Existe-t-il des nombres premiers qui ne divisent aucun nombre de la forme $a^3b^2 - c^3d^2$, les lettres désignant des entiers supérieurs à 1 et premiers entre eux deux à deux? Existe-t-il des nombres premiers qui ne peuvent pas diviser une infinité de nombres de la forme précédente? Peut-on donner une formule ou une loi pour trouver de tels nombres premiers? DUBOUIS.

3420. **[I13]** Les facteurs premiers de $x^2 - ay^2$, x et y étant premiers entre eux, peuvent-ils être mis sous une forme plus simple que celle qu'a indiquée Legendre et qui est

$$pu^2 + 2quv - rv^2$$

avec la condition

$$pr + q^2 = a?$$

DUBOUIS.

3421. **[I19c]** L'équation

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n$$

est-elle impossible en nombres entiers positifs pour certaines valeurs de n, et, si cela est, peut-on trouver une loi fournissant des valeurs de n qui rendent cette équation impossible? DUBOUIS.

3422. **[I19c]** Même question pour chacune des équations

$$2(x^n + y^n) = z^n \pm 4u^n, \qquad 2(x^n + y^n) = -z^n + 4u^n,$$
$$x^n \pm y^n + 4(z^n \mp u^n) = 0.$$

DUBOUIS.



RÉPONSES.

57. (**1894**, 22) (Aurelio Lugli). (**1895**, 325; **1900**, 51; **1903**, 183). — Il y a une erreur de transcription pour la valeur du produit 2071723.5363222257. (**1903**, 183). A. Gérardin.

524. (**1895**, 134; **1902**, 138) (H. Brocard). — *Mosaïque de l'hélianthe* (**1904**, 95). — On peut composer des courbes à la manière des figures de Lissajous et représenter ainsi plusieurs formes de feuilles et de fleurs.

La mosaïque de l'hélianthe, par exemple, dessine des courbes qui peuvent se déduire de la cardioïde

$$\rho = a(1 + \cos\omega),$$

tournant autour de son rebroussement polaire, et un peu modifiée en introduisant quatre paramètres, ce qui donne

$$x = a\cos\varphi + b\cos 2\varphi,$$
$$y = c\sin\varphi + d\sin 2\varphi.$$

En y joignant une troisième équation telle que

$$z = e\cos\varphi,$$

on obtiendra une courbe unicursale correspondant assez exactement à une des courbes de la mosaïque dans l'espace.

Après examen de la photographie communiquée par M. H. Brocard, on est amené à proposer les trois équations nouvelles :

$$x = 2\cos\varphi + \cos 2\varphi,$$
$$y = 2\sin\varphi + \sin 2\varphi,$$
$$z = \frac{1}{2}\cos 2\varphi.$$

W.-N. Le Heux.
(Voorthuizen, près Barneveld, Hollande.)

Nous avons connaissance de l'intention de M. F.-J. Vaes, directeur du *Wiskundig Tijdschrift*, à Rotterdam, de publier une réduction de moitié de la photographie précitée.

Sur l'épreuve originale de grandeur naturelle, la mosaïque a $0^m,17$ et $0^m,20$ de diamètre.

La fleur provient des pépinières André Leroy, à Angers, et a été photographiée le 10 octobre 1899.

Si le cliché peut nous être communiqué, nous le publierons bien volontiers. LA RÉDACTION (d'après un Correspondant).

612. (**1895**, 281; **1904**, 185) (W. DE ROMILLY). — *Dernier théorème de Fermat* (**1908**, 79). — L'erreur de M. Werebrusow consiste à conclure que $q = sf$ à la fin de la page 80. Soit p le plus grand commun diviseur de $B - \beta$ et $\alpha - A$, et

$$B - \beta = ps, \qquad \alpha - A = pq;$$

s et q sont premiers entre eux; l'égalité

$$(B - \beta)(C - \gamma) = (\alpha - A)\omega$$

donne

$$s(C - \gamma) = q\omega,$$

d'où $\omega = st$, $C - \gamma = qt$ (t entier). De ces formules on peut conclure, non que $q = sf$, mais que $\frac{t}{s}$ et $\frac{ps}{t}$ sont entiers, par suite que $\theta = t$, $s = a$, $q = b$, $t = ha$, $p = hc$ (h entier). Alors

$$A = \alpha - bch, \qquad B = \beta + ach, \qquad C = \gamma + abh;$$

chacune des équations (4) se réduit ainsi à

$$b\beta + c\gamma - a\alpha + abch = 0.$$

On peut en déduire des suites de valeurs satisfaisant à (4) avec $a \neq 1$.

Exemple :

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 5, \quad \alpha = 53, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 11,$$
$$A = 38, \quad B = 17, \quad C = 17.$$

L.-E. DICKSON (Chicago).
[D'après l'anglais. (LA RÉD.)]

M. Werebrusow dit :

« Ainsi

$$\alpha = pq + \frac{\beta q}{s} + \frac{\gamma p}{t}, \qquad \dots$$

Puisque α est entier et que les nombres pq et α, ps et β, qt et γ sont premiers entre eux, nous aurons

$$q = sf, \qquad p = tg. \qquad \dots »$$

Or, cela est faux, à moins que s et t ne soient premiers entre eux, ce qui n'est pas démontré.

D'ailleurs tout le raisonnement tendant à prouver l'impossibilité du système

$$(4) \qquad b\beta + c\gamma = Aa, \qquad a\alpha - c\gamma = Bb, \qquad a\alpha - b\beta = Cc$$

(où a, b, c, α, β, γ sont tous premiers entre eux deux à deux et, de plus, A premier à α, B à β, C à γ), ce raisonnement, dis-je, tombe par le fait que le système (4) a manifestement une infinité de solutions.

En voici une au hasard :

$$a = 7, \qquad \alpha = 29, \qquad A = 14,$$
$$b = 5, \qquad \beta = 13, \qquad B = 34,$$
$$c = 3, \qquad \gamma = 11, \qquad C = 46.$$

On voit précisément ici que, d'après les notations de l'auteur, si l'on pose

$$(B - \beta)(C - \gamma) = (\alpha - A)\omega,$$

avec

$$\alpha - A = pq, \qquad B - \beta = ps, \qquad C - \gamma = qt, \qquad \omega = st,$$

on a

$$\omega = 49,$$

c'est-à-dire

$$s = t = 7 \qquad (p = 3, \; q = 5).$$

L'égalité

$$\alpha = pq + \frac{\beta q}{s} + \frac{\gamma p}{t}$$

ou

$$29 = 15 + \frac{13 \times 5}{7} + \frac{11 \times 3}{7}$$

n'exige nullement que les deux dernières fractions se réduisent à des entiers.

Zéro.

Le calcul de M. A. Werebrusow paraît exact, mais il aurait fallu l'appliquer au cas de son équation (2); je crois avoir démontré que ce cas est le seul possible. En fait, il y a trois combinaisons :

$$z - y = n^{n\lambda-1} b^n, \qquad z - x = c^n, \qquad x + y = a^n,$$
$$z - y = b^n, \qquad z - x = c^n, \qquad x + y = n^{n\mu-1} a^n,$$
$$z - y = b^n, \qquad z - x = c^n, \qquad x + y = a^n;$$
$$x = n^\lambda b\beta, \qquad y = c\gamma, \qquad z = a\alpha,$$
$$x = b\beta, \qquad y = c\gamma, \qquad z = n^\mu a\alpha,$$
$$x = b\beta, \qquad y = c\gamma, \qquad z = a\alpha.$$

En effectuant le calcul dans le cas de la première combinaison, on trouve

$$\alpha = pq + \frac{n^\lambda \beta q}{s} + \frac{p\gamma}{t}, \qquad a = \frac{st}{\theta}, \qquad b = \frac{qt}{\theta}, \qquad c = \frac{ps}{\theta};$$

α est entier et premier à pq; de même ps est premier à β et qt à γ, de sorte qu'il faut avoir

$$p = tg, \qquad n^\lambda q = sf$$

ou

$$ps = stg, \qquad qt = \frac{tsf}{n^\lambda};$$

le plus grand commun diviseur de ps et de qt est donc $\frac{ts}{n^\lambda} = \theta$, c'est-à-dire que s est divisible par n^λ. On a alors

$$a = n^\lambda, \qquad b = f, \qquad c = n^\lambda g$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{1}{2}(n^{n\lambda} - n^{n\lambda} g^n + f^n),$$

$$y = \frac{1}{2}(n^{n\lambda} + n^{n\lambda} g^n - f^n),$$

$$z = \frac{1}{2}(n^{n\lambda} + n^{n\lambda} g^n + f^n).$$

Si l'on pose

$$R = \frac{1}{2}(n^{n\lambda} - n^{n\lambda} g^n - f^n), \qquad P = n^{n\lambda} g^n, \qquad Q = f^n,$$

on voit que

$$z = R + P + Q, \qquad y = R + P, \qquad x = R + Q,$$

comme je l'indiquais dans mon énoncé **612** sous la forme

$$a^p + b^p = c^p, \qquad c = x + y + z, \qquad b = x + z, \qquad a = x + y.$$

On n'est donc nullement conduit à la solution unique

$$a = 1, \qquad x = 0, \qquad y = 0$$

indiquée par M. Werebrusow. WORMS DE ROMILLY.

Autres réponses de MM. BROCARD, BINI et WEREBRUSOW.

Nous venons de recevoir d'autres Correspondants au moins trois nouvelles démonstrations erronées du dernier théorème de Fermat. Ce théorème est probablement un de ceux qui, comme celui relatif à l'impossibilité de la quadrature du cercle, ont donné lieu en Mathématiques au plus grand nombre d'essais malheureux. Cauchy lui-même s'y est trompé un moment (2855, **1904**, 285).

ED. MAILLET.

La réponse de M. A. Werebrusow ne me paraît pas exacte. Je crois que des équations (4) on ne peut tirer les conséquences que trouve l'auteur. D'autre part, j'observe que la dernière conséquence $a = 1$ s'applique à l'équation

$$x + y = a^n = 1;$$

mais on peut avoir aussi les égalités (2), et alors on a

$$x + y = n^{n\lambda-1} a^n$$

et pour $a = 1$

$$x + y = n^{n\lambda-1};$$

dans ce cas on ne peut dire $x = 0$ ou $y = 0$.

JUAN J. DURAN-LORIGA (La Corogne).

738. (**1896**, 32) (*Bettebar*). — (**1896**, 235; **1897**, 67). — A signaler l'Ouvrage de E. Desmarest, *Traité de l'Analyse indéterminée du second degré à deux inconnues,* suivi de l'application de cette Analyse à la recherche des racines primitives, avec une Table de ces racines pour tous les nombres premiers compris entre 1 et 10000.

A. GÉRARDIN.

960. (**1897**, 3; **1906**, 161) (BRICARD). — Pour que six droites appartiennent à un complexe linéaire, il faut et il suffit qu'elles puissent porter six forces en équilibre. Propriété connue. Elle résulte de ce que le déterminant des trente-six coordonnées de Plücker est nul; d'où

$$\Sigma\lambda_i X_i = 0, \qquad \dots, \qquad \Sigma\lambda_i N_i = 0.$$

DUBOUIS.

1109. (**1897**, 171; **1908**, 2) (*Rosace*) — Soient a, b, c les côtés d'un triangle astreint à la condition d'être inscrit dans une circonférence de rayon R.

Considérons d'abord le côté BC comme fixe et supposons que le sommet opposé A parcoure la circonférence d'un mouvement continu à partir du sommet C en commençant par le plus grand arc sous-tendu par BC.

A un déplacement angulaire infinitésimal $d\omega$ correspond pour b un accroissement

$$db = \mathrm{R}\cos\mathrm{B}\,d\omega,$$

d'où

$$c\,db = \mathrm{R}c\cos\mathrm{B}\,d\omega;$$

en même temps on a

$$b\,dc = -\mathrm{R}b\cos\mathrm{C}\,d\omega$$

(b et c positifs, B et C variant de 0 à π et devenant les angles extérieurs au triangle ABC, quand A passe du grand arc sous-tendu au petit).

Les intégrales définies

$$\int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} c\,db = \int_0^{2\pi} \mathrm{R}c\cos\mathrm{B}\,d\omega$$

et

$$\int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} (-b\,dc) = \int_0^{2\pi} \mathrm{R}b\cos\mathrm{C}\,d\omega$$

sont équivalentes et ont pour valeur commune

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{R}(c\cos\mathrm{B} + b\cos\mathrm{C})\,d\omega.$$

Mais

$$c\cos\mathrm{B} + b\cos\mathrm{C} = \pm a$$

suivant que A est sur le grand ou sur le petit arc; par suite l'intégrale ci-dessus devient

$$Ra(\pi - 2A).$$

Il reste à intégrer

$$Ra(\pi - 2A)\,da$$

ou

$$4R^3(\pi - 2A)\sin A \cos A\, dA,$$

quand a varie de o à $2R$ ou A de o à $\frac{\pi}{2}$.

Or, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4R^3(\pi - 2A)\sin A \cos A\, dA$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4R^3 2A \sin A \cos A\, dA$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R^3\pi \sin A \cos A\, dA = \int_0^1 \pi R^3 d(\sin^2 A) = \pi R^3.$$

Comme nous n'avons attribué à a, b, c que des valeurs positives, il y a lieu de multiplier cette quantité par 8 pour avoir le volume total

$$8\pi R^3.$$

ELSCH.

1149. (**1897**, 220; **1908**, 50) (LARONDE). — (**1908**, 131). — Il y aurait peut-être d'utiles indications dans ces deux Catalogues de Dulau et Cie (37, Soho Square, London, W.) :

1° List of the principal *continental* daily papers, *periodicals,* and magazines (8 pages);

2° *Catalogue of mathematical works* (178 pages d'Ouvrages en toutes langues). G. LEMAIRE.

1401. (**1898**, 266) (G. TARRY). — (**1899**, 142; **1904**, 17; **1907**, 272). — L'inverse du théorème de Fermat, traduction de l'article de M. Escott, a paru dans *S. Œ.* (¹) (janvier 1908, p. 146).

A. GÉRARDIN.

(¹) Cette abréviation désigne le journal *Sphinx-Œdipe*.

1774. (**1900**, 80) (E.-B. ESCOTT). — (**1900**, 380). — La traduction du Mémoire d'Euler sur les nombres amiables a été publiée en supplément dans la première année de *Sphinx-Œdipe*. — *Voir* aussi quelques recherches personnelles, *passim*. Les deux nombres amiables 6232 et 6368 donnent l'unique solution de la forme $8xy$ et $32z$. Consulter *S. Œ.*, avril 1906, p. 14. A. GÉRARDIN.

1882. (**1900**, 196) (E.-B. ESCOTT). — (**1901**, 183; **1902**, 16, 155; **1903**, 82; **1904**, 288). — Pour trouver quatre nombres tels que la somme de deux quelconques d'entre eux soit un cube, il faut résoudre

$$N = a^3 + b^3 = c^3 + d^3 = f^3 + g^3 = m + n + p + q.$$

On le voit facilement en partant des équations

$$m + n = a^3, \qquad n + p = g^3,$$
$$m + p = c^3, \qquad n + q = d^3,$$
$$m + q = f^3, \qquad p + q = b^3.$$

Si l'on demande que les six cubes soient tous positifs, la plus petite solution connue actuellement donne

$$m = 1\,250\,226\,932, \qquad p = 95\,345\,932,$$
$$n = 154\,701\,068, \qquad q = -92\,601\,932,$$
$$a = 1120, \qquad c = 1\,104, \qquad f = 1050,$$
$$b = 140, \qquad d = 396, \qquad g = 630.$$

La solution complète en entiers positifs ne se fera plus, espérons-le, longtemps attendre. A. GÉRARDIN.

2052. (**1901**, 82) (E.-N. BARISIEN). — *Évaluation graphique de* π. (**1901**, 268; **1907**, 81, 178). — Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne. — Dans le numéro d'août 1907 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (p. 179), un de vos Correspondants rappelle, pour la rectification approchée du cercle, une construction peu connue de Huygens, qui est fort simple en effet. Mais, de même que la plupart des constructions analogues, celle-ci n'est pas réversible, c'est-à-dire qu'elle ne permet pas, inversement, de porter sur un cercle donné un arc de longueur donnée, tracé qui, dans la pratique, n'a pas moins d'importance que le premier. Je crois donc devoir de nouveau faire

remarquer que la construction que j'ai donnée dans le numéro de janvier 1907 des *Nouvelles Annales* (p. 1) offre cet avantage de s'appliquer avec la même facilité au problème inverse qu'au problème direct.

D'OCAGNE.

2072. (**1901**, 108) (*H. Braid*). — (**1902**, 76, 158, 278). — M. Björnbo vient de publier la première partie du manuscrit de Rheticus, sous le titre de *Ioannis Verneri : De Triangulis Sphæricis, Libri quatuor; De Meteoroscopiis Libri sex, cum proemio Georgii Ioachimi Rhetici.* — I. *De Triangulis Sphæricis, herausgegeben von Axel Anthon Björnbo*, Leipzig, Teubner, 1907. C'est le premier fascicule du Tome XXIV des *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*; le Traité *De Meteoroscopiis*, deuxième partie du manuscrit de Rheticus, formera le deuxième fascicule du Tome XXIV des *Abhandlungen*. J'ai rendu un compte détaillé de la belle édition de M. Björnbo dans la *Revue des Questions scientifiques* (avril 1908) et un autre plus sommaire dans *Mathesis* (juin 1908). J'y renvoie le lecteur, me contentant de dire ici que la publication de M. Björnbo est une réponse adéquate à la question **2072**.

H. BOSMANS.

2074. (**1901**, 108) (G. DE ROCQUIGNY). — (**1906**, 239; **1907**, 273). — On a identiquement

$$(n+1)^5 - n^5 = \frac{(n^2+n)(n^2+n+1)}{2} + \frac{(3n^2+3n+1)(3n^2+3n+2)}{2} = S\,2\Delta.$$

Comme de plus 2^5 est la somme de trois triangulaires

$$2^5 = 32 = 1 + 10 + 21,$$

il en résulte qu'on a

$$n^5 = S(2n-1)\Delta.$$

Cette décomposition peut se faire de plusieurs manières, car on a encore

$$(n+1)^5 - n^5 = \frac{(n^2+4n+1)(n^2+4n+2)}{2} + \frac{(3n^2+2n-1)(3n^2+2n)}{2}.$$

MATHIEU.

2368. (**1902**, 144) (E.-B. Escott). — La plus petite solution de

$$N = u^3 + v^3 = w^3 + x^3 = y^3 + z^3,$$

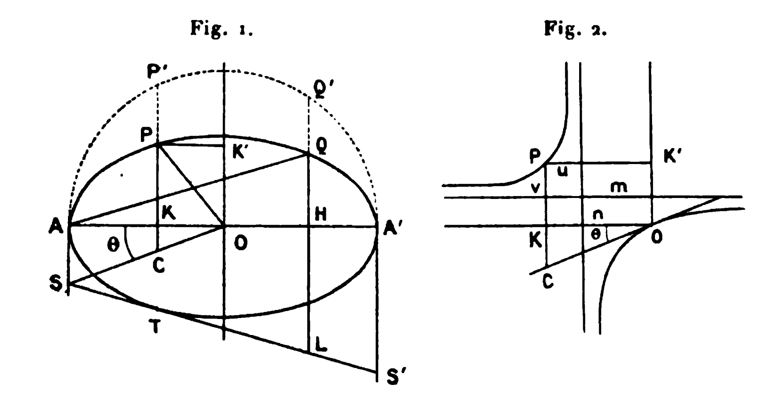
en entiers autres que l'unité, est probablement

$$u = 560, \quad x = 198,$$
$$v = 70, \quad y = 525,$$
$$w = 552, \quad z = 315.$$

A. Gérardin.

2670. (**1903**, 258) (T. Lemoyne). — *Normales menées d'un point à l'ellipse.* — Soient AQ une corde quelconque, OP le diamètre conjugué, OS un diamètre faisant avec OA l'angle dont la tangente est θ; par S je mène la tangente SS′ qui touche l'ellipse en T; j'abaisse de P les perpendiculaires PK, PK′ sur les axes; PK rencontre OS en C; enfin je mène QHL parallèle à PC.

Fig. 1. Fig. 2.



En se reportant à la figure correspondante P′, Q′, ..., dans le cercle principal, on écrit immédiatement les relations

$$(1) \qquad \overline{PK}^2 = \frac{b^2 \text{AH}}{2a}, \qquad \overline{PK'}^2 = \frac{a^2 \text{A'H}}{2a},$$

d'où résulte par multiplication

$$(2) \qquad \overline{PK}^2\, \overline{PK'}^2 = \frac{b^2}{4} \text{AH}.\text{A'H} = \frac{b^2}{4}\left(a^2 - \overline{OH}^2\right);$$

mais

$$(3)\qquad \mathrm{AH.A'H} = \frac{a^2}{b^2}\overline{\mathrm{QH}}^2;$$

donc aussi

$$(4)\qquad \overline{\mathrm{PK}}^2\,\overline{\mathrm{PK'}}^2 = \frac{a^2}{4}\overline{\mathrm{QH}}^2;$$

retranchant (4) de (2) après les avoir multipliées respectivement par $\frac{4}{b^2}$ et $\frac{4}{a^2}$:

$$(5)\qquad 4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\overline{\mathrm{PK}}^2\,\overline{\mathrm{PK'}}^2 = \overline{\mathrm{QH}}^2 + \overline{\mathrm{OH}}^2 - a^2 = \Pi^2,$$

en appelant Π^2 la puissance du point Q par rapport au cercle principal;

$$(6)\qquad \mathrm{PC} = \mathrm{PK} + \theta.\mathrm{PK'} = b\sqrt{\frac{\mathrm{AH}}{2a}} + a\theta\sqrt{\frac{\mathrm{A'H}}{2a}};$$

SS′ étant tangente à l'ellipse, $\mathrm{A'S'} = \frac{b^2}{a\theta}$ puisque $\mathrm{AS} = a\theta$; dans le trapèze ASA′S′ la considération des aires fait voir de suite que

$$(7)\qquad 2a.\mathrm{HL} = a\theta.\mathrm{A'H} + \frac{b^2}{a\theta}\mathrm{AH} \quad \text{ou} \quad \mathrm{HL} = a\theta\frac{\mathrm{A'H}}{2a} + \frac{b^2}{a\theta}\frac{\mathrm{AH}}{2a};$$

comme (3) donne

$$(8)\qquad 2a.\mathrm{QH} = 2b\sqrt{\mathrm{AH.A'H}} \quad \text{ou} \quad \mathrm{QH} = 2b\sqrt{\frac{\mathrm{AH}}{2a}\frac{\mathrm{A'H}}{2a}},$$

il vient, en ajoutant (7) et (8),

$$(9)\qquad a\theta = \frac{\overline{\mathrm{PC}}^2}{\mathrm{QL}}.$$

Si P est le pied de l'une des normales abaissées d'un point M d'une droite OM, et si OS est la tangente commune en O à toutes les hyperboles d'Apollonius des points de la droite OM, OS est la direction conjuguée à la perpendiculaire à OM et AT est par conséquent perpendiculaire à OM ; mais il est facile de voir qu'en chaque point P de l'hyperbole

$$\frac{\mathrm{PK.PK'}}{\mathrm{PC}} = m;$$

de ce fait et des relations (5) et (9) il résulte que, pour chacun des

quatre points Q,

$$\frac{\text{H}^2}{\text{QL}} = \text{const.},$$

ce qui établit la proposition.

Les égalités (2) et (4) montrent que, pour chacun des quatre points Q,

$$\frac{\overline{\text{QH}}^2}{\text{QL}} = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{\text{OH}}^2 - a^2}{\text{QL}} = \text{const.},$$

c'est-à-dire que par chaque série de quatre points Q passent une parabole tangente à SS' au point où cette droite coupe le grand axe de l'ellipse et ayant ce grand axe comme diamètre, et une parabole coupant SS' en deux points fixes, ayant le petit axe de l'ellipse comme diamètre et SS' comme direction conjuguée de ce diamètre.

ESPANET.

2893. (**1905**, 52) (*Matito*). — *Écrits récents sur l'aviation* (**1905**, 167; **1906**, 114; **1907**, 133). — *Les secrets du coup d'ailes,* par POMPÉIEN-PICAUD, Ouvrage paru en 1903 (l'auteur est mort le 26 janvier 1907).

Leçons sur la navigation aérienne, par MARCHIS (1904).
Les ballons dirigeables, par GIRARD et DE ROUVILLE (1907).
La conquête de l'air, par le Capitaine SAZERAC DE FORGE (1907).
Le problème de l'aviation et sa solution par l'aéroplane, par ARMENGAUD jeune (mai 1908).

(Le premier chez Bernard, le deuxième chez Dunod, les troisième et quatrième chez Berger-Levrault, le dernier chez Delagrave.)

A. GÉRARDIN.

2970. (**1905**, 265) (N. QUINT). — *Notice de Feuerbach* (**1906**, 253). — Il vient de paraître chez l'éditeur P. Visser, Haarlem (Pays-Bas), une seconde édition de la Notice célèbre de Feuerbach : *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte,* avec une liste chronologique sur le théorème de F. N. QUINT (La Haye).

3188. (**1907**, 75) (BAYLE). — *Équation différentielle.* (**1907**, 215;

227; **1908**, 7). — L'équation homogène

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(b-ax^2)y=0$$

admet les intégrales

$$e^{\frac{1}{2}x^2\sqrt{a}}\int_0^{\infty}e^{-\eta^2}\cos\left(2a^{\frac{1}{4}}x\eta\right)\eta^{\frac{b}{2\sqrt{a}}-\frac{1}{2}}\,d\eta,$$

$$e^{\frac{1}{2}x^2\sqrt{a}}\int_0^{\infty}e^{-\eta^2}\sin\left(2a^{\frac{1}{4}}x\eta\right)\eta^{\frac{b}{2\sqrt{a}}-\frac{1}{2}}\,d\eta$$

(*Rozpravy česk. Akad.*, 2ᵉ année, 1893, nº 9).

M. Lerch (Brünn).

3190. (**1907**, 75) (Nazarevsky). — *Congruence.* (**1908**, 137). — Cherchons à déterminer, si possible, deux nombres entiers x et y tels qu'on ait

$$(x+y\sqrt{b})^2\equiv a+\sqrt{b}\qquad(\mathrm{mod}\,p),$$

d'où

$$\left.\begin{matrix}2\;\;x^2\\ 2by^2\end{matrix}\right\}\equiv a\pm m\qquad(a^2-b=m^2).$$

La condition nécessaire et suffisante est que $a+m$ soit, en même temps que 2, ou résidu quadratique, ou non-résidu; il en sera, en effet, de même de $a-m$ et de

$$\frac{a\pm m}{b}.$$

Dans ce cas, on a

$$(a+\sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}}\equiv(x+y\sqrt{b})^{p-1}\equiv 1.$$

Sinon, soit α un non-résidu quadratique quelconque de p; alors

$$\frac{a+m}{2}\alpha\quad\text{et}\quad\frac{a-m}{2b}\alpha$$

sont résidus, et nous pourrons poser

$$\frac{a+m}{2}\alpha\equiv\mu^2,$$

$$\frac{a+m}{2b}\alpha\equiv\nu^2,$$

d'où

$$(\mu + \nu\sqrt{b})^2 \equiv \alpha(a + \sqrt{b}).$$

Mais

$$(\mu + \nu\sqrt{b})^{p-1} \equiv 1, \qquad \alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1;$$

donc

$$(a + \sqrt{b})^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1.$$

WELSCH.

3232. (**1907**, 126) (D.-J. KORTEWEG) (**1908**, 84). — Ma réponse (*loc. cit.*) ne donne qu'une approximation, que j'aurais dû éviter par simple analogie avec la réponse **3126** (**1908**, 65), où interviennent des arcs d'hyperboles; je la rectifie d'après les extraits suivants, communiqués par M. Korteweg, tirés du Tome XI, p. 219-225, de son édition des Œuvres complètes de Huygens.

Ce problème, qui a occupé Huygens à trois reprises (en 1650, en 1656 et en 1668), se réduit, comme il est aisé de le voir, à celui de mener les tangentes communes à deux hyperboles enveloppes de droites (FG) qui, avec deux droites fixes (DB, DE, d'une part; AB, AC, d'autre part), déterminent des triangles dont l'aire est donnée. Et la figure 4 (p. 224) montre que ce point de vue n'a pas échappé à Huygens.

Or, comme l'asymptote commune ADB compte pour deux de ces tangentes, il en reste deux à déterminer. Le problème est donc un *problème plan*, menant à une équation quadratique.

Posant

$$AB = a, \quad BC = b, \quad AC = c, \quad BD = d, \quad BE = e, \quad AG = x,$$

$$4d - 2a - \frac{d^2}{a} - \frac{de}{b} = f,$$

$$\frac{1}{2}a - \frac{de}{2b} = g,$$

l'équation du problème est

$$fx^2 + 2(a-d)cx - c^2 g = 0.$$

Huygens en a donné la construction. H. BROCARD.

3234. (**1907**, 147) (*Nester*). — *Nombres premiers* $2^n - 1$ (**1907**, 259, 287). — M. le lieutenant-colonel Allan Cunningham a récem-

ment trouvé que 150287 est diviseur de ($2^{143}-1$). Donc entre les 56 nombres (2^n-1), avec n premier, qu'on appelle *Nombres de Mersenne,* il n'en reste maintenant que 18 dont on ne sait pas le caractère, c'est-à-dire 17 qu'on suppose composés, et un seul (où $q = 257$) qu'on suppose premier. *Anonyme.*

3267. (**1907**, 194) (*E.-A. Majol*). — *Cercle de Feuerbach.* — Réponse de M. A. Schiappa Monteiro (Lisbonne), transmise à M. *E.-A. Majol.* LA RÉDACTION.

3314. (**1907**, 268) (M. STUYVAERT). — *Surface du troisième degré.* — En prenant pour origine des coordonnées le milieu des deux points fixes, pour axe des x la droite joignant les deux points, pour axe des y une perpendiculaire au plan parallèle à l'axe des x et à la droite fixe, pour axe des z une droite perpendiculaire aux deux précédentes, la surface a pour équation

$$ay \sin^2\theta(x^2+y^2+z^2-d^2)$$
$$= y^2 \sin^2\theta(n^2+a^2-d^2)+a^2z^2-2anyz\sin\theta\cos\theta:$$

d demi-distance des deux points fixes;
a longueur de la perpendiculaire commune à la droite fixe et à la droite joignant les points fixes;
n distance du pied de la droite fixe sur le plan des yz;
θ angle de la droite fixe avec le plan des xy. MATHIEU.

3332. (**1908**, 28). — (*Ixe*). — *Méthode des moindres carrés.* — (**1908**, 115). — Voici quelques références :

1805. LEGENDRE. — *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.*

1809. GAUSS. — *Theoria motus corporum cœlestium* (dont il existe une traduction annotée par Dubois, examinateur de la Marine).

1812. LAPLACE. — *Théorie analytique des probabilités.*

1823. GAUSS. — *Theoria combinationis observationis minimis erroribus obnoxiæ.*

1832. BIENAYMÉ. — *Probabilité des erreurs dans la méthode des moindres carrés.*

1853. BIENAYMÉ. — *Remarques sur les différences qui distinguent l'interpolation de Cauchy de la méthode des moindres carrés.*

1853. BIVER. — *Théorie analytique des moindres carrés.*

1863. KURS. — *Ueber die Methode der kleinsten Quadrate.*

1878. CATALAN. — *Remarques sur la théorie des moindres carrés.*

1883. EDGEWORTH. — *The method of least squares.*

1908. KOZAK. — *Grundproblem der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.*

TSINGUER. — *Théorie élémentaire de la méthode des moindres carrés.*

G. LEMAIRE.

3343. (**1908**, 51) (E. DUBOUIS). — *Théorème de Dirichlet.* — Réponse de M. E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich., États-Unis), transmise à M. Dubouis.

LA RÉDACTION.

3352. (**1908**, 53) (G. LEMAIRE). — *Théorème de Stewart* (**1908**, 160). — Ce théorème est dû à R. Simson, connu en Géométrie par la droite qui porte son nom. Les auteurs allemands et italiens désignent toujours ce théorème sous le nom de *Simson-Stewart.*

J. ROSE.

3353. (**1908**, 54) (GLEIZES). — *Intégrales définies* (**1908**, 162). — — L'intégrale

$$I_1 = \int_0^\infty \cos px \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^n dx$$

est un cas spécial d'une intégrale donnée sous forme finie par Poisson dans ses *Recherches sur la probabilité des jugements,* page 263. Nous avons

$$\frac{4}{\pi} 2^n \int_0^\infty \sin^n gx \cos \gamma x \sin \varepsilon x \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{A - A_1}{n!}$$

et $\varepsilon = g$;

$$\frac{4}{\pi} 2^n \int_0^\infty \left(\frac{\sin gx}{x} \right)^{n+1} \cos \gamma x \, dx = \frac{A - A_1}{n!}$$

si

$$A = \pm(\gamma + ng + \varepsilon)^n \mp n(\gamma + ng - 2g + \varepsilon)^n$$
$$\pm \frac{n(n-1)}{1.2}(\gamma + ng - 4g + \varepsilon)^n$$
$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\gamma + ng + 6g + \varepsilon)^n + \ldots$$

et A_1 = la valeur de A quand on y change le signe de g.

Bohren (Berne).

3354. (**1908**, 54) (E.-N. Barisien). — (**1908**, 163). — Ed. Lucas, dans ses *Recherches sur l'Analyse indéterminée et l'Arithmétique de Diophante* (Moulins, 1873), indique les théorèmes suivants :

La somme des cubes des p premiers nombres n'est jamais égale au cube, à la cinquième ou à la huitième puissance d'un nombre entier.

La somme des cubes des p premiers impairs n'est jamais égale à un cube, à un bicarré ou à une cinquième puissance.

La somme des cubes de trois nombres consécutifs n'est jamais égale à un carré, ou à un cube, ou à une cinquième puissance, en exceptant pour le cube la solution

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

On peut donc conclure qu'il faudra au moins quatre cubes consécutifs, le plus petit étant différent de l'unité, pour que leur somme puisse être un cube.

Voir le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville (1866, p. 179 et 183), qui indique

$$11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3,$$

ainsi que la formule suivante

$$(x+1)^3 + (x+2)^3 + \ldots + (x+n^3)^3 = \left[nx + \frac{n^3(n+1)}{2}\right]^3$$

en faisant

$$6x = (n^2 - 1)^2 - 3(n^2 + 1).$$

Ceci résulte des formules à l'aide desquelles Pagliani résolut le problème de *trouver mille cubes entiers consécutifs dont la somme soit un cube.*

Voir aussi *Annales de Mathématiques de Gergonne* (t. XX, p. 382-384) et *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française (t. I, vol. III, p. 34). A. GÉRARDIN.

3337. (1908, 73) (BARRIOL). — *Problème de probabilité.* — Le nombre des cas possibles est celui des combinaisons de N lettres m à m ou

$$\frac{N(N-1)\ldots(N-m+1)}{1.2\ldots m}.$$

Pour obtenir le nombre des cas favorables il suffit de former celui des combinaisons de b boules blanches p à p, c'est-à-dire

$$\frac{b(b-1)\ldots(b-p+1)}{1.2\ldots p}$$

et d'associer chacune d'elles à toutes les combinaisons $m-p$ à $m-p$ des $N-b$ boules noires restantes. Le produit de ces deux nombres ou

$$\frac{b(b-1)\ldots(b-p+1)(N-b)(N-b-1)\ldots(N-b-m+p+1)}{p!(m-p)!}$$

est le nombre des cas favorables. La probabilité cherchée a donc pour expression

$$\frac{b(b-1)\ldots(b-p+1)(N-b)(N-b-1)\ldots(N-b-m+p+1)}{N(N-1)\ldots(N-p+1)(N-p)(N-p-1)\ldots(N-m+1)}\,\frac{m!}{p!(m-p)!}.$$

PH. HATT.

Réponse identique de M. HENDLÉ, et réponses analogues de MM. BONNEAU DU MARTRAY, MATHIEU et WELSCH.

M. Bonneau du Martray ajoute :

« Soit

$$a = N - b, \qquad q = m - p.$$

» Dans le cas où les boules sont remises dans l'urne à mesure qu'elles sortent, la probabilité de sortie d'une blanche est constamment égale à $\frac{b}{N}$ et la probabilité contraire à $\frac{a}{N}$. On en déduit

$$\varpi = \left(\frac{b}{N}\right)^p \times \left(\frac{a}{N}\right)^q = \frac{b^p a^q}{N^m}$$

et

$$\Pi = \frac{m!\, b^p a^q}{p!\, q!\, N^m}.$$

» Cette dernière expression est d'ailleurs connue (*voir* notamment le *Calcul des probabilités* de Poincaré, 5ᵉ Leçon, § 3). »

BONNEAU DU MARTRAY.

3359. (**1908**, 73) (*Stenacensis*). — Dans un article de *Mathesis* (1896, p. 191) M. E. Fauquembergue a exposé une élégante démonstration de l'impossibilité de l'équation

$$x^3 + 2 = y^2 \quad \text{ou} \quad x^3 = y^2 - 2.1^2,$$

basée sur ce que, tout diviseur de $x^2 - 2z^2$ pouvant être représenté par $p^2 - 2q^2$ (ou $2b^2 - a^2$), il faudrait, en posant $x = p^2 - 2q^2$, identifier x^3 avec $y^2 - 2$ ou résoudre l'équation

$$3p^2q + 2q^3 = \pm 1,$$

ce qui est impossible.

L'équation n'a que la solution immédiate $x = -1$, $y = 1$.

E. Liminon.

Autres réponses de MM. A. GÉRARDIN et R. RAVASCO.

3366. (**1908**, 77) (MEHMED NADIR). — *Équation indéterminée.* — Posons

$$u = 2a + 1;$$

on obtient alors

$$v^3 - w^3 = 12a^4 + 24a^3 + 18a^2 + 6a + 1,$$

et si l'on fait

$$v = w + 1,$$

comme on sait que la différence de deux cubes consécutifs égale l'unité augmentée du sextuple d'un triangulaire, on s'aperçoit immédiatement que

$$2a^4 + 4a^3 + 3a^2 + a = 2(a+1)(2a^2 + 2a + 1)$$
$$= \frac{(2a^2 + 2a)(2a^2 + 2a + 1)}{2} = T.$$

Donc la solution la plus simple du problème est

$$u = 2a + 1,$$
$$w = 2a(a + 1),$$
$$v = 2a^2 + 2a + 1.$$

Ce problème a dû être amené par la Géométrie, car on remarque que v est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont w est le moyen côté et u le plus petit. A. GÉRARDIN.

Réponse de M. RAVASCO (Lisbonne), transmise à M. MEHMED NADIR. Même solution que ci-dessus de M. *Vieujeu*.

3367. (**1908**, 77) (MEHMED NADIR). — *Équation indéterminée.* — Si l'on pose $x = 2T$, on verra, comme dans le problème précédent, que $u = v + 1$.

On aura donc la solution générale suivante :

$$u = v + 1, \qquad T = \frac{v(v+1)}{2}, \qquad x = v(v+1).$$

A. GÉRARDIN.

Même solution de M. *Vieujeu*.

3369. (**1908**, 78) (WEINMEISTER). — *Épicycloïdes, hypocycloïdes.* — p et q étant supposés premiers entre eux, et $p > 0$, on peut supposer que q est soit > 0, soit < 0 suivant qu'il s'agit d'un roulement extérieur ou intérieur. — Les résultats demandés sont alors les suivants :

1° p impair :

classe = le plus grand des deux nombres p et $p + 2q$,

degré $= 2(p + q)$.

2° p pair :

classe = le plus grand des deux nombres $2p$ et $2(p + 2q)$,

degré $= 2(p + 2q)$.

Les rebroussements sont d'ailleurs sur la circonférence de base, de rayon $\frac{p}{q} r$.

Pour plus de détails, voir une série d'articles que j'ai publiés dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (Vuibert et Nony, août, septembre, octobre, novembre 1907). L. BICKART.



QUESTIONS.

3423. [I19c] Donner une méthode pour résoudre en nombres entiers le système

$$x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+w^3,$$
$$x+y+z=u+v+w,$$
$$xyz=uvw.$$

U. Bini (Rome).

3424. [I19c] Donner une méthode pour trouver une solution en nombres entiers du système

$$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2,$$
$$xyz=uvw.$$

U. Bini (Rome).

3425. [I19c] Résoudre en nombres entiers le système

$$x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+w^3,$$
$$xyz=uvw.$$

U. Bini (Rome).

3426. [I19c] Résoudre en nombres entiers le système (1)

$$x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+w^3,$$
$$x+y+z=u+v+w.$$

U. Bini (Rome), G. Lemaire.

3427. [I19c] Déterminer la solution de l'équation

$$x^4+y^4+z^4=u^4+v^4+w^4$$

(1) M. G. Lemaire signale la solution 1, 12, 15, 2, 10, 16.

de façon à pouvoir en déduire la solution des équations

$$\begin{aligned} x^4+y^4+z^4 &= u^4, \\ x^4+y^4 &= z^4, \\ x^4+2y^4 &= u^4+2v^4, \\ x^4+y^4+z^4 &= 3u^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

U. Bini (Rome).

3428. [**D1a**] On peut définir une fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$ par les conventions suivantes :

$$f(0) = \frac{0}{1}, \qquad f(1) = \frac{1}{1},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}, \qquad f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3},$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{0+1}{1+3} = \frac{1}{4}, \qquad f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5},$$

$$f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}, \qquad f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en général si

$$f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{a+1}{2^n}\right) = \frac{\alpha'}{\beta'},$$

α et β, α' et β' étant respectivement premiers entre eux,

$$f\left(\frac{2a+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'}.$$

La fonction ainsi définie est continue et croissante, mais elle n'a pas de dérivée.

Cette fonction a-t-elle été étudiée ?

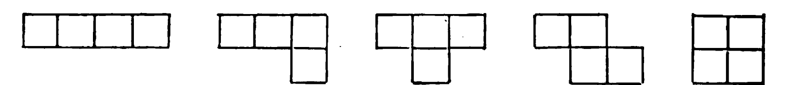
G. Quijano (Xérès).

3429. [**I1** et **X2**] M. D.-N. Lehmer, professeur à l'Université de Californie, prépare une Table de facteurs des

douze premiers millions (**3141**, **1907**, 225). Ce travail doit-il bientôt paraître? Où et à quelles conditions pourra-t-on se le procurer? A. GÉRARDIN.

· **3430.** [**Q4**] Combien de figures distinctes peut-on former avec n carrés, de sorte que chaque carré soit uni aux autres par un côté au moins? On ne considère d'autres figures distinctes que celles qui ne sont pas superposables.

Exemple. — Pour quatre carrés, les figures distinctes sont les cinq ci-jointes :



Je désire une formule générale ou une loi de récurrence si elle est possible.

Même question pour les triangles et les hexagones réguliers. G. QUIJANO (Xérès).

3431. [Σ] Extrait d'une lettre de M. A. Hurwitz en réponse à l'envoi de ma Note du *Bull. Soc. Math.*, t. XXXVI, 1908, p. 69-77 :

« Vos considérations conduisent à envisager la théorie des équations simultanées

$$\begin{cases} x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k = L, \end{cases}$$

ou, plus généralement,

$$\begin{cases} x_1^{n_1} + x_2^{n_1} + \ldots + x_k^{n_1} = N_1, \\ x_1^{n_2} + x_2^{n_2} + \ldots + x_k^{n_2} = N_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1^{n_a} + x_2^{n_a} + \ldots + x_k^{n_a} = N_a. \end{cases}$$

» Il paraît, il est vrai, difficile d'arriver à des résultats généraux pour de pareils systèmes d'équations, puisque le *problème de Waring* offre déjà de si grandes difficultés. »

Cette lettre me conduit à proposer les problèmes suivants qui généralisent celui de Waring :

Peut-on toujours prendre k assez grand pour que l'un des systèmes ci-dessus ait toujours une solution en nombres entiers (*n ou* n_1, n_2, ... *ayant des valeurs données* N, L *ou* N_1, N_2, ... *satisfaisant à certaines conditions*).

Voir à ce sujet les paragraphes III et V de ma Note précitée, et les diverses réponses à la question **2724** (**1904**, 33, 292; **1906**, 104; **1907**, 132; **1908**, 201).

Ainsi, prenant, dans le premier système, $n = 2$, $k = 4$, ce système admet toujours une solution quand N est impair et L impair compris entre $\sqrt{3N-2}-1$ et $\sqrt{4N}$ (Cauchy, *Exerc. de Math.*, t. I, p. 273). E. Maillet.

3432. [**Q4**] Découper un rectangle en n rectangles semblables à la figure primitive. Pour $n = 4^m$ on trouve aisément une solution applicable à tous les rectangles; quel doit être le rapport entre les côtés pour pouvoir obtenir d'autres solutions? Pour $n = 2$, 3, 4 j'ai trouvé 1, 4, 14 rapports, dont quelques-uns égaux aux rapports entre le rayon et les côtés des polygones réguliers.

J. Jonesco (Bucarest).

3433. [**I2b**] Quelles sont les propriétés connues appartenant à tous les nombres premiers et à un *seul* nombre composé. (*Voir*, par exemple, la question **1540** (**1899**, 148; **1900**, 33). J. Jonesco (Bucarest).

3434. [**V**] Où pourrai-je trouver la biographie de *Petrus de Dacia?* J. Jonesco (Bucarest).

3435. [**X2**] J'ai remarqué, dans les Tables à 7 décimales, que les séries de logarithmes de dernier chiffre n sont plus nombreuses et plus longues pour $n = 8$.

Il y a notamment, de 86808 à 86909, une série de 102 logarithmes terminés par 8.

Peut-on expliquer ce fait ? G. Lemaire.

3436. [**I19c**] Trouver les formules générales donnant les solutions entières de

1° $$v^4 + v^2 + v = 6561y^4 + 2916y^3 + 567y^2 + 63y + 3;$$

2° $$v^3 + y^3 + z^3 - t^2 = 0, \qquad (v+y)^2 + (z+y)^2 + (v+1)^2 - t^2 = 2;$$

3° $$3v(v^2 + 2) = x^2.$$

R. Ravasco (Lisbonne).

3437. [**G** et **I23**] Soient k quantités réelles ou complexes

$$\omega_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \qquad \omega_2 = \alpha_2 + \beta_2 i, \qquad \ldots, \qquad \omega_k = \alpha_k + \beta_k i,$$

entre lesquelles il n'existe aucune relation linéaire à coefficients entiers, et l'ensemble des points M

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_k\omega_k$$

du plan complexe, où $m_1, \ldots, m_k$ ont toutes les valeurs entières, positives ou négatives. On sait, lorsque $k \geqq 3$, que ces points ne sont pas isolés (C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. II, 1883, p. 306); en particulier, si les rapports

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\omega_k}{\omega_1}$$

sont tous réels, il y a un point M aussi voisin qu'on veut de tout point d'une certaine droite du plan passant par l'origine, c'est-à-dire que, en un certain sens, les points M recouvrent la droite.

A-t-on trouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait un point M aussi voisin qu'on veut de tout point du plan complexe, c'est-à-dire pour que les points M recouvrent le plan ?

Je ne demande qu'un renseignement bibliographique, car voici ma solution :

Soit

$$\delta_{jl} = \alpha_j \beta_l - \alpha_l \beta_j, \qquad \delta_{12} \neq 0, \qquad \theta_s \delta_{12} = \delta_{2s}, \qquad \theta'_s \delta_{12} = \delta_{s1};$$

si l'on n'a pas $k-2$ relations linéaires

$$\theta_3 - \mu\theta'_3 - C_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_k - \mu\theta'_k - C_s = 0,$$

à coefficients rationnels μ, C_3, ..., C_k, les points M recouvrent tout le plan; si l'on a $k-2$ relations de ce genre, les points M recouvrent une infinité de droites parallèles isolées équidistantes. Enfin, quand tous les δ_{jl}, y compris δ_{12}, sont nuls, les points M recouvrent une droite du plan.

E. Maillet.

3438. [I] Y a-t-il des nombres premiers qui ne peuvent diviser $a^3 b^2 - c^3 d^2$, a, b, c, d étant entiers, positifs, premiers entre eux deux à deux et différents de 1 ? Y a-t-il des nombres premiers qui ne peuvent pas diviser une infinité d'expressions de cette forme ? Dubouis.

3439. [I13] Connaît-on une forme plus simple que celle qui figure dans la *Théorie des nombres* de Legendre pour les diviseurs premiers d'une forme $x^2 - ay^2$?

Dubouis.

3440. [C2] M. Petit Bois, dans ses *Tables d'intégrales indéfinies*, donne la formule suivante (page 150, ligne 15) :

$$\int \log(a + \cos x)\, dx = \frac{1 + a\cos a}{a + \cos x},$$

qui est manifestement inexacte; comment doit-on la rectifier? Quelle est la formule exacte ? F. Godey.

3441. [K13c] *Trois théorèmes élémentaires sur le tétraèdre.* — 1° Dans un tétraèdre OABC, soit OA $= a$,

$OB = b$, $OC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$ et

$$\Delta(l, m, n) = \sqrt{p(p-l)(p-m)(p-n)},$$

où p est égal à $\frac{l+m+n}{2}$ [c'est-à-dire que $\Delta(l, m, n)$ égale l'aire du triangle dont les côtés sont l, m, n, si un tel triangle existe].

En observant qu'on a

$$16\Delta(l, m, n)^2 = -l^4 - m^4 - n^4 + 2m^2n^2 + 2n^2l^2 + 2l^2m^2,$$

on tire

$$\begin{aligned}\Delta(a_1, b_1, c_1)^2 + \Delta(a_1, b, c)^2 + \Delta(a, b_1, c)^2 + \Delta(a, b, c_1)^2 \\ = \Delta(a, b, c)^2 + \Delta(a, b_1, c_1)^2 + \Delta(a_1, b, c_1)^2 + \Delta(a_1, b_1, c)^2.\end{aligned}$$

2° Soit G le centre de gravité du triangle ABC; les droites AG, BG, CG sont supposées prolongées jusqu'aux milieux K, L, M des côtés opposés BC, CA, AB.

Au moyen du théorème des cosinus et du théorème des médianes on obtient

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3.OG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2,$$

ce qui est une généralisation du théorème des médianes.

Remarque. — Si P est le centre de gravité du tétraèdre et Q un point quelconque, on peut en déduire

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = 4.PQ^2 + PA^2 + PB^2 + PC^2.$$

3° En désignant par α_1 l'angle dièdre des plans OBC et ABC; par β_1 celui de OCA et ABC; par γ_1 celui de OAB et ABC, et posant

$$\widehat{OCA} = C_1, \quad \widehat{OCB} = C_2, \quad BCA = C_3, \quad 2C = C_1 + C_2 + C_3,$$

on a

$$\cos\alpha_1 = \frac{\cos C_1 - \cos C_2 \cos C_3}{\sin C_2 \sin C_3}$$

et, pour la hauteur h du tétraèdre,

$$h = \frac{2\Delta(a_1, b, c)\, 2\sqrt{\sin C \sin(C - C_1)\sin(C - C_2)\sin(C - C_3)}}{a_1 \sin C_2 \sin C_3}.$$

En tenant compte des égalités

$$\left\{\begin{aligned} a_1 c \ \sin C_2 &= 2\Delta(a_1, b, c),\\ b_1 c \ \sin C_1 &= 2\Delta(a, b_1, c),\\ a_1 b_1 \sin C_3 &= 2\Delta(a_1, b_1, c_1),\end{aligned}\right.$$

on obtiendra la hauteur

$$h = \frac{2c}{\sin C_3}\sqrt{\sin C \sin(C - C_1)\sin(C - C_2)\sin(C - C_3)}$$

et le volume

$$\begin{aligned} K &= \frac{h\,\Delta(a_1, b_1, c_1)}{3}\\ &= \frac{a_1 b_1 c}{3}\sqrt{\sin C \sin(C - C_1)\sin(C - C_2)\sin(C - C_3)}.\end{aligned}$$

Mais

$$h = \frac{2\sin\alpha_1}{a_1}\Delta(a_1, b, c),$$

d'où

$$K = \frac{2\Delta(a_1, b, c)\,\Delta(a_1, b_1, c_1)\sin\alpha_1}{3a_1},$$

ce qui constitue deux généralisations des théorèmes d'aires.

Ces théorèmes sont-ils connus?

Frans de Brun (Stockholm).

RÉPONSES.

1084. (**1897**, 145; **1907**, 241) (*Elgnairt*). — L'Ouvrage proposé serait très utile, mais qui voudra s'en charger?

En attendant sa venue, je conseillerai vivement de se référer aux monographies publiées par MM. J. Casey, Falisse, Lalbalettrier, Emmerich, Alasia, J. Neuberg. Elles contiennent tout ce que l'on peut raisonnablement désirer connaître sur la géométrie du triangle.

Pour plus de détails, on devra consulter les articles plus spéciaux dont les catalogues ont paru aux Annuaires de l'*A. F. A. S.* de Grenoble (1885), Paris (1889), Bordeaux (1895), Lyon (1906).

L.-N. Machaut.

2724. (**1904**, 33) (P.-F. Teilhet). — *Décomposition de tout nombre en une somme de k puissances $n^{\text{ièmes}}$ positives* (**1904**, 292; **1906**, 104; **1907**, 132). — Une série de nouveaux résultats ont été obtenus récemment au sujet de ce problème que j'ai appelé *problème de Waring*. Tout nombre entier est la somme d'un nombre limité de puissances $6^{\text{ièmes}}$ ($k \leqq 2451$) (A. Fleck, *Math. Ann.*, t. LXIV, 1907, p. 561), de puissances $8^{\text{ièmes}}$ (Hurwitz, *Math. Ann.*, t. LXV, 1908, p. 424-427; E. Maillet, *C. R.*, 30 déc. 1907, et *Bull. Soc. math.*, t. XXXVI, 1908), de puissances $10^{\text{ièmes}}$ (J. Schur et E. Landau, *Math. Ann.*, t. LXVI, 1908, p. 104). Tout nombre entier N est la somme d'au plus 9 cubes (Wieferich, *Math. Ann.*, t. LXVI, 1908, p. 95-101) et même, lorsque N *surpasse une certaine limite*, d'au plus 8 cubes (E. Landau, *loc cit.*) : 23 n'est pas somme de moins de 9 cubes. Enfin, pour une infinité de nombres N, on a $k \geqq n+1$, quel que soit $n \geqq 2$ (Hurwitz, Maillet).

On trouvera en particulier dans l'article de M. Hurwitz des indications pouvant aider à traiter d'autres cas du problème de Waring.

Voir encore question 3431 (**1908**, 195). E. Maillet.

3174. (**1907**, 51) (A. Simionov). — Pour intégrer $x^m \operatorname{tang} x$, m étant quelconque, le mieux sera sans doute de recourir au déve-

loppement en série. On aura dès lors

$$x^m \tang x = 2^2(2^2-1)B_1 x^{1+m}$$
$$+ 2^4(2^4-1)B_2 \frac{x^{3+m}}{4!} + 2^6(2^6-1)B_3 \frac{x^{5+m}}{6!} + \ldots,$$

B_i désignant les nombres de Bernoulli. L'intégration peut donc être faite, mais on ne voit pas quelle nouvelle transcendante représente le résultat. *E. Liminon.*

3234. (**1907**, 147) (*Nester*). — (**1907**, 259, 287). — La liste des nombres premiers (2^n-1) (**1907**, 259) est incomplète. Il faut y ajouter :

N est premier pour $n = 1, 2, 127$.

Le dernier résultat ($n = 127$) est dû à feu Ed. Lucas.

A. Cunningham (Angleterre).

3248. (**1907**, 169) (E.-N. Barisien). — (**1908**, 68, 139). — Réponse de M. J. Rose, communiquée à M. Barisien. La Rédaction.

3252. (**1907**, 171) (*Eix*). — L'auteur de la question ayant visé l'emploi des termes de *ligne de terre* dans la Perspective, je lui signalerai que, dans l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert (1778), au mot *Ligne,* on trouve :

Ligne de terre ou *fondamentale,* en Perspective, c'est une *ligne droite* dans laquelle le plan géométral (plan horizontal) et celui du tableau (plan vertical) se rencontrent; telle est la ligne NI (*Pl. persp., fig.* 22) formée par l'intersection du plan géométral LM et du plan perspectif HL.

Dans la *Fortification* de Henry Hondius, traduite du flamand par A. G. S. (1625, La Haye), l'Instruction sur la Perspective désigne la ligne de terre sous les noms de *ligne base, linea basis* et *linea horisontis.*

Dans la *Géométrie descriptive* de G. Monge, 5e édition augmentée d'une Théorie des ombres et de la Perspective extraite des papiers de l'auteur par Brisson (Paris, 1827), il n'est pas fait de désignation de la ligne de terre. Celle-ci est seulement marquée LM sur toutes les épures. Il semble donc que Monge n'ait jamais employé la désignation de « ligne de terre », et pourtant elle était connue bien antérieurement. H. Brocard.

Autre réponse étendue de M. A. SCHIAPPA MONTEIRO, qui a été communiquée à M. *Eix*, ainsi que celle de M. BROCARD, et dont nous publierons au moins un extrait ultérieurement. LA RÉDACTION.

3297. (**1907**, 243) (*Picpus*). — *Équation indéterminée* (**1908**, 41, 143). — Réponse de M. A. CUNNINGHAM (Angleterre) communiquée à M. *Picpus*. LA RÉDACTION.

3302. (**1907**, 244) (*Arcitenens*). — *Équation indéterminée* (**1908**, 45, 144). — Réponse de M. A. CUNNINGHAM (Angleterre) communiquée à M. *Arcitenens*. LA RÉDACTION.

3343. (**1908**, 51) (E. DUBOUIS). — On trouvera peut-être des indications à ce sujet dans les études citées à l'occasion d'une question analogue proposée sous le n° **2389** (**1903**, 148). L'auteur, M. Maillet, y a répondu accessoirement, page 288, en signalant incidemment une contribution nouvelle de M. E. Landau : *Uber die Primzahlen einer arithm. Progression*, 2 avril 1903 (*S. A. W.*, t. CXII, 1903, p. 493-535).

Nous croyons utile d'ajouter un détail bibliographique : c'est que le célèbre Mémoire de Dirichlet paru en allemand aux *Abhandl. k. Preussen Akad. Berl.* (1837, p. 45-71), a été traduit en français et publié au *J. M.* (1839, p. 393-422). *Vieujeu.*

3343. (**1908**, 51) (E. DUBOUIS). — Je ne connais pas d'études relatives aux congruences à modules premiers

$$\tfrac{1}{2}C^{1}_{2h}x^{h-1}+\tfrac{1}{5}C^{4}_{2n+1}x^{h-2}+\ldots+1\equiv 0 \qquad [\bmod\,(6h+1)],$$

$$\tfrac{1}{1}x^{h-1}+\tfrac{1}{4}C^{3}_{2h}\quad x^{h-2}+\ldots+1\equiv 0 \qquad [\bmod\,(6h-1)].$$

La question revient d'ailleurs à résoudre les quatre ou cinq premières équations particulières des deux types ci-dessus considérés, savoir (sauf vérification) :

$$2x+1=13m,$$
$$3x^2+7x+1=19m,$$
$$5x^4+66x^3+99x^2+26x+1=31m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x+1=11m,$$
$$x^2+5x+1=17m,$$
$$x^3+14x^2+12x+1=23m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'équation

$$3x^2 + 7x + 1 = 19m$$

se ramène à

$$108m + 37 = t^2,$$

résolue par $t = 19, 35, 73, 143, \ldots$, valeurs qui satisfont aux relations

$$35 = 2.19 - 3,$$
$$73 = 2.35 + 3,$$
$$143 = 2.73 - 3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'équation

$$x^2 + 5x + 1 = 17m$$

se ramène à

$$68m + 21 = t^2,$$

résolue par les valeurs de t égales à $34n + 15$ et $34n + 19$.

Recta.

3369. (**1908**, 78) (Weinmester). — *Epicycloïdes, hypocycloïdes.* (**1908**, 192). — Soient :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - f(\varphi) = 0$$

et

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - f_1(\varphi) = 0$$

les équations de deux droites rectangulaires d'une figure plane mobile. Les coordonnées du centre instantané de rotation : x_1, y_1 par rapport aux axes fixes, ξ_1, η_1 par rapport aux deux droites mobiles,

$$\xi_1 = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - f, \qquad y_1 = -x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi - f_1,$$

sont données par les équations

$$-x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi - f' = \eta_1 + f_1 - f' = 0$$
$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi + f'_1 = \xi_1 + f'_1 + f = 0.$$

Pour que le mouvement s'obtienne par le roulement d'un cercle de rayon r sur un cercle de rayon R, il faut et suffit que

$$(1) \qquad (f_1 - f')^2 + (f'_1 + f)^2 = r^2, \qquad f'^2 + f'^2_1 = R^2.$$

D'où, en dérivant,

$$(f_1 - f')(f'_1 - f'') + (f'_1 + f)(f''_1 + f') = 0, \qquad f'f'' + f'_1 f''_1 = 0;$$

et, en éliminant f''_1,

$$(f'_1 - f'')(f_1 f'_1 + f f')\frac{1}{f'_1} = 0.$$

La relation $f'_1 - f'' = 0$ n'offre aucun intérêt géométrique. La relation $f_1 f'_1 + ff' = 0$, donne $f_1^2 + f^2 = a^2$, a étant une constante, puis $f = a\cos\omega$, $f_1 = a\sin\omega$, ω étant une fonction de φ; substituant dans les équations (1), il vient

$$a^2\omega'^2 = R^2, \qquad a^2(1+\omega')^2 = r^2,$$

$$(R^2 - r^2)\omega'^2 + 2R^2\omega' + R^2 = 0, \qquad \omega' = \frac{R}{\varepsilon r - R},$$

ε désignant $+1$ ou -1;

$$\omega = \omega'\varphi + \varphi_0, \qquad a = \frac{R}{\omega'},$$

$$f = \frac{R}{\omega'}\cos(\omega'\varphi + \varphi_0), \qquad f_1 = \frac{R}{\omega'}\sin(\omega'\varphi + \varphi_0).$$

Pour un système de valeurs de R, r, il y a deux valeurs pour ω', $\frac{q}{p-q}$, $\frac{-q}{p+q}$, $\frac{r}{R}$ étant égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$. Les coordonnées d'un point du cercle roulant r sont données par les équations

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{R}{\omega'}\cos(\omega'\varphi + \varphi_0) = r\cos\alpha,$$

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{R}{\omega'}\sin(\omega'\varphi + \varphi_0) = r\sin\alpha,$$

en fonction rationnelle de $e^{\psi i}$ en posant $\varphi = (p-q)\psi$, ou $\varphi = (p+q)\psi$ suivant les cas; et l'on est ramené à la théorie des courbes unicursales. α est une constante.

A. Pellet.

3373. (**1908**, 97) (E. Dubouis). — *Expression simple de*

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^3}.$$

Cf. réponse 3339 (**1908**, 119-120). — Les réponses à la question 201

(**1894**, 220-222) pourront convenir à la question 3375. En effet, on y rencontre les formules suivantes :

$$\lim \sum_1^\infty \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^3}{25,79436} = 1,2020569\ldots,$$

$$\sum_1^p \frac{1}{n^3} = C - \frac{C_2}{(p+1)(p+2)} - \frac{C_3}{(p+1)(p+2)(p+3)} - \ldots,$$

avec

$$C = \sum_1^\infty \frac{1}{n^3} = 1,2020569,$$

$$C_n = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{n}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right).$$

E. Liminon.

La formule d'Euler et Maclaurin nous donne tout ce qui est nécessaire pour le calcul numérique de $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^3}$. Nous avons

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^3} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^3} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{12n^6} - \frac{1}{12n^8} + - \ldots$$

et

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^3} = 1,20257.$$

Bohren (Berne).

3377. (**1908**, 97) (E. Dubouis). — Je signalerai quatre listes relatives aux nombres de Bernoulli : Ohm. — *Liste des* 31 *premiers nombres de Bernoulli* (*Cr.*, t. **20**, 1840).

J.-C. Adams. — *Table of the values of the first sixty two numbers of Bernoulli* (*Cr*, t. 85, 1878, p. 269-272).

J. W. L. Glaisher. — Voir *Trans. Cambr. Phil. Soc*, t. XII, 1873, p. 384-391, où se trouve une liste des 250 premiers nombres de Bernoulli et de leurs logarithmes.

J. Houel. — *Logarithmes des* 31 *premiers nombres de Bernoulli* (*Recueil de formules et de Tables numériques*, 1885, p. 60).

Devignot.

Des Tables des nombres de Bernoulli ont été données par :

J.-C. Adams, *Table des* 62 *premiers nombres de Bernoulli* (*Journal de Crelle*, t. 85).

S.-Z. Sserebrennikov. — *Table des* 90 *premiers nombres de Bernoulli* (*Petersburger Abhandlungen*, 8ᵉ série, t. XVI. nº 10).

Bohren (Berne).

Extrait d'une réponse analogue de M. O. Degel :

La bibliographie est tirée de :

E. Pascal. — *Repertorium der hœheren Mathematik*, I. Theil, Leipzig, B.-G. Teubner, 1900, p. 473.
Voir aussi :

J. Worpitzky. — *Studien ueber die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen*, (*Cr.*, t. 94, 1883, p. 203-232).

O. Degel (Bayreuth).

Dans l'*Analisi algebrica* de E. Cesaro, on trouve une Table des 28 premiers nombres bernoulliens.

Hermite, dans le *Journal de Crelle* (1874), a fait des recherches sur les parties entières de ces mêmes nombres. *Voir* également une Note de Lipschitz dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (1886).

D'autre part on a le théorème suivant de Staudt et Clausen : *Tout nombre de Bernoulli* B_{2n} *est égal à un nombre entier diminué de la somme des inverses de tous les nombres premiers qui, diminués de* 1, *divisent* $2n$. Par ce théorème Adams a pu (*Journal de Crelle*, 1878) achever une Table de nombres bernoulliens commencée par Ohm et qui va jusqu'à B_{124}. Pour se rendre compte de la difficulté matérielle de ce calcul, il suffit de savoir que le numérateur de B_{100} a plus de 80 chiffres.

J. Rose.

Voir le *Formulario matematico*, de G. Peano, 5ᵉ édition, 1908, Turin, Fratelli Bocca, éditeurs, page 132 où se trouve une Table des 30 premiers nombres de Bernoulli.

Euler a désigné ces nombres par B_1, B_3. B_5, ...; le *Formulaire* précité les indique par B_1, B_2, B_3, ... (notation de Binet, Ohm, Markoff),

Une bibliographie de ces nombres a été publiée dans l'*American Journal of Mathematics*, Baltimore, 1882, t. V, p. 228.

G. PAGLIERO (Turin).

[Extrait d'après l'italien. (LA RÉD.)]

Autre réponse de M. R.-D. Carnichael (U. S. A.) qui renvoie à la table des 62 premiers nombres de Bernoulli publiée par Adams dans le *Report of the British Association for* 1877. LA RÉDACTION.

3382. (**1908**, 99) (A. BUHL). — L'équation différentielle donnée peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}+f\frac{df}{dy}\right)+f\frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dx}+f\frac{df}{dy}\right)=\frac{df}{dy}\left(\frac{df}{dx}+f\frac{df}{dy}\right);$$

elle admet donc comme solution particulière la solution générale de celle-ci :

$$\frac{df}{dx}+f\frac{df}{dy}=0.$$

Or, cette solution générale est fournie, par le système d'équations

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{f}=\frac{df}{0},$$

qui donne $J=fx+F(f)$. WELSCH.

3385. (**1908**, 100) (E.-B. ESCOTT). — *Polynome.* — x^3-x-1 a ses racines inégales; soient u, v, w ces racines. On a

$$\Sigma u=0,\qquad \Sigma vw=-1\qquad (uvw=1),$$

d'où

$$\Sigma u^2=2,\qquad \Sigma v^2w^2=1,$$

comme on le voit en faisant les carrés de Σu et Σvw. On a aussi

$$\Sigma vw^2=vw(w+v)+wu(u+w)$$
$$+uv(v+u)=-vwu-wuv-uvw=-3.$$

Ainsi $\Sigma vw^2=-3$. Posons

$$X_0=au^2+bu+c,\qquad X_1=av^2+bv+c.\qquad X_2=aw^2+bw+c.$$

Pour que $X^3 - X - 1$ soit divisible par $x^3 - x - 1$, il faut et il suffit qu'il s'annule pour $x = u$, v et w. On a donc trois égalités telles que

$$X_0^3 - X_0 - 1 = 0.$$

Donc l'équation en X : $X^3 - X - 1 = 0$ doit admettre comme racines X_0, X_1 et X_2 et l'on devra donc avoir

$$\Sigma X_0 = 0, \qquad \Sigma X_1 X_2 = -1, \qquad X_0 X_1 X_2 = -1.$$

La première équation donne

(1) $$2a + 3c = 0.$$

La seconde donne

$$a^2 \Sigma v^2 w^2 + ab \Sigma v w^2 + 2ac \Sigma u^2$$
$$+ b^2 \Sigma vw + 2bc \Sigma u + 3c^2 + 1 = 0;$$

autrement dit

$$a^2 - 3ab + 4ac \cdot b^2 + 3c^2 + 1 = 0.$$

En éliminant a entre cette équation et (1), on obtient

(2) $$4b^2 - 18bc + 3c^2 = 4,$$

d'où

(3) $$b = \frac{9c \pm \sqrt{69c^2 + 16}}{4}.$$

Enfin la relation $X_0 X_1 X_2 = -1$ donne

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + a^2 c - a^2 b - b^2 c + 2ac^2 - 1 = 0,$$

ou, en se servant de (1) pour éliminer a,

(4) $$8b^3 - 8cb^2 + 18c^2 b - 25c^3 - 8 = 0.$$

En éliminant b entre cette équation et (2) il vient une équation qui se décompose en $c = 0$ et

$$\overline{23}^2 c^5 + (23 \times 8)c^3 + (23 \times 8)c^2 + 16c + 32 = 0,$$

qui peut s'écrire

(5) $$(23c^2 + 4)(23c^3 + 4c + 8) = 0:$$

c étant trouvé, on a a et b par (1) et (3). Cependant il y aura à vérifier s'il n'y a pas de solutions étrangères.

C'est ainsi que pour $c = 0$, ce qui donne $a = 0$, $b = \pm 1$, on doit prendre seulement $b = +1$ et rejeter $b = -1$. Dubouis.

Autre réponse de M. Werebrusow.

3386. (**1908**, 100) (O. Degel). — *Équation différentielle.* — On pose $x = -u^2$, $y = -v^2$, ce qui donne $(v\,du - u\,dv)^2 = du^2 + dv^2$, puis

$$u = \rho \cos\omega, \qquad v = \rho \sin\omega,$$

ce qui amène une séparation de variables; enfin $\rho = \frac{1}{t}$, ce qui donne $d\omega = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. La solution devient alors facile. Dubouis.

Si, dans l'équation différentielle

$$(1) \qquad y(y+1)\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x(x+1)\,dy^2 = 0,$$

nous remplaçons x par x^2, y par y^2, elle deviendra, après suppression du facteur x^2y^2, qui donne les solutions singulières $x = 0$, $y = 0$,

$$(2) \qquad (y^2+1)\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + (x^2+1)\,dy^2 = 0$$

ou

$$(x\,dy - y\,dx)^2 + dx^2 + dy^2 = 0.$$

On pourrait transformer en coordonnées polaires, ce qui conduirait à une quadrature connue, mais il saute aux yeux que $dx^2 + dy^2$ est le carré d'un arc infinitésimal et $x\,dy - y\,dx$ le double de l'aire du triangle ayant pour base cet arc et pour sommet l'origine des coordonnées, de sorte que la tangente est à une distance de l'origine constante et égale à $\sqrt{-1}$.

Il en résulte que l'équation différentielle transformée (2) admet comme solution singulière le cercle $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et comme solution générale

$$\sqrt{\alpha}\,x + \sqrt{\beta}\,y + \sqrt{\gamma} = 0,$$

α, β, γ étant trois constantes arbitraires dont la somme est nulle.

Par suite l'équation (1) a comme solution singulière

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y + 1 = 0,$$

et sa solution générale est

$$\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\beta y} + \sqrt{\gamma} = 0 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 0).$$

On remarquera que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ satisfaisant à l'équation (1) sont égales lorsqu'on a

$$x^2 y^2 = y(y+1)x(x+1)$$

ou

(3) $$xy(x+y+1) = 0,$$

c'est-à-dire que les courbes qu'elle représente sont tangentes aux droites

(4) $$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y + 1 = 0,$$

auxquelles il faut joindre la droite de l'infini, puisque les termes du quatrième degré ont disparu dans l'équation (3).

Ces courbes sont les paraboles inscrites dans le triangle formé par les droites (4) et ont bien pour équation

$$\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\beta y} + \sqrt{\gamma} = 0 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 0).$$

Welsch.

Autres réponses de MM. D. Sintsof et Werebrusow.

3387. (**1908**, 101) (O. Degel). — L'étude des lignes asymptotiques des surfaces du troisième ordre a été traitée à diverses reprises par M. Ch. Bioche :

Sur les surfaces algébriques qui admettent comme asymptotique une cubique gauche (*Comptes rendus*, t. CXXV, 1897, p. 15-16).

Recherches sur les surfaces algébriques qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche (*S. M.*, t. XXVI, 1898, p. 217-232).

Mémoire sur les surfaces du troisième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche (*S. M.*, t. XXVII, 1899, p. 96-113).

Devignot.

On sait déterminer (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*) les asymptotiques de certains types de surfaces : surfaces tétraédrales



de Lamé, surfaces du type

$$x = A(t-a)^m(t_1-a)^n,$$
$$y = B(t-b)^m(t_1-b)^n,$$
$$z = C(t-c)^m(t_1-c)^n,$$

surfaces minima, etc. Il suffit donc de chercher parmi ces dernières celles qui sont du troisième ordre. *Voir* également les Mémoires de S. Lie et de M. Demoulin sur les surfaces minima réglées. Si mes souvenirs sont exacts, on a publié, il y a quelques années, quelques Notes relatives à la question des asymptotiques dans le *Bulletin de la Société mathématique de France.* J. Rose.

3388. (**1908**, 101) (R. Ravasco). — *Équations indéterminées.* — Il n'existe pas de nombres entiers (x, y) qui satisfont à cette question, excepté lorsque

$$b^2 = (2\beta)^2 = 4\xi\eta, \qquad \beta^2 = \xi\eta,$$
$$a = \xi^2 + \eta^2,$$

où b est un entier pair $= 2\beta$, et ξ, η sont cofacteurs entiers quelconques de β^2 (où ξ peut être égal à l'unité).

En ce cas seul $x = \xi, y = \eta$ (tous les deux sont entiers).

Allan Cunningham (Angleterre).

Système à solutions entières. — On prendra $x \gtreqless y$.

Pour que le système ait des solutions entières, il faut et il suffit que b soit pair et que $a + \frac{b^2}{2}$ et $a - \frac{b^2}{2}$ soient des carrés. Si ces carrés sont s^2 et d^2, on a $s = x + y$, $d = x - y$, d'où x et y. On peut aussi chercher les expressions de a et b pour que le problème soit possible. On trouve facilement les relations

$$a = \frac{s^2 + d^2}{2}, \qquad b^2 + d^2 = s^2.$$

Or, on sait que cette dernière donne : soit

$$b = p\frac{u^2 - v^2}{2}, \qquad d = puv, \qquad s = p\frac{u^2 + v^2}{2};$$

soit

$$b = q\alpha\beta, \qquad d = q\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}, \qquad s = q\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}.$$

Dans le premier cas, nous poserons

$$u + v = 2\alpha, \qquad u - v = 2\beta;$$

dans le deuxième cas nous remarquerons que q doit être pair pour que a, x et y soient entiers et nous poserons $q = 2p$. Alors les deux cas conduisent aux mêmes formules

$$a = p^2(\alpha^4 + \beta^4), \qquad b = 2p\alpha\beta \qquad x = p\alpha^2, \qquad y = p\beta^2,$$

DUBOUIS.

M. O. Degel (Bayreuth), indique les solutions

$$a = q^2(p^4 + 1), \qquad b = 2pq, \qquad x = \varepsilon p^2 q, \qquad y = \varepsilon q, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

LA RÉDACTION.

Une réponse plus détaillée de MM. DEGEL, GLEIZES, QUIJANO (Xérès) et DUBOUIS a été transmise à M. Ravasco, ainsi que des réponses de MM. J. Rose (Chimay) et WELSCH.

Autres réponses de MM. GÉRARDIN et *L.-N. Machaut*.

LA RÉDACTION.

Résolution du système (a et b étant entiers)

(1) $$x^2 + y^2 = a,$$

(2) $$\sqrt{4xy} = b.$$

L'équation (2) montre que b est pair. Posant donc $b = 2c$ et résolvant, on trouve les solutions

(3) $$\begin{cases} 2x = \sqrt{a + 2c^2} + \sqrt{a - 2c^2}, \\ 2y = \sqrt{a + 2c^2} - \sqrt{a - 2c^2}. \end{cases}$$

Le problème revient donc à chercher pour quelles valeurs de a et de c les expressions $\sqrt{a + 2c^2}$ et $\sqrt{a - 2c^2}$ seront entières.

c étant un entier quelconque, les valeurs suivantes satisfont au

système

(I) $$\begin{cases} a = 2c^2, \\ b = 2c, \\ x = y = c \end{cases}$$

et

(II) $$\begin{cases} a = c^4 + 1, \\ b = 2c, \\ x = c^2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Si c est pair et égal à $2n$, on a la solution particulière suivante

$$c = 2n, \qquad a = 4(n^4 + 1) = \frac{c^4}{4} + 4,$$
$$b = 4n \qquad = 2c,$$
$$x = 2n^2 \qquad = \frac{c^2}{2},$$
$$y = 2 \qquad = 2.$$

Stenacensis.

3391. (**1908**, 102) (J. Diaz de Rabágo). — *Construire un triangle, connaissant b, c, r.* — Au moyen des formules

$$S = pr, \qquad S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

on trouve pour a une équation identifiable avec l'équation *générale* du troisième degré. Donc le problème ne peut pas être résolu avec la règle et le compas. Voici une méthode graphique : La distance tangentielle des cercles inscrit et ex-inscrit dans l'angle A est $|b - c|$. Soient O et I les centres de ces cercles respectifs et E, D eurs points de contact avec BC. Un premier lieu de A est la conjuguée harmonique de DO par rapport à DB et DI. Un second lieu est la cubique lieu des points A tels qu'on ait $AO.AI = bc$, le point O étant fixe et I décrivant la perpendiculaire à BC en D.

Dubouis.

I. Le lieu des sommets M des triangles ayant une base donnée AB et un cercle inscrit (ou ex-inscrit) donné est une cubique ayant trois asymptotes rectilignes et un axe de symétrie.

L'intersection de cette courbe avec les circonférences de rayon b ayant A ou B pour centres déterminera les sommets M cherchés.

Le problème n'est donc pas quadratique.

II. b, c, r étant les données et a l'inconnue, posons

$$a + b + c = 2p;$$

nous aurons

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2 r^2,$$

d'où l'équation

$$p^3 - 2(b+c)p^2 + [(b+c)^2 + bc + r^2]p - bc(b+c) = 0,$$

ou

$$a^3 - (b+c)a^2 + [4r^2 - (b-c)^2]a \\ + (b+c)[4r^2 + (b-c)^2] = 0.$$

Celle-ci devient, pour le triangle isoscèle,

$$a^3 - 2ba^2 + 4r^2 a + 8br^2 = 0,$$

comme on peut le retrouver par la trigonométrie.

Ainsi, même dans ce cas particulier, le problème n'est pas quadratique. *L.-N. Machaut.*

La question comporte douze solutions qu'on obtient analytiquement au moyen de quatre équations du troisième degré. Elles ne sont pas résolubles géométriquement par la règle et le compas.

P. Hendlé.

La solution développée de MM. Dubouis et P. Hendlé a été transmise à M. Diaz de Rabago, ainsi que des solutions de MM. P. Barbarin, G. Lemaire et Welsch. La Rédaction.

3395. (**1908**, 121) (W. Gaedecke). — L'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \mathrm{A} x^n y$$

et ses variétés ont été étudiées avec plus ou moins de développement par H.-F. Scherk (*Cr.*, t. 10, 1833), R. Lobatto (*Cr.*, t. 17, 1837), E.-E. Kummer (*Cr.*, t. 19, 1839, et *J. M.*, t. IV, 1839), E. Catalan (*B. A. B.*, 3e série, t. XII, 1886), de Tilly (*Ibid.*).

Dans une lettre du 4 juillet 1886, de Tilly annonçait à E. Catalan

qu'il savait intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \mathrm{A} x^m y,$$

m étant quelconque.

Je n'ai pu vérifier si de Tilly a publié la démonstration qu'il annonçait à ce moment. *L.-N. Machaut.*

3402. (**1908**, 124) (Mathieu). — Question posée déjà sous le n° 907 (**1896**, 201). *Voir* **1896**, 244; **1897**, 90.

Multipliant la relation de l'énoncé par $(m+1)$, on voit qu'elle revient à $(1-a)^{m+1}$ pour $a=1$. *Vieujeu.*

Réponses analogues de MM. P. Barbarin, Barriol, A. Boutin, Dubouis, Gleizes, Hendlé, Petitbois, Plakhowo, Werebrusow.

3403. (**1908**, 124) (*Agnès Morri*). — Pour des questions tout à fait analogues proposées dans l'*Intermédiaire*, voir :

587 (**1895**, 201; **1896**, 91, 188; **1897**, 61); 1534 (**1899**, 146; **1899**, 264; **1900**, 33, 66, 314; **1901**, 68); 2303 (**1902**, 68; **1903**, 185); 2496 (**1902**, 321; **1903**, 172, 315).

On y retrouvera les sujets, pour ainsi dire, de la question 3403.

Les deux découpages supérieurs sont indiqués par Ed. Lucas (*Récréations mathématiques*, t. II, 1883, p. 130). L'auteur les donne comme variante de l'antique démonstration hindoue appelée aussi *Chaise de la petite mariée*. On les rencontrera aussi dans la *Revue scientifique* des 25 mars 1899 et 23 mars 1901 (Dalsème, C.-A. Laisant), ainsi que dans la *Takitechnie* de Lagout (Paris, 1881), p. 1, 7, 13, 22, 102, 115.

Les deux découpages inférieurs sont indiqués par M. Cellérier (**1903**, 173) et dans les *Exercices de Géométrie* de F. G. M., 4e éd., 1907, p. 725, mais cette combinaison est plus ancienne, car elle se trouve dessinée au n° 436 (19 août 1865) du *Monde illustré*, dans un article de M. A. Hermant intitulé : *Plus de pont aux ânes.* D'après le chroniqueur, elle doit être attribuée à un lieutenant-colonel d'Artillerie. *Dr Charbonier.*



QUESTIONS.

3142 [Σ] *Prix de la Société royale des Sciences de Göttingen pour la démonstration du théorème de Fermat.* — M. le Dr Paul Wolfskehl, de Darmstadt, a légué 100000 marks (*cent mille*) pour la fondation d'un prix à décerner à celui qui le premier démontrera le grand théorème de Fermat. Il s'agit d'établir l'impossibilité en nombres entiers de l'équation indéterminée $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ pour les exposants λ impairs, quand x, y, z sont $\neq 0$, comme l'affirme Fermat, ou de déterminer les valeurs de λ pour lesquelles il est valable, en complétant les recherches de Kummer (*Crelle's Journal*, t. **40**, p. 136 et suiv., *Abh. der Akad. der Wiss. zu Berlin*, 1857). Consulter encore Hilbert, *Theorie der algebraischen Zahlkörper* (*Jahresb. der deutschen math. Vereinigung*, t. IV, 1894-1895, § **172-173**, et *Encyclopädie der math. Wiss.*, t. I (Arithmetik und Algebra), 2e Partie, 1900-1904, IC4*b*, p. 713.

La Société refuse les manuscrits; elle ne prend en considération que les travaux parus dans les journaux périodiques ou en volumes mis en vente dans les librairies. La décision de la Société ne devra être rendue que deux ans au plus tôt après la publication du travail à couronner.

Le concours est ouvert jusqu'au 13 septembre 2007.

Pour plus de détails, voir *Math. Ann.*, t. LXVI, 1908, p. 143, ou *Nachrichten von der kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen*, p. 103 des *Geschäftliche Mitteilungen*.

C'est ici l'occasion de rappeler qu'on pourra trouver des renseignements bibliographiques complémentaires dans les réponses à **314** (**1894**, 179; **1895**, 117, 359; **1905**, 11; **1906**,

99) et **612** (**1895**, 281; **1908**, 81, 174); dans l'article intitulé *Propositions élémentaires de la théorie des nombres*, de P. Bachmann et E. Maillet, de l'édition française J. Molk de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, vol. III, fasc. **1**; enfin dans un article de E. Maillet paru dans les *Comptes rendus du Congrès des Mathématiciens de Paris* (1900), 1902, p. 425.

E. MAILLET.

3443 [Σ] (**1903**, 7, 39; **1904**, 1, 113, 260; **1905**, 6; **1906**, 1, 198; **1907**, 2, 146, 268; **1908**, 4).

Prix académique. — Académie royale des Sciences exactes, physiques et naturelles de Madrid.

Exposition claire et simple du Calcul des probabilités. (Les formules d'Analyse supérieure et les Tables numériques pourront être reléguées dans un Appendice à l'Ouvrage.)

Conditions du concours (voir **1908**, 4).

Clôture au 31 décembre 1909.

(D'après l'*Annuaire de l'Académie pour* 1908, p. 299-300.)

H. BROCARD, LA RÉDACTION.

3444 [**V**] Je sais par le *Génie civil* du 15 août 1908 qu'une *méthode graphique pour le calcul des ponts en maçonnerie à plusieurs arches*, du professeur W. RITTER (application de l'*ellipse d'élasticité*), a été exposée dans le même Journal en 1903 (t. XLII, n° **10**, p. 153). Je désirerais savoir où l'on pourrait trouver l'exposé et la démonstration *complète* de la méthode, et si l'*Intermédiaire* pourrait au besoin m'indiquer les Ouvrages à consulter.

BOUTELOUP.

3445. [**I23a**α] Le développement en fraction continue de la forme $a + \frac{t}{a_1} + \frac{t}{a_2} + \ldots$ d'une racine réelle d'une équation quadratique à coefficients entiers est-il toujours pério-

dique, quel que soit le nombre fixe t, étant entendu que les quotients incomplets a_n sont systématiquement pris les plus approchés possibles par défaut? ou bien cette propriété est-elle spéciale à certaines valeurs du module t? [Modification de la question **2954** (**1905**, 200; **1906**, 28, 119, 217; **1907**, 84, 223; **1908**, 232.)]
Rudis.

3446. [P6] E. Olivier, dans ses *Développements de Géométrie* (Paris, 1843, p. 133) a appliqué la transformation géométrique d'un point de coordonnées cartésiennes (x, y) dans le point de coordonnées polaires (ρ, ω) définie par les formules $x = \rho\omega$, $y = \rho$. Il a ajouté en note (p. 134) : « C'est en 1817, lorsque j'étais sous-lieutenant d'artillerie à l'École d'application de Metz, que j'ai trouvé cette transformation remarquable de la spirale d'Archimède. Ampère, alors inspecteur général de l'Université, étant venu à Metz, je lui fis part de mes résultats; aussitôt il me dit que cette propriété lui était connue, mais qu'il ne pouvait me dire dans quel Ouvrage il l'avait lue; mais que très certainement pour lui elle n'était pas nouvelle. Et longtemps après cette époque, Ampère n'a jamais pu retrouver dans sa mémoire le nom de l'auteur qui le premier avait donné cette transformation. »

Quelque correspondant connaît-il ce nom?

G. Loria (Gênes).

3447. [A3] Soit l'équation

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 \frac{x_3}{6} + a_4 \frac{x^4}{24} = 0.$$

La transformée, en posant $y = -x^2$, a pour premiers termes

$$a_0^2 + (a_1^2 - a_0 a_2) y + (3 a_2^2 - 4 a_1 a_3 + a_0 a_4) \frac{y^2}{12} + \ldots.$$

Le coefficient de $\frac{y^2}{12}$ est précisément l'invariant du second

ordre S de la fonction :

(2) $$a_0 + 4a_1 X + 6a_2 X^2 + 4a_3 X^3 + a_4 X^4.$$

Posant $z = -y^2 = -x^4$, on obtient pour premiers termes de la transformée

$$a_0^4 + \left[(a_1^2 - a_0 a_2)^2 - \frac{a_0^2 S}{6}\right] z + \ldots.$$

Si l'équation (1) a toutes ses racines réelles, $a_1^2 - a_0 a_2$, S et $6(a_1^2 - a_0 a_2)^2 - a_0^2 S$ sont des quantités positives; or il en est de même pour l'équation (2), sauf que dans la dernière formule il faut changer 6 en 12,

$$12(a_1^2 - a_0 a_2)^2 - a_0^2 S$$

(Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 122). Y a-t-il une raison *a priori* à ces analogies de formules?

A. Pellet.

3448. **[M¹4]** Quelles sont les propriétés particulières des courbes d'ordre n à $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles?

Pour faciliter la réponse, je rappelle que ces courbes ont été étudiées, en particulier, par Clebsch (*Crelle*, t. 64, 1865, p. 210, et t. 73, 1871, p. 189), ainsi que par M. G. Humbert dans plusieurs Mémoires.

T. Lemoyne.

3449. **[K20]** Rendre calculables par logarithmes

$$C_k^1 \cos\frac{2h\pi}{k} + C_k^2 \cos\frac{4h\pi}{k} + C_k^3 \cos\frac{6h\pi}{k} + \ldots$$
$$+ C_k^{\frac{k-1}{2}} \cos\frac{(k-1)h\pi}{k},$$

si k est impair, et

$$C_k^1 \cos\frac{2h\pi}{k} + C_k^2 \cos\frac{4h\pi}{k} + \ldots + C_k^{\frac{k}{2}-1} \cos\frac{-2h\pi}{k} + \frac{(-1)^h}{2} C_k^{\frac{k}{2}},$$

si k est pair.

Dubouis.

3450. [**D2c**] La proposition suivante est-elle exacte? Si dans le produit

$$\prod_{h=0}^{h=2n-1}\left[(-1)^h\left(2\cos\frac{h\pi}{2n}\right)^{2n}-1\right]$$

n représente successivement les termes d'une progression arithmétique, le produit prend des valeurs aussi grandes qu'on veut, à moins que la progression ne contienne que des multiples de 3. Dans ce cas le produit est nul.

Dubouis.

3451. [**I3**] Étant donné un nombre premier n, trouver la solution générale de la congruence à deux inconnues

$$1^x+2^x+3^x+\ldots+y^x\equiv 0 \pmod{n},$$

ou des solutions présentant quelque généralité, en dehors du cas connu suivant :

$$y=n-1, \qquad x\not\equiv 0 \pmod{n-1}.$$

Dubouis.

3452. [**I22b**] Je veux chercher les diviseurs premiers de la norme d'un nombre complexe relatif à $x^n=1$, sans former cette norme, ces diviseurs étant de la forme $kn+1$. Dans ce cas, la règle donnée par Kummer (*J. de Liouville*, 1851, p. 417) est illusoire. Y a-t-il une autre règle pouvant simplifier les calculs? Traiter aussi le cas où n n'est pas premier.

Dubouis.

3453. [**I1**] Connaît-on une formule donnant le nombre des chiffres du nombre formé par le produit des n premiers nombres entiers?

E.-N. Barisien.

3454. [**I1**] La somme des chiffres d'un nombre N, puissance entière de 9, est un multiple de 9. Y a-t-il une loi de formation de ces multiples? Par exemple, quels sont les

nombres $N = 9^p$ dont la somme des chiffres est de 18? Il en est ainsi pour p égal à 3, 4 et 6. E.-N. Barisien.

3455. [I1] Plus généralement on pourra se poser la question suivante : Si n est un nombre quelconque, peut-il y avoir un nombre *illimité* de valeurs de p telles que la somme des chiffres de n^p ait une valeur donnée A?

É. Maillet.

3456. [Σ] Dans sa réponse à 2855 (1907, 31) M. J. Hadamard signale « les lacunes graves que renferme la démonstration par laquelle Cauchy a voulu établir le théorème sur l'égalité des polyèdres convexes : *Deux polyèdres convexes qui ont les faces égales chacune à chacune et assemblées de la même façon sont égaux ou symétriques* ». M. Hadamard ajoute : « L'avenir montrera sans doute qu'il n'y a pas erreur à proprement parler, en ce sens que le théorème est probablement exact. Mais, jusqu'à présent, on ne doit point le considérer comme démontré, et la réfection de cette démonstration serait une tâche digne de tenter les chercheurs. »

J. Hadamard, La Rédaction.

3457. [V9] Je connais des traductions en italien et en allemand de la *Geométrie descriptive* de Monge. Et je désirerais connaître s'il y a des traductions dans d'autres langues et, dans le cas affirmatif, avoir des indications bibliographiques exactes à ce sujet. Gino Loria (Gênes).

3458. [V] Je désirerais connaître la liste des Ouvrages, français de préférence, qui permettent de s'initier rapidement à la théorie *géométrique* des complexes et des congruences. J. Rose.

RÉPONSES.

687. (**1895**, 401; **1896**, 7) (*Anonyme*). — (**1896**, 137, 234; **1897**, 64, 202; **1900**, 409; **1902**, 239; **1903**, 281; **1904**, 193; **1905**, 151, 223). — J'ai déjà communiqué à l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (**1904**, 193) deux formules approchées pour mesurer la périphérie de l'ellipse. Or, de nouveaux aperçus sur les relations géométriques de la parabole avec la sinusoïde m'ont amené à modifier la dernière de ces formules en faisant

$$\varphi = \text{arc}\sin\frac{2}{3}\times\frac{a-b}{a+b} : \text{arc}\sin\frac{2}{3}$$

dans l'équation

$$E = \pi(a+b) + \varphi(a-b)(4-\pi).$$

L'approximation qu'on obtient ainsi est toujours plus grande et le calcul en est simplifié. Mais le degré de cette approximation n'est pas constant; il varie pour chaque ellipse et atteint son maximum lorsque le rapport du petit axe au grand axe est environ $\frac{7}{15}$.

On peut juger de ces variations par le Tableau suivant, où je donne (pour une série d'ellipses ayant toutes l'unité comme demi-grand axe) la longueur de b avec celle du quadrant elliptique approché et, en regard, les premiers chiffres exacts de $\frac{E}{4}$, obtenus par le calcul analytique :

$b =$ 0,9.............	1,4932 (8)	$\frac{E}{4}$ 1,49329
0,7.............	1,3455 (8)	1,34559
0,5.............	1,2110 (4)	1,21105
0,49............	1,20477 (1)	1,204777
0,467...........	1,190527 (2)	1,1905274
0,4667..........	1,1903434	1,1903434
0,4666..........	1,190282 (2)	1,1902820
0,466...........	1,189914 (3)	1,1899140
0,46............	1,18624 (7)	1,186244

$b = 0,44$............	1,1741 (6)	$\frac{E}{4}$ 1,17415
0,4.............	1,150 (7)	1,1506
0,2.............	1,050 (8)	1,0505
0,1.............	1,01 (6)	1,01599

Jules Camus (Turin).

876. (**1896**, 175; **1906**, 84) (V. Retali). — *Courbes planes à un point double* (**1908**, 103).

F. Dingeldey. — *Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt* (*M. A.*, t. XXVII, 1886, p. 272-276).

F. Dingeldey. — *Zur Construction der Hesse'schen Curve der rationalen Curven dritter Ordnung* (*M. A.*, t. XXVIII, 1887, p. 81-83).

F. Dingeldey. — *Ueber die Transformation der Gleichung der ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt auf die Normalform* (*M. A.*, t. XXXI, 1888, p. 177-182).

H. Durège. — *Ueber fortgesetztes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte* (*M. A.*, t. I, 1869, p. 509-532).

E. Weyr. — *Ueber die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte* (*M. A.*, t. III, 1871, p. 235-237).

H. Wieleitner. — *Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von* 1890-1904 (*Beilage zum Jahresbericht des K. human. Gymnasiums zu Speyer für das Schuljahr* 1904-1905. Leipzig, 1905, G.-J. Gœschen).

O. Degel (Bayreuth).

973. (**1897**, 6; **1906**, 162) (A. Boutin). — *Congruence* (**1908**, 103). — Voici quelques solutions, quelle que soit l'entrée n, pour la congruence proposée :

$$7^{26n+4} + \overline{13}^{13n+2} + \overline{17}^{26n+12} + \overline{23}^{4n+2} \equiv 0 \pmod{53},$$

$$2^{5n+3} + 5^{3n+1} + \overline{11}^{30n+2} + \overline{13}^{30n+19} \equiv 0 \pmod{31},$$

$$2^{9n+4} + 7^{24n+6} + 19^{36n+8} + 43^{24n+12} \equiv 0 \pmod{73},$$

$$2^{36n+10} + 3^{27n+8} + 5^{27n+6} + 7^{27n+1} \equiv 0 \pmod{109},$$

et ainsi de suite.

Ces congruences ne peuvent se partager en deux autres.

Mehmed-Nadir (Alep).

1073. (**1897**, 123; **1907**, 97) (*Onponale*). — *Triangles équilatéraux inscrits ou circonscrits à une conique.* — I. Une conique étant donnée, on peut lui inscrire deux triangles équilatéraux ayant leurs côtés parallèles à ceux d'un triangle équilatéral donné, car c'est là un cas particulier du problème : *Inscrire dans une conique un triangle dont les côtés passent respectivement par trois points donnés en ligne droite;* et ce problème admet, comme on sait, deux solutions.

Comme encore, d'une façon générale, le côté d'un triangle équilatéral inscrit à une conique ne peut passer à l'infini, il résulte de ce qui précède que l'enveloppe de chaque côté est une conique.

Les coniques ainsi trouvées sont-elles distinctes, ou bien n'en forment-elles qu'une seule?

Dans le dernier cas, on ne pourrait prendre un point quelconque de la conique donnée que comme sommet d'*un seul* triangle équilatéral inscrit, tandis que ce point l'est de *trois* triangles différents qu'on obtient en faisant tourner la conique donnée d'un angle de 60°, dans un sens ou dans l'autre, autour du point considéré comme pivot, et en prenant ses intersections avec sa position initiale; par conséquent, l'enveloppe de chaque côté est distincte.

Pour obtenir le lieu du centre, il n'y a qu'à transporter l'origine au point (α, β), ce qui donne pour équation de la conique (supposée une ellipse rapportée primitivement à ses axes)

$$b^2x^2 + a^2y^2 + 2b^2\alpha x + 2a^2\beta y + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 0,$$

puis à couper par le cercle

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

en posant $z = x + iy$, d'où $x - iy = \frac{R^2}{z}$, et

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \qquad y = -\frac{i}{2}\left(z - \frac{R^2}{z}\right);$$

substituant dans l'équation de l'ellipse, on obtient l'équation en z

$$z^4 - 4\frac{b^2\alpha - ia^2\beta}{c^2}z^3 - 2[2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2) - (a^2 + b^2)R^2]z^2 - 4\frac{b^2\alpha + ia^2\beta}{c^2}R^2z^2 + R^4 = 0,$$

qui doit être de la forme

$$(z^2 - u)(z - v) = z^4 - vz^2 - uz + uv = 0.$$

On est ainsi conduit aux conditions

$$2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2) = (a^2 + b^2)R^2,$$

$$u = 4\frac{b^2\alpha + ia^2\beta}{c^2}R^2, \qquad v = 4\frac{b^2\alpha - ia^2\beta}{c^2}, \qquad uv = R^4,$$

dont la dernière, en tenant compte des valeurs de u et de v, devient

$$16(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2) = c^4R^2.$$

L'inconnue R^2 s'élimine immédiatement et l'on trouve pour l'équation cherchée

$$c^4(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2) - 8(a^2 + b^2)(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2) = 0.$$

II. Les sommets des triangles équilatéraux circonscrits se meuvent soit tous les trois sur la courbe d'où l'ellipse est vue sous un angle de 60°, c'est-à-dire sur l'ovale extérieure de la quartique bicirculaire

$$3(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 - (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0,$$

l'ellipse étant alors *inscrite* au triangle, soit un seulement sur cette ovale et les deux autres sur l'ovale intérieure, l'ellipse étant *exinscrite*. Une tangente quelconque à l'ellipse est un des côtés de quatre triangles équilatéraux, dans l'un desquels l'ellipse est inscrite, tandis qu'elle est exinscrite aux trois autres. Les quatre points de rencontre de la tangente avec les ovales de la quartique, naturellement séparés en deux couples, s'associent non seulement par couples pour déterminer des triangles équilatéraux circonscrits, mais encore d'un couple à l'autre, quoique des deux manières possibles une seulement puisse être adoptée.

La détermination du lieu du centre s'effectuerait par une voie toute semblable à celle qui a été suivie précédemment. L'élimination entre l'équation tangentielle de l'ellipse

$$a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 - \nu^2 = 0$$

et celle d'un cercle quelconque

$$(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu)^2 - r^2(\lambda^2 + \mu^2) = 0$$

de la variable v fournit l'équation aux coefficients angulaires

$$\left(\theta = -\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

des tangentes communes aux deux courbes, et il suffit d'écrire que cette équation est de la forme

$$[m(\theta^3 - 3\theta) - n(3\theta^2 - 1)](\theta - t) = 0,$$

pour obtenir cinq conditions entre les quatre paramètres arbitraires m, n, r^2, t, c'est-à-dire finalement une condition entre les variables α, β qui est l'équation du lieu. Mais les calculs, s'ils sont exempts de difficultés, offrent quelque longueur et quelque complication; ils ne sauraient donc être développés ici. *E.-A. Majol.*

1138. (**1897**, 217; **1908**, 49) (Lémeray). — Désignons par $f(x, y)$ une fonction qui peut être exprimée à l'aide des symboles énumérés dans la question et employés un nombre fini de fois. Je dis que la fonction y définie par l'équation

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

satisfait à la condition imposée.

En effet, l'équation (1) sera de la forme

$$\varphi(x, u_1, u_2, \ldots, u_k, y) = 0, \tag{2}$$

φ étant une fonction algébrique et u_1, u_2, ..., u_k des fonctions transcendantes de x et y.

Cela posé, on ne retire pas de généralité à la fonction y, si l'on suppose que φ soit une fonction rationnelle et entière, car on peut toujours la ramener à cette forme en multipliant l'équation (2) par un facteur convenable.

En même temps, on aura

$$\begin{aligned} u'_1 &= \varphi_1(x, u_1, u_{11}, u_{12}, \ldots, y', y), \\ u'_2 &= \varphi_2(x, u_2, u_{21}, u_{22}, \ldots, y', y), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u'_k &= \varphi_k(x, u_k, u_{k1}, u_{k2}, \ldots, y', y), \end{aligned}$$

φ_1, φ_2, ..., φ_k étant des fonctions algébriques et u_{11}, u_{12}, ..., u_{21}, u_{22}, ..., u_{k1}, u_{k2}, ..., des fonctions transcendantes de x et y moins compliquées que u_1, u_2, ..., u_k.

En dérivant l'équation (2), on obtiendra donc une équation algébrique en $x, y, y', u_1, u_2, \ldots, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{21}, u_{22}, \ldots$ qui pourra être ramenée aussi à la forme rationnelle et entière.

Chacune des fonctions $u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{21}, u_{22}, \ldots$, pourra donner par de nouvelles dérivations d'autres fonctions plus simples u_{111}, $u_{112}, \ldots, u_{121}, \ldots$, et ainsi de suite; mais le nombre des fonctions transcendantes ainsi déterminées sera forcément limité. Désignons-le par n.

Or, en dérivant $n+1$ fois l'équation (2), on aura $n+1$ équations entre lesquelles et l'équation (2) on pourra éliminer x et les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_{11}, \ldots, u_{111}, \ldots$. Le résultat contiendra seulement y et ses dérivées. C. Q. F. D.

Si y est définie par deux ou plusieurs équations ordinaires ou différentielles à l'aide d'une ou de plusieurs variables auxiliaires, la même démonstration est applicable. G. Quijano (Xérès).

1202. (**1898**, 4) (*Mire*). — *Construction géométrique* (**1898**, 155; **1900**, 202). — Réponse de M. Paulmier, transmise à M. *Mire*.

La Rédaction.

1246. (**1898**, 53) (G. de Rocquigny). — (**1898**, 189). — La pensée de Fénelon (*loc. cit.*) se rencontre dans les premières lignes d'un texte ancien : *Petri Abelardi Dialectica. Pars quarta.*

H. Brocard.

1622. (**1899**, 200) (Jonesco). — (**1908**, 132). — La question est exacte; on peut trouver des solutions parmi les nombres de 4, 5, 6, ... chiffres. On a, par exemple, la solution

$$9 \times 1089 = 9801, \qquad 4 \times 2178 = 8712,$$
$$2178 = 2 \times 1089.$$

J'ai proposé la question de *trouver les nombres qui, multipliés par* 9, *donnent pour produits les mêmes nombres renversés,* dans *Mathesis* (voir *Solution,* année 1898, p. 27), et la même question pour le multiplicateur 4 dans *Gazeta matematica* de Bucarest (*Solution,* 1898, p. 287). La comparaison des expressions obtenues pour les nombres cherchés conduit à la question **1622**. J'ai demandé la démonstration directe et la généralisation.

J. Jonesco (Bucarest).



1896. (**1900**, 238) (*Neisirab*). — Je ne crois pas que l'étude ici proposée ait fait l'objet de quelque article. Cependant elle pourra profiter de plusieurs résultats indiqués par E. Eckhardt (*Z. H.*, t. XXXIV, 1903, p. 335; t. XXXV, 1904, p. 123; t. XXXVI, 1905, p. 84), résumés d'ailleurs par M. J. Neuberg, dans une Note intitulée : *Propositions sur les quatrièmes puissances des côtés d'un triangle* (*M.*, 1905, p. 259-262). *Devignot.*

1969. (**1900**, 358) (Werebrusow). — *Équation indéterminée* (**1906**, 143). — Autre réponse de M. Werebrusow.

La Rédaction.

1972. (**1900**, 359) (H. Brocard, E. Maillet). — *Travaux sur la topologie des courbes algébriques* (**1908**, 133).

Ch.-A. Scott. — On the circuits of plane curves (*Trans. Am. Math. Soc.*, t. III, 1902, p. 388-398).

Ch.-A. Scott. — Note on the real inflexions of plane curves (*Ibid.*, p. 399-400).

F. Schuh. — Eene realiteitsvergelijking voor bestaanbare en onbestaanbare vlakke krommen met hoogere singulariteiten (*Versl. Ak. Amst.*, t. XII, 1904, p. 845-854). Il donne une extension de la relation de M. F. Klein à des courbes douées de singularités supérieures. H. Wieleitner (Spire).

2226. (**1901**, 277) (E.-N. Barisien). — *Billards rectangulaires.* — Réponse de M. H. Brocard, transmise à M. Barisien.

La Rédaction.

2325. (**1902**, 93) (E.-N. Barisien). — *Sur un théorème de Géométrie élémentaire* (**1902**, 200; **1903**, 19). — Réponse de M. G. Lemaire, transmise à M. Barisien. La Rédaction.

2552. (**1903**, 71) (*Artigensis*). — *Ondes liquides* (**1904**, 51, 153). — Autre réponse de M. Brocard, transmise à M. *Artigensis*.

La Rédaction.

2566. (**1903**, 101) (Paulmier). — *Courbe d'ombre de l'hélicoïde* (**1903**, 223; **1907**, 274). — Autre réponse de M. Paulmier.

La Rédaction.

2693. (**1903**, 300) (G. PICOU). — *Discriminant.* — Réponse de M. H. BROCARD, qui renvoie à l'*Encyclopédie fr. all.*, t. I, vol. III, *Théorie des nombres*, p. 101, et vol. II, p. 100).

LA RÉDACTION.

2793. (**1904**, 138) (V. AUBRY). — (**1904**, 297; **1905**, 58, 83, 136). — Je crois qu'une réponse complète, qui d'ailleurs exigerait trop de développement pour pouvoir être insérée ici, est donnée par le Chapitre nouvellement publié de l'*Encyclopédie fr.-all. des Sc. math.* intitulé : *Nombres complexes, d'après E. Study*, par E. CARTAN, t. I, vol. I, fasc. 3, p. 329-468.

Au surplus, il est utile de dire que l'apparition de chaque fascicule de l'*Encyclopédie* a fourni et donnera la réponse décisive à plusieurs questions de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

Dr Charbonier.

2800. (**1904**, 162) (E. MAILLET). — (**1904**, 272). — Autre réponse de M. H. BROCARD.

LA RÉDACTION.

2835. (**1904**, 285) (E. MAILLET). — *Erreurs de Mathématiciens* (**1905**, 275; **1906**, 65, 110, 150, 200, 248; **1907**, 31, 275; **1908**, 60).

EULER donne (*Comment. arith. coll.*, t. II, p. 219) une liste de nombres premiers de la forme $232\,a^2+1$. Après vérification des 76 premières valeurs indiquées, on trouve deux erreurs, car

$$232\times 57^2+1 = 753\,769 = 179\times 4211,$$
$$232\times 117^2+1 = 3\,175\,849 = 271\times 11\,719.$$

JEAN PLANA, dans son *Mémoire sur la Théorie des nombres* (*Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, série II, t. XX), a commis une erreur à propos de $2^{53}-1$:

« Si le nombre $2^{53}-1 = 9\,007\,199\,254\,740\,991$ n'est pas premier, on doit chercher les diviseurs qu'il peut avoir, à l'aide des deux formules

$$D' = 424\,z + 49\,927 \qquad \text{et} \qquad D'' = 424\,z + 50\,033,$$

en y faisant $z = 1, 2, 3, 4, \ldots$, etc. Car j'ai reconnu qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier inférieur à 50 033. »



Or ce nombre est divisible par 6361. Le deuxième facteur 69 431 s'obtient en faisant $z = 46$ dans D', et le troisième facteur 20 394 401 est donné par D″ pour $z = 47\,982$. La formule générale des diviseurs est

$$D' = 424z + 1 \qquad \text{et} \qquad D'' = 424z + 319.$$

Consulter **191** (**1895**, 41), où l'on trouvera une erreur de Éd. Lucas.

A. Gérardin.

1° Ossian Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXe Cahier, p. 1) et d'autres mathématiciens ont cru qu'en cheminant sur une surface on ne trouve jamais deux normales successives qui se rencontrent rigoureusement, à moins que la surface ne soit particulière. O. Bonnet a reconnu son erreur dans le *Journal de Liouville* (1851, p. 192).

2° Jacobi, en posant

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1, \qquad \ldots, \qquad f_n(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_n,$$

et en déduisant

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(x_1, \ldots; \lambda_n) = \lambda_n,$$

a cru qu'on avait toujours

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Il a reconnu plus tard l'inexactitude de cet énoncé.

M. Bertrand est revenu sur cette question dans le *Journal de Liouville* (1851, p. 223).

3° M. Spottswoode (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 25 avril 1870) a énoncé qu'en un point quelconque O d'une surface passent dix sections planes ayant en O un contact du cinquième ordre avec une conique. M. Transon prouva que ces sections sont en nombre infini.

Dubouis.

Cayley (*American Journal of Mathematics*, vol. I, 1878) dit qu'il y a trois groupes abstraits d'ordre 6. Les deux groupes possibles de cet ordre sont donnés par Kempe, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. CLXXVII, 1886, p. 38. En énumérant les groupes de substitutions de huit lettres (*Quarterly Journal*

of Mathematics, vol. XXV, 1891), Cayley oublie environ 50 des groupes possibles. Son énumération a été complétée par Cole et d'autres. G.-A. MILLER (États-Unis).

(D'après l'anglais, LA RÉDACTION.)

Autres réponses de M. E.-B. ESCOTT, dont une relative à la partie de la réponse de M. BROCARD (**1906**, 249, § **11**) qui concerne une proposition de Legendre. Je crois que l'indication bibliographique rigoureuse a été donnée dans l'énoncé de ma question (**1904**, 286).

E. MAILLET.

2879. (**1905**, 27) (*Belga*). — *Division approchée de la circonférence* (**1905**, 233, 251; **1906**, 113; **1907**, 82). — M. G. LEMAIRE (**1907**, 82) croit que la construction de Bion était connue au XVIIIe siècle. Elle l'était dès le XVIIe, car on la trouve dans les *Travaux de Mars,* de MANESSON MALLET (Paris, 1685). L'auteur ne cite aucune référence; il est permis de supposer que c'était déjà un procédé vulgarisé dans la pratique. Il serait donc intéressant de vérifier s'il n'est pas indiqué dans la *Ciclométrie de François Besson* de Bourges (1635), ou même dans sa *Pratique de Géométrie* (1626). Pour la question analogue 1988 (**1900**, 405), *voir* **1901**, 126, et **1904**, 216, où sont mentionnés Bion, Tempier, Henry, Housel; mais il faut y ajouter E. CATALAN, *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire,* 4e édition, 1865, suivant l'indication de M. *Belga*. H. BROCARD.

2909. (**1905**, 103) (CH. BERDELLÉ). — *Systèmes de numération* (**1905**, 234, 255; **1907**, 275). — Réponse de M. G. LEMAIRE, transmise à M. Berdellé. LA RÉDACTION.

2941 (**1905**, 171) (E.-N. BARISIEN). — *Sur certaines courbes* (**1907**, 83). — Réponse de M. H. BROCARD, transmise à M. Barisien.

LA RÉDACTION.

2954. (**1905**, 200) (*Rudis*). — *Fractions continues* (**1906**, 28, 119, 217; **1907**, 84, 223). — Nouvelle réponse de M. *Rudis,* qui dit en particulier : « Dans mon observation (**1906**, 117) relative à la réponse de M. Kœchlin (**1906**, 28), c'est l'équation $x^2 - 8x - 7 = 0$ (et non $7x^2 - 8x - 1 = 0$) qui donne lieu à une fraction continue

de la forme

$$a + \frac{5}{a_1} + \frac{5}{a_2} + \ldots . »$$

M. *Rudis* est alors conduit à renouveler sa question en la présentant sous une nouvelle forme (*voir* question 3345, **1908**, 218).

LA RÉDACTION.

2972. (**1905**, 265) (E.-N. BARISIEN). — *Liste de courbes.* — Réponse de M. H. BROCARD, transmise à M. Barisien. M. Brocard renvoie à la question **1195** (**1898**, 3, 138, 201; **1900**, 278; **1902**, 73).

LA RÉDACTION.

3004. (**1906**, 8) (NAZAREVSKY). — *Équation indéterminée.* — Réponse de M. H. BROCARD, transmise à M. Nazarevsky.

LA RÉDACTION.

3039. (**1906**, 88, 276; **1907**, 135) (*Balbus*). — *Carrés numériques* (**1907**, 135, 276). — La liste de M. J. RIUS Y CASAS a été publiée dans *S. Œ.*, juin 1908, p. 35.

A. GÉRARDIN.

3072. (**1906**, 141) (E.-N. BARISIEN, H.-B. MATHIEU). — *Quadrilatère* (**1907**, 20, 92). — L'article de M. Boutin sur le quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible (*I. M.*, question 3072, **1907**, 20) est très remarquable; j'en dis quelques mots au n° 2170, p. 1029 des *Exercices de Géométrie*, 4e édition; mais ce même Ouvrage, p. 816, n° 1751 *b*, donne des renseignements bibliographiques que M. Brocard a bien voulu utiliser (*I. M.*, question 3186, **1907**, 214) et j'en ai été bien aise, car la question n'était pas complètement nouvelle.

F. G. M.

3129. (**1906**, 261) (E.-N. BARISIEN). — *Somme de cubes* (**1907**, 112; **1908**, 136). — Nouvelle réponse de M. WEREBRUSOW, transmise à M Barisien.

LA RÉDACTION.

3184. (**1907**, 52) (G. DE SANTIS). — *Équation indéterminée* (**1907**, 167, 283). — Autre réponse de M. O. DEGEL (Bayreuth), qui sera transmise à M. DE SANTIS, quand il nous aura donné son adresse.

LA RÉDACTION.



3185. (**1907**, 53) (G. de Santis). — *Équation indéterminée* (**1907**, 168, 192, 213, 283). — Autre réponse de M. O. Degel (Bayreuth), qui sera transmise à M. de Santis, quand il nous aura donné son adresse. La Rédaction.

3191. (**1907**, 75) (*Nobel*). — *Historique du calcul des décimales de* π (**1907**, 229). — Consulter l'article *Sur la quadrature du cercle,* p. 279 et suiv. du vol. II, trad. française de M. Fitz-Patrick, 1908, des *Récréations mathématiques de W.-W. Rouse Ball.* A. Gérardin.

3195. (**1907**, 76) (Issaly). — *Pseudo-surfaces développables.* — Réponse de M. H. Brocard, transmise à M. Issaly.

La Rédaction.

3220. (**1907**, 121) (A. Aubry). — Une liste de démonstrations variées du théorème de Fermat, répondant par conséquent à la question 3220, est donnée dans l'*Encyclopédie fr.-all. des Sc. math.*, t. I. vol. III, fasc. 1, *Théorie des nombres,* p. 11-12 (P. Bachmann, et E. Maillet). J'y relève, notamment, L. Kronecker, K. Hensel et, pour des démonstrations basées sur la théorie des substitutions E. Maillet (*Thèse,* 1892), L.-E. Dickson (*Annals of Math.*, 1899).

A cette liste il convient d'ajouter E. Malo, rép. 1484, *I. M.*, **1900**, 280-282 et 312-314.

Voir aussi *B. D.*, 1re Partie, 1900, une Note de M. J. Perott, *Sur le théorème de Fermat* (p. 175-176). H. Brocard.

3221. (**1907**, 121) (E. Maillet). — Pour $q = 2$, le nombre $10 =$ *deux* est premier, ainsi que pour $q = 3$, les nombres $102 =$ *onze* et $201 =$ *dix-neuf,* auxquels on peut ajouter les nombres $012 =$ *cinq* et $021 =$ *sept*. Mais, pour $q \geqq 4$, il n'y a pas de nombres premiers de la forme demandée, car, la somme des valeurs absolues des chiffres étant le nombre triangulaire $\frac{q(q-1)}{2}$, elle, et aussi tout nombre N, est divisible par $q-1$ ou par $\frac{q-1}{2}$, suivant que q est pair ou impair.

Dans le système décimal, en nous bornant, comme dans la question 3039 (**1906**, 88; **1907**, 135, 276; **1908**, 233), aux nombres N de

10 chiffres, le premier autre que *zéro*, si ma liste de carrés est complète (voir *S. Œ.*, juin 1908, p. 35), il n'y a pas d'autres puissances correspondant à des valeurs *paires* de *n*. Car tous les nombres dont les carrés sont des N ont quelque facteur premier seulement une fois, comme on le vérifie.

[Extrait d'une réponse de M. J. Rius y Casas (Saragosse).]

1° Dans le système décimal, tout nombre N formé à l'aide des dix chiffres, chacun étant écrit une seule fois, est toujours un multiple de 9. Il ne saurait donc y avoir de nombre premier de la forme N.

2° La série des carrés varie entre $\overline{31991}^2 = 1.023.423.981$ et $\overline{99381}^2 = 9.876.583.161$; celle des cubes est comprise entre les limites $\overline{1008}^3 = 1.024.192.512$ et $\overline{2145}^3 = 9.869.198.625$. Les racines carrées ou cubiques des carrés ou cubes de la forme N sont toujours des multiples de 3.

La recherche des puissances de la forme N par le raisonnement me paraît d'une difficulté insurmontable.

3° J'ai eu la patience de calculer la série complète des carrés et cubes formés de 10 chiffres (multiples de 9 ou de 27) compris dans les limites indiquées ci-dessus, en prenant toutes les précautions nécessaires pour éviter les erreurs.

J'ai trouvé de cette manière les dix carrés parfaits indiqués dans ma réponse à la question 3039 (**1907**, 135).

Je puis affirmer qu'il n'existe aucun cube parfait formé à l'aide des dix chiffres, chacun étant pris une seule fois.

L'examen de la série des carrés de cette forme permettrait de constater s'il existe une quatrième puissance.

4° Les Tableaux de carrés ou cubes formés de dix chiffres ne présentent aucun indice permettant de trouver une loi simple de la formation de ces nombres. Il en est de même des différences première et seconde.

Gleizes.

3248. (**1907**, 169) (E.-N. Barisien). — (**1908**, 67, 139, 202). — M. Brocard dit que la généralisation proposée n'est pas définie par des conditions géométriques. Cela n'est pas exact. Dans mon travail intitulé : *Ueber einen geometrischen Ort und eine neue Art von Dreieckskoordinaten* (1), qui est à la disposition de tout

(1) *Z. H.*, t. XXXVII, 1906, p. 330 et suiv.

collègue qui m'en exprime le désir, on trouve dans les équations (2) et (51) les moyens nécessaires pour démontrer la construction suivante :

Sur le côté AB du triangle donné ABC, on prend

$$AS'' = \frac{c.mb}{la + mb + nc}$$

et

$$BS' = \frac{c.la}{la + mb + nc},$$

puis on trace les droites S'P parallèle à BC et S''P parallèle à AC qui se coupent en P, point tel que ses distances aux côtés a, b, c sont proportionnelles aux nombres l, m, n.

D'ailleurs, la démonstration de la construction précédente n'est point difficile, en déterminant

$$S'S'' = \frac{c.nc}{la + mb + nc}.$$

TAFELMACHER (Dessau, Allemagne).

3249. (**1907**, 170) (L. DE LA RIVE). — *Isogones.* — Réponse de M. H. BROCARD, qui sera transmise à M. de la Rive, quand il nous aura fait connaître son adresse. LA RÉDACTION.

3272. (**1907**, 197) (C. WARGNY). — *Renseignements sur certaines courbes* (**1908**, 88). — Pour l'ophiuride, *voir* G. LORIA, *Ebene Kurven*, p. 49. E.-B. ESCOTT (États-Unis).

3276. (**1907**, 198) (S. DE LA CAMPA). — *Équivalence de deux solides de révolution* (**1908**, 90). — Soit $\overline{AB}$ le diamètre de l'ellipse que l'on considère et autour duquel on fera tourner l'un des deux arcs égaux entre lesquels l'ellipse se trouve alors partagée (c'est du moins ainsi que j'ai entendu l'énoncé 3276, qui, à la rigueur, est susceptible d'une interprétation un peu différente) ; soient encore $\overline{OC}$ le demi-diamètre conjugué, $\overline{CP}$ la distance du point C au diamètre $\overline{AB}$; soient enfin $\overline{MN}$, $\overline{M'N'}$ deux cordes infiniment rapprochées parallèles à $\overline{AB}$.

Il est clair qu'on passera de l'ellipse considérée à celle qui a pour grand axe $\overline{AB}$ et pour demi-petit axe $\overline{OC'}$, perpendiculaire à $\overline{AB}$ et égal à $\overline{CP}$, en faisant glisser sur sa propre direction chaque corde,

telle que $\overline{MN}$, jusqu'à ce que le milieu de $\overline{MN}$ vienne sur $\overline{OC'}$; le trapèze MNN′M′ est ainsi remplacé par un trapèze de surface égale, du moins à des quantités près du second ordre infinitésimal et parfaitement négligeables.

Or, en opérant ainsi, le centre de gravité de l'aire elliptique d'abord considérée se trouve manifestement transporté sur $\overline{OC'}$ en glissant sur une parallèle à $\overline{AB}$ menée par sa position initiale. Dès lors, l'équivalence des deux solides de révolution engendrés par les deux ellipses est une conséquence du théorème de Guldin.

E. Malo.

La demi-ellipse E est la projection oblique de la demi-ellipse E_1. Le centre de gravité G de E, qui est sur D′, est donc la projection du centre de gravité G_1 de E_1.

On a (Guldin)

$$\text{Vol. E} = \frac{1}{2}\pi ab \sin\theta \times 2\pi\delta \sin\theta = \pi^2 ab\delta \sin^2\theta,$$

$$\text{Vol. E}' = \frac{1}{2}\pi ab_1 \times 2\pi\delta \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi ab \sin\theta \times 2\pi\delta \sin\theta = \pi^2 ab\delta \sin^2\theta.$$

C. Q. F. D.

P. Hendlé.

3287. (**1907**, 219) (*Trinitario*). — *Théorème de Ménélaüs.* — Réponse de M. Plakhowo (Russie), qui sera transmise à M. *Trinitario,* quand il nous aura fait connaître son adresse.

La Rédaction.

3298. (**1907**, 243) (E. Lemoine). — *Division d'une droite en trois parties égales.* — (**1908**, 43, 143). — Voici trois solutions qui me paraissent simples, mais dont j'ignore la valeur géométrographique :

Fig. 1. — Règle et équerre.

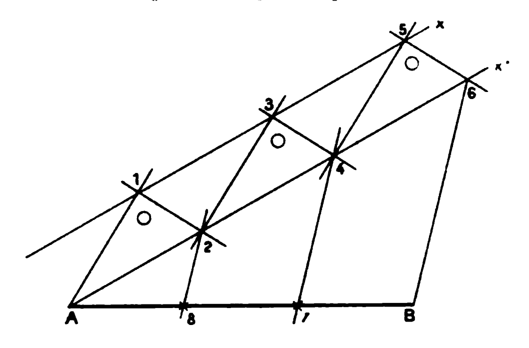


Fig. 2. — Règle et équerre.

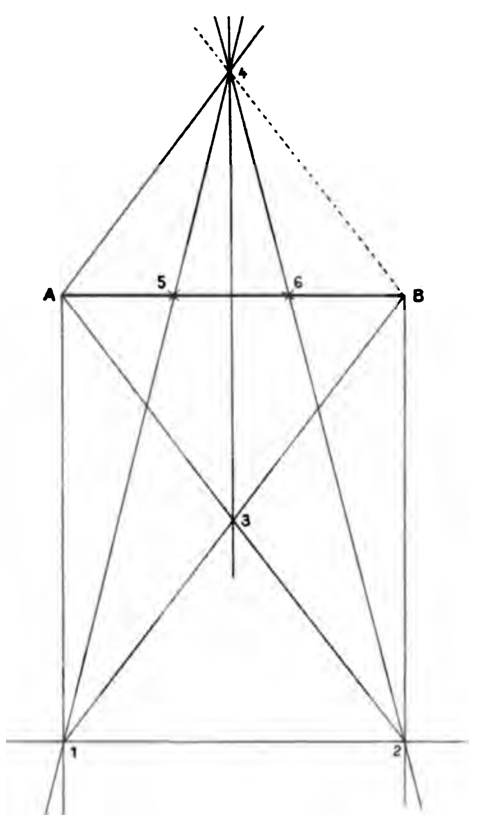
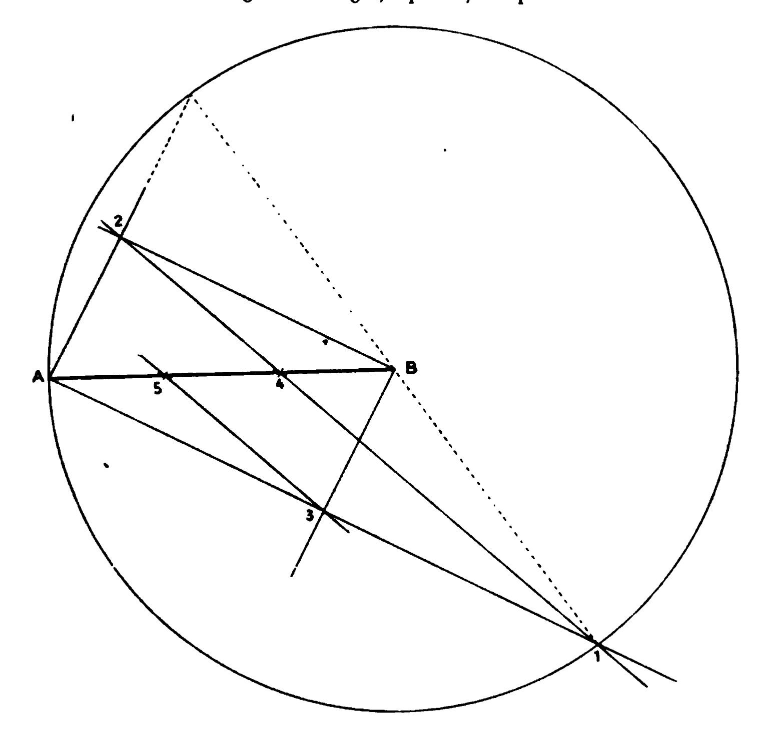


Fig. 3. — Règle, équerre, compas.



(Le numérotage exprime l'ordre des constructions.)

G. LEMAIRE.

3306. (**1907**, 246) (U. BINI). — (**1908**, 47, 152). — *Voir* question **1410** (**1899**, 6, 204; **1908**, 132) et question **289** (**1894**, 154; **1899**, 36).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

3312. (**1907**, 267) (PAULMIER). — Le polynome en A étant un nombre pair, la question revient à étudier l'équation

$$2^m \quad V = 2U,$$

ou

$$2^{m-1} V = \quad U,$$

V et U désignant des nombres impairs.

Pour $m > 1$, l'équation est impossible, mais m peut aussi bien

être égal à 1, et alors l'équation $V = U$ est formée de deux termes V, produit de binomes $B^{2b+1} - 1$, et U, produit de $B^{2b}, \ldots, H^{2h}$ par $(B-1), \ldots, (H-1)$.

Par définition, toutes les puissances de 2 disparaissent, mais il s'est introduit de nouveaux facteurs premiers qui ne sont pas nécessairement égaux à B, C, ..., H et qui ne les renferment pas aux mêmes puissances $2b$, $2c$, ..., $2h$. Il y a donc ici, encore plus accentué, le défaut d'élasticité observé dans une équation analogue, quoique plus simple, celle de la question 3123 (**1906**, 260; **1907**, 112, 278).

Il resterait à traiter l'équation $V = U$ dans les cas les plus simples où n'interviendraient que les quantités A et B, ou A, B et C, mais je ne puis dire qu'il sera aisé de parvenir à des solutions numériques.

E. Liminon.

3323. (**1908**, 5) (*Agnès Morri*). — *Partager un quadrilatère proportionnellement à m et n.* — 1° Si le quadrilatère ABCD est un trapèze, AB étant parallèle à CD, il suffit de partager dans le rapport $\frac{m}{n}$ la ligne joignant les milieux de AD et BC; la sécante cherchée passe aussi par le point segmentaire, ce qui la détermine.

2° Si ABCD est quelconque, AB et CD se coupent en S, et le problème revient à couper le triangle SAB par exemple, de sorte que les deux parties SEF, EFAB soient entre elles comme deux nombres m' et n' qu'on sait déterminer (construction connue : tangente à une hyperbole dans un cas, à un cercle dans l'autre).

P. Barbarin.

3328. (**1908**, 27) (*Eix*). — Si l'urne éprouve un changement inconnu dans sa composition, il est difficile d'admettre que la probabilité primitivement définie ne soit pas modifiée. Elle devra l'être, ne serait-ce que par ce fait que certaines épreuves multiples, en nombre assigné, deviendront impossibles. Je crois donc qu'il faut admettre l'invariabilité de la composition de l'urne.

Les opinions et les pensées qui se forment dans le cerveau ne sauraient être assimilées aux boules d'une urne invariable. Cela pourrait expliquer l'insuccès de l'application des calculs des probabilités à la décision des jugements. *Dr Charbonier.*

AVIS.

M. A. Grévy étant obligé de résigner ses fonctions de directeur et de rédacteur à cause de ses trop nombreuses occupations, la Direction de l'*Intermédiaire* s'est assuré la collaboration de M. P. Fatou, docteur ès sciences mathématiques, astronome adjoint à l'Observatoire, vice-secrétaire de la Société mathématique de France. M. P. Fatou prend la direction du journal dès maintenant. Les directeurs expriment ici à M. Grévy le vif regret que leur cause son départ et leurs remercîments pour les services dévoués rendus par lui au journal depuis 7 ans. LA DIRECTION.

QUESTIONS.

1188. [D1a] (**1897**, 270) Je désirerais une *explication géométrique* de la fonction continue sans dérivée ou des références bibliographiques relatives à la question.

J.-J. DURAN-LORIGA (La Corogne).

1190. [I9] (**1897**, 270) Quel est le criterium pour les nombres premiers qui peut être le plus aisément appliqué? Édouard Lucas donne le suivant qui est, en un certain sens, la réciproque du théorème de Fermat [*Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (*American Journal of Mathematics,* vol. I, p. 302)] :

THÉORÈME. — *Si $a^x - 1$ est divisible par p, lorsque*

$x = p - 1$, et n'est pas divisible par p, pour x inférieur à $p - 1$, le nombre p est premier.

Cette condition est suffisante, mais non nécessaire.

E.-B. Escott (Cambridge, U. S. A.).

1193. [V9] (1898, 2) Tous les collègues de Napoléon Bonaparte à l'Institut d'Égypte et à l'Institut de France ont témoigné de sa vive intelligence des questions mathématiques. Pourrait-on avoir sur ce sujet quelques renseignements autres que des fragments plus ou moins anecdotiques? Sur Napoléon mathématicien, ou sur l'action scientifique de Napoléon, il y aurait à faire une étude certainement intéressante et originale.

H. Brocard.

1204. [V] (1898, 4) Quelque correspondant pourrait-il me donner une liste aussi complète que possible des bons classiques français (mathématiques) traduits en langue russe?

Vosstokoff.

1205. [I19] (1898, 4) L'équation $x^n + y^n = z^n + t^n$ est-elle possible, en nombres entiers, pour $n > 4$?

E. Fauquembergue.

1210. [V7] (1898, 5) Dans sa Correspondance, Descartes s'est occupé du problème suivant :

« Dans un triangle ABC, rectangle en A, on inscrit un carré DEGF (D sur AB, E sur AC, F et G sur BC). On joint DC et EB, et l'on donne les segments interceptés sur ces droites par les cercles inscrits dans les triangles rectangles BDF, EGC. On demande les côtés du triangle. »

Si l'on prend pour inconnue la tangente de l'angle C, on arrive à une équation du sixième degré qui a toujours deux racines positives, l'une plus grande, l'autre plus petite que l'unité.

Je désirerais savoir si les quatre autres racines sont tou-

jours imaginaires, et en tous cas quelle est leur interprétation.

PAUL TANNERY.

1211. [**V7**] (**1898**, 5) Dans la Correspondance de Descartes (à partir de 1637), est mentionnée à diverses reprises, et comme une courbe dont les géomètres se seraient déjà occupés, une spirale qui est la spirale logarithmique, définie par la propriété de sa tangente. Connaît-on une mention plus ancienne de cette spirale? Il semble qu'on ait dû la considérer à peu près en même temps que la *Loxodromie*.

PAUL TANNERY.

1228. [**Q4a**] (**1898**, 29) Pourrait-on me faire savoir si le problème suivant a été traité ou s'il y a des personnes qui s'en occupent actuellement :

« Étant donnés n points entre lesquels on a constitué a communications arbitraires, joignant chacune un de ces points directement à un autre, combien de fois peut-on, le long de ces communications, aller d'un point à l'autre en les touchant tous, chacun une seule fois? »

Dr FITTING (Gladbash).

1230. [**L¹6a**] (**1898**, 30) A qui doit-on la construction du centre de courbure d'une conique, connaissant la normale et les foyers? Je viens de trouver cette construction dans un Ouvrage publié à Naples en 1814 : *Trattato analitico delle sezioni coniche, del sigr N. F.* (Nicola Fergola), *prop.* LXXVII, p. 244, *fig.* 54.

F. AMODEO (Naples).

1236. [**D1b**] (**1898**, 31) On sait que la fonction de Cauchy

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

a la propriété que, quoique la fonction et ses dérivées soient continues pour toute valeur de x, si l'on applique le théo-

rème de Maclaurin, le développement se réduit au reste, puisque la fonction et toutes ses dérivées sont nulles pour $x = 0$, et l'on a, pour $n = \infty$,

$$\lim \varphi^n(\theta x) = \infty$$

et

$$R = \lim \frac{x^n}{n!}\varphi^n(\theta x) = \varphi(x).$$

Pourrait-on m'indiquer diverses autres fonctions ayant la même propriété?

J.-J. Duran-Loriga (La Corogne).

1237. [R1e] (**1898**, 32) Quelque correspondant connaît-il un moyen de parvenir *sans frais* particuliers à réaliser matériellement un modèle de système articulé *gauche?*

E. Duporcq.

1253. [I19c] (**1898**, 75) Les équations

$$x^2 + x \pm 1 = y^3$$

ont-elles, en nombres entiers, d'autres solutions que

$$18.19 + 1 = 7^3, \qquad 36.37 - 1 = 11^3?$$

A. Boutin.

1257. [M¹5k] (**1898**, 76) Dans un article intitulé : *Sur la courbe de Rolle, sa construction par points et par tangentes* (*J. S.*, p. 32; 1896), M. de Longchamps nomme ainsi la courbe dont l'équation est $xy^2 = a(y + x)^2$. L'auteur ne se rappelle plus exactement où il a pris ce nom; il croit cependant que c'est dans l'*Educational Times;* un correspondant pourrait-il me dire qui a donné ce nom à la courbe considérée?

Gino Loria (Gênes).

1258. [D1a] (**1898**, 76) La règle pour la dérivation des *fonctions de fonctions* subsiste-t-elle dans le cas d'une *infi-*

nité de fonctions? A-t-on fait des études sur les expressions qui résultent d'une infinité d'opérations fonctionnelles? Sait-on, en particulier, si une fonction *discontinue* peut être considérée comme résultant d'une infinité d'opérations fonctionnelles *continues*, appliquées successivement?

Rosace.

3459. [V] Quelles sont les études faites sur les spiriques à deux axes de symétrie? Propriétés particulières de ces courbes et références bibliographiques.

T. Lemoyne.

3460. [V] Quelles sont les notes et mémoires ayant trait à l'étude des surfaces gauches ayant pour ligne de striction une courbe de Bertrand? T. Lemoyne.

3461. [O 2 e] Soient P un point d'une courbe C et M un point mobile qui se meut sur C à partir de P, du côté où les valeurs absolues $|R|$ du rayon de courbure R de C vont en décroissant; M pénètre dans le cercle osculateur en P et y reste, en général, tant que $|R|$ est décroissant dans le sens du mouvement de M.

Application par exemple. — Soit $R = \varphi(s)$ l'équation intrinsèque de C, et $\varphi(s) > 0$, $\varphi'(s) < 0$ pour $s \geqq s_0$, $\lim \varphi(s) = 0$ pour $s = +\infty$: C possède *un point asymptote* à distance finie pour $s = +\infty$. On en conclut l'existence de certaines intégrales définies [1].

De même, quand $R = a \pm \varphi(s)$ (a constante), la courbe a un cercle asymptote $R = a$.

Ces propriétés, faciles à établir, ont-elles été énoncées quelque part, ce qui me paraît probable?

E. Maillet.

---

[1] Dans un cas particulier, on en déduit que les intégrales de Fresnel ont un sens, résultat classique.

3463. [**T2a**] Dans la théorie mathématique de l'élasticité, on part d'une sphère infiniment petite qui, par la déformation, devient l'ellipsoïde d'élasticité; mais cette considération ne permet pas de définir d'une manière simple l'*état de la déformation en un point*.

A-t-il été remarqué qu'en vertu du principe de la linéarité des déformations, une surface infinitésimale et du deuxième degré reste infinitésimale et du deuxième degré, et que dès lors on peut démontrer que, dans toute déformation, il existe en chaque point au moins une surface élémentaire du deuxième degré (molécule) qui reste homothétique à elle-même.

Par suite, une déformation peut être représentée par un quaternion dont la partie scalaire est le rapport d'homothétie et la partie vectorielle la rotation nécessaire pour faire coïncider un trièdre donné *a priori* (celui des axes, par exemple) avec le trièdre des axes de la surface élémentaire.

L'étude des rapports de longueur de ces axes entre eux serait du domaine de la Physique ou de la Chimie (cristallographie, optique, etc.). A. Auric.

3463. [**D1a**] On sait que, si une fonction analytique $\varphi(x)$ satisfait à la condition

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \frac{\beta-\alpha}{6}\left[\varphi(\alpha)+\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\varphi(\beta)\right]$$

pour des valeurs arbitraires de α et β, ce sera forcément un polynome entier du troisième degré.

Existe-t-il une fonction non analytique, continue ou discontinue, qui satisfasse à cette condition pour des valeurs quelconques de α et β contenues dans un intervalle (a, b)?

S. Prieto.

[Traduit de l'espagnol. (La Réd.)]

RÉPONSES.

612. (**1895**, 281; **1904**, 185) (W. DE ROMILLY). — *Dernier théorème de Fermat* (**1908**, 79, 174). — 1° M. L.-E. Dickson a communiqué en avril 1908, au meeting de l'*Amer. Math. Society* tenu à Chicago, deux Notes relatives au dernier théorème de Fermat. La première a paru dans le *Mess. of Math.* (t. XXXVIII, 1908, nos 1 et 2, p. 14 et suiv.) ([1]) : l'auteur y établit l'impossibilité de

$$(1)\qquad x^n + y^n + z^n = 0$$

en entiers $\neq 0$ et premiers 2 à 2 et à n pour $n < 1700$; la seconde a été adressée au *Journal de Crelle* (*J. für Math.*).

2° La démonstration de M. Werebrusow est fautive depuis la ligne 17 de la page 80.... Si les expressions données par M. Worms de Romilly dans l'énoncé de sa question 612 sont correctes, on peut en déduire la démonstration *complète* du dernier théorème de Fermat.

H.-W. CURJEL (Mexico).

[Extrait d'après l'anglais. (LA RÉD.)]

M. Curjel établit ce dernier point, ainsi que d'autres choses, dans une Lettre du 4 septembre 1908. J'ai écrit à l'auteur pour avoir une rédaction un peu plus détaillée, rendant la vérification plus facile.

Un compte rendu sommaire des deux Communications de M. L.-E. Dickson, relatives à la même méthode, a été donné par M. H.-E. Slaught dans le *Bull. of the Amer. Math. Society*, 1908, p. 417-418.

Dans sa première Note, M. L.-E. Dickson s'appuie sur la méthode de Sophie Germain et Legendre et part de leur théorème fondamental qu'on peut formuler ainsi avec MM. E. Wendt et Dickson :

([1]) La Note occupe deux numéros : le prix de chacun est de 1 shilling.

L'équation (1) ($x, y, z \neq 0$, *premiers* 2 *à* 2 *et à* n) *est impossible s'il existe un nombre premier* $p = mn + 1$ (*m pair et premier à* 3) *tel que :*

1° $n^m \not\equiv 1$, *ou, ce qui revient au même,*

$$m^m \not\equiv 1 \pmod{p};$$

2° $$u^m \equiv 1, \quad (u+1)^m \equiv 1 \pmod{p}$$

n'aient pas de solution commune [1].

Grâce à une série de transformations et de remarques ingénieuses et à certains résultats de M. Mirimanoff, M. Dickson va beaucoup plus loin que Sophie Germain et Legendre, dont il englobe les résultats ainsi que certains des miens (197 et $200 \leqq n < 223$) et de ceux de M. Mirimanoff ($223 \leqq n < 257$).

J'ai cru comprendre que M. Dickson attribue à Legendre la première démonstration de l'impossibilité de (1) pour $n = 197$ (x, y, z premiers à n). Après vérification, je continue à penser que Legendre n'a pas *traité* le cas où $n = 197$ (*Mém. Acad. Sc.*, 1823, p. 22, en haut, du Mémoire de Legendre, ou *Second supplément à l'Essai sur la Théorie des nombres*, sept. 1825, p. 17) : il ne dit pas l'avoir fait. E. Maillet.

3322. (**1908**, 5) (*Rudis*). — *Suite récurrente*, 1, 5, 29, 169, ... — Cette série est formée des termes de 2 en 2 de la série U_n : 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, ..., dont l'échelle de récurrence est

$$U_n = 2U_{n-1} + U_{n-2}.$$

Cette série et la série V_n : 2, 2, 6, 14, 34. 82, 198, 478, 1154, 2786, ..., ont été considérées par E. Lucas, *Théorie des fonctions numériques*

(1) Dès lors, si, pour une valeur de m paire et première à 3, il y a des nombres premiers n assez grands et tels que $mn+1$ soit premier, (1) est impossible (x, y, z premiers à n) pour ces valeurs de n. En effet, si l'équation est possible, $mn+1$ divise $m^m - 1$ ou le résultant de $u^m - 1$ et $(u+1)^m - 1$, qui n'est pas identiquement nul. De là, l'intérêt de la question 3344 (**1908**, 51) de M. Dubouis, question qui semble fort difficile et qui a, je suppose, été inspirée par des considérations analogues. *Comparer* E. Wendt, *J. für Math.*, t. 113, 1894, p. 335-347.



simplement périodiques (*A. J. M.*, t. I, 1878, p. 187) sous le nom de *séries de Pell*.

Leurs propriétés se déduisent des expressions de U_n et V_n :

$$(1) \qquad U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \qquad V_n = a^n + b^n,$$

où

$$a = 1 + \sqrt{2}, \qquad b = 1 - \sqrt{2}.$$

1° Les termes de rang $6\mu + 1, 4$ dans la série donnée sont les termes $U_{12\mu+3}$ et $U_{12\mu+9}$; U_{mn} étant divisible par U_m et U_n, $U_{12\mu+3}$ est divisible par $U_3 = 5$ et $U_{4\mu+1}$, et $U_{12\mu+9}$ est divisible par $U_3 = 5$ et $U_{4\mu+3}$.

2° C'est faux, Lucas montre que tous les diviseurs de U_{2n+1} sont de la forme $4n + 1$. $U_{19} = 6\,625\,109$ est divisible par 179 057; $U_{27} = 7\,645\,370\,045$ est divisible par 146 449.

Les deux facteurs sont de la forme $8n + 1$ [1].

3° Lucas montre (p. 295) que, si $p = 8n \pm 1$, U_{p-1} est divisible par p; si $p = 8n \pm 3$, U_{p+1} est divisible par p. C'est une généralisation du théorème de Fermat. On peut montrer justement comme dans ma réponse à la question **2933** (**1905**, 262-264) que $U_{\frac{p+1}{2}}$ est divisible par p quand $p = 8n - 3$, et que $U_{\frac{p-1}{2}}$ est divisible par p quand $p = 8n + 1$.

On peut montrer à l'aide de (1) que $U_{2n+1} = U_{n+1}^2 + U_n^2$.

Alors

$$U_{2n+1}^2 = (U_{n+1}^2 + U_n^2)^2 = (U_{n+1}^2 - U_n^2)^2 + (2U_{n+1}U_n)^2;$$

$U_{n+1}^2 - U_n^2$ et $2U_{n+1}U_n$ sont des nombres consécutifs, puisque

$$\begin{aligned} & U_{n+1}^2 - U_n^2 - 2U_{n+1}U_n \\ & = (U_{n+1} - U_n)^2 - 2U_n^2 = \left(\frac{V_n}{2}\right)^2 - 2U_n^2 = (-1)^n. \end{aligned}$$

(LUCAS, *loc. cit.*, p. 199, 200).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).
[D'après l'anglais. (LA RÉD.)]

---

[1] D'après les Tables de nombres premiers de Burkhardt, ces deux nombres sont premiers. E. M.

Autres réponses de MM. Cailler, *Rudis* et Welsch. Les réponses de MM. *Rudis* et Welsch sont un peu longues pour être insérées. Nous demanderions à M. Welsch de nous adresser un résumé destiné à l'insertion. Quant à la réponse de M. *Rudis* rédigée après communication des réponses de MM. Cailler et Escott, en voici les conclusions :

Dans la suite récurrente en question :

1° *Les modules premiers p de la forme* $8m+1$ *donnent lieu à des résidus dont la période peut être impaire, simplement paire ou pairement paire;*

2° *Les modules premiers* $8m+3$ *donnent lieu à des résidus dont la période est toujours pairement paire;*

3° *Les modules premiers* $8m+5$ *donnent lieu à des résidus dont la période est simplement paire et amène le zéro au rang* $\frac{p+3}{4}$ *au plus tard;*

4° *Les modules premiers* $8m+7$ *donnent lieu à des résidus dont la période est toujours impaire.*

Ma méthode, ajoute M. *Rudis,* n'est pas bornée au cas de la suite en question; elle s'appliquerait dans nombre de cas analogues : par exemple, la suite

$$(v) = 1,\quad 17,\quad 305,\quad 5473,\quad 98209,\quad \ldots$$
$$(v_1 = 1,\ v_2 = 17,\ v_{n+1} = 18u_n - v_{n-1})$$

donnerait lieu, par application de raisonnements identiques, à des résultats entièrement semblables. La Rédaction.

3331. (**1908**, 28) (Hazard). — *Tables de carrés et cubes* (**1908**, 157). — On peut ajouter aux indications précédemment fournies (**1896**, 40, 69 : **1907**, 247) :

J. Dupuis (Hachette, Paris, 1862). — Recueil de Tables propres à abréger les calculs. Carrés et cubes de 1 à 1000.

G. Friocourt (Challamel, Paris, 1907). — Tables de logarithmes. Carrés de 1 à 1500.

R. Danger (Dunod, Paris). — Surfaces et divisions de surfaces. Carrés de 1 à 10000. G. Lemaire.

3334. (**1908**, 29) (Hernandez). — L'énoncé n'est pas facile à saisir. Si je le comprends bien, le plus simple moyen de le vérifier est de supposer tous les nombres a, b, ..., l, α, β, ..., λ, premiers absolus, sans même les combiner par voie de multiplication.

Prenons, par exemple, deux groupes de 5 nombres a, b, ..., ε et formons $a+\alpha$, ..., $e+\varepsilon$. Nous aurons :

a.........	13	α.........	2	$a+\alpha$.....	15
b.........	17	β.........	3	$b+\beta$.....	20
c.........	23	γ.........	5	$c+\gamma$.....	28
d.........	41	δ.........	7	$d+\delta$.....	48
e.........	53	ε.........	11	$e+\varepsilon$.....	64

On voit que $64.7.3.5 < abcde$ est divisible par tous les binomes $a+\alpha$, mais il y a bien d'autres nombres que 64.7.3.5 qui satisfont à ces deux conditions.

Le nombre défini dans l'énoncé ne serait donc pas unique; mais, encore une fois, je ne suis pas sûr d'avoir bien saisi la question

L.-N. Machaut.

3336. (**1908**, 30)(Simionov). — Dans le *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht* veröffentlicht durch die Verlagshandlung von Martin Schilling, in Halle a. S. (sechste Auflage, Halle a. S., 1903), on trouve (p. 29-30) l'indication suivante :

« Série XIV. Modelle zur Functionentheorie. Abgüsse nach den im mathematischen Institut der kgl. technischen Hochschule in München angefertigten Originalen. Ausgeführt unter Leitung von Professor D[r] Walther Dyck.

» ... Um für gewisse singuläre Punkte einer Function, dann auch für den Gesammtverlauf gewisser Functionstypen eine räumliche Darstellung zu gewinnen, sind (in der bekannten Weise) der reelle und der imaginäre Teil der Werte einer Function über der Ebene des complexen Arguments als Ordinaten aufgetragen. So entstehen für jede Function zwei Flächen (mit R und I bezeichnet), deren gleichzeitige Betrachtung ein Bild des Functionsverlaufs liefert.... »

La série contient les représentations suivantes :

N° **1**. Cas de $w^2 = z^2 - 1$. — Deux modèles ($12^{cm} \times 12^{cm} \times 12^{cm}$), par A. Wildbrett.



N° 2. Cas de $w^2 = z^4 - 1$. — Deux modèles ($12^{cm} \times 12^{cm} \times 12^{cm}$), par A. Wildbrett.

N° 3. Cas de $w^4 = 1 - z^2$. — Un modèle ($12^{cm} \times 12^{cm} \times 12^{cm}$), par A. Wildbrett.

N° 4. Fonction $w = \frac{1}{z}$. — Un modèle ($12^{cm} \times 12^{cm} \times 12^{cm}$), par A. Wildbrett.

N° 5. Fonction $w = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{z-\varepsilon}{z+\varepsilon} \left(\varepsilon = \frac{\pi}{4}\right)$. — Deux modèles ($12^{cm} \times 12^{cm} \times 12^{cm}$), par H. Burkhardt et I. Kleiber.

N° 6. $6w = e^{\frac{1}{6z}}$. Un modèle ($17^{cm} \times 18^{cm} \times 15^{cm}$), par I. Kleiber.

On trouve en outre, dans ce Catalogue, des explications détaillées. *Voir* encore p. 119-120.

O. Degel (Bayreuth).

[D'après l'allemand. (La Réd.)]

3351. (**1908**, 54) (Gleizes). — *Probabilité des erreurs.* — Une réponse de M. Bohren (Berne), contenant une bibliographie détaillée du sujet, sera transmise à M. Gleizes, quand il nous aura fait connaître son adresse actuelle.

La Rédaction.

3355. (**1908**, 54) (E.-N. Barisien). — *Equations indéterminées* (**1908**, 164). — Réponses de MM. F. Ferrari (Pavie) et Quijano (Xérès), transmises à M. Barisien. Autre réponse de M. *Picpus* qui généralise la question.

La Rédaction.

3360. (**1908**, 74) (Paulmier). — *Construction géométrographique.* — Pour abréger, j'appelle *réel* le point de rencontre de deux droites quand il est dans les limites du cadre, *idéal* quand il est hors du cadre. On peut avoir souvent à résoudre ces deux problèmes :

I. *Joindre un point réel à un point idéal.*

II. *Joindre deux points idéaux* (droite réelle).

I. *a. Solution anharmonique.* — Soit O le point réel donné. Par un point réel P arbitraire, je trace les sécantes PAOB, PA′B′, PA″B″ qui coupent en A, A′, A″ et B, B′, B″ les deux droites données; AB′ et BA′ se coupent en O′; A′B″ et B′A″ se coupent en O″; OO′ rencontre A′B′ en O_1; O_1O'' coupe A″B″ en O_2, et OO_2 est la ligne demandée, car les rapports anharmoniques (PAOB) (PB′O_1A′) (PA″O_2B″) sont égaux, et OO_2 concourt avec AA″ et BB″ (10 droites).

b. Solution homothétique. — O point réel arbitraire est pris pour centre d'homothétie, avec un rapport arbitraire $\frac{1}{n}$ qui substitue au point idéal α un point réel α' tel que $O\alpha$ et $O\alpha'$ coïncident.

II. Par l'homothétie, on substitue également au quadrilatère à sommets idéaux $\alpha\beta\gamma\delta$ une figure homothétique à sommets réels $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, puis on repasse en sens inverse de la droite réelle $\alpha'\gamma'$ à son homothétique $\alpha\gamma$. P. Barbarin.

Autre réponse de M. Oudouis, transmise à M. Paulmier.

La Rédaction.

3361. (**1908**, 74) (E.-N. Barisien). — *Nombres* B *et* B^n *ayant même somme de leurs chiffres.* — I. Question posée déjà, au moins pour les carrés, sous le n° **2487** (**1902**, 318), résolue **1903**, 187. M. Teilhet (*loc. cit.*) a montré que plusieurs de ces nombres font partie aussi de la série de ceux pour lesquels la somme de deux tranches du carré représente la racine.

II. Aux nombres indiqués dans l'énoncé (pour les carrés), on devra ajouter tous les nombres uniquement composés du chiffre 9, comme l'a remarqué ultérieurement l'auteur de la question (*M.*, 1908, p. 161).

III. Dans les limites des carrés déjà indiqués, les cubes sont manifestement plus rares. Il est assez curieux, par exemple, que 585, 585^2 et 585^3 aient même somme de leurs chiffres.

Parmi les bicarrés, je rencontre 7^4 et 19^4.

IV. Pour les puissances $n > 4$, je ne sais s'il en existe ni même s'il en peut exister, en dehors des nombres puissances de 10. Cela est douteux, car, pour beaucoup de puissances B^n, le nombre de chiffres est bientôt égal ou supérieur à la somme des chiffres de B, ce qui est un obstacle à la réussite désirée. La fréquence de chiffres zéro est réellement trop faible.

On pourrait dresser une statistique de la moyenne de la somme des chiffres de B^n pour les nombres B de 2 chiffres, dont la somme varie de 1 à 18. On s'expliquerait ainsi la difficulté ou l'impossibilité (probable) de solutions pour $n > 4$, et l'insuccès (probable aussi) de recherches systématiques de la forme des nombres B et B^n.

Recta.

3365. (**1908**, 76) (Mehmed Nadir). — *Équation indéterminée.* — Réponse de M. R. Ravasco (Lisbonne) transmise à M. Mehmed Nadir.

La Rédaction.

3366. (**1908**, 77) (Mehmed Nadir). — *Équation indéterminée* (**1908**, 191). — Voici une solution étendue de l'équation

$$4(v^3 - w^3) - 3u^4 = 1 \qquad (u \text{ impair}),$$
$$4[(2n^2 - 2n + 1)^3 - (2n^2 - 2n)^3] - 3(2n - 1)^4 = 1.$$

Paulmier, *Stenacensis.*

3367. (**1908**, 77) (Mehmed Nadir). — *Équation indéterminée* (**1908**, 192).

$$2Tu^3 = x(3x + 1) + 2Tv^3,$$

pour

$$x = 2T = n(n + 1), \qquad u = n + 1, \qquad v = n.$$

Stenacensis.

Autre réponse de M. R. Ravasco (Lisbonne), transmise à M. Mehmed Nadir.

3368. (**1908**, 77) (Mehmed Nadir. — *Équations indéterminées.* — Réponse de M. Paulmier, transmise à M. Mehmed Nadir.

La Rédaction.

3370. (**1908**, 78) (Tarner de la Fuente). — *Surface de révolution.* — Dans le *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht* veröffentlicht durch die Verlagshandlung, von Martin Schilling, in Halle a. S. (sechste Auflage, Halle a. S., 1903), on trouve cette indication, à la page 105 :

« 178°. (X, 10 f.). Surface de révolution engendrée par la rotation de la parabole de Neil autour de sa tangente de rebroussement. Équation de la surface

$$z^3 = 25r^2 (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

de la projection des courbes asymptotiques en coordonnées polaires

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}} \log r \ (14^{cm} \times 17^{cm}). »$$

Voir encore p. 22.

Ce modèle a été construit à l'instigation de M. A. von Brill, maintenant à Tübingen, par M. G. Herting.

O. Degel (Bayreuth).

[Extrait d'après l'allemand. (La Réd.)]

3371. (**1908**, 78) (W. Kapteyn). — Dans toute sa généralité, avec des équations non réduites, l'intégration ne paraît pouvoir se faire que par séries d'une complication qui ne permet pas d'y reconnaître de fonctions élémentaires.

Pour une première tentative, on est donc amené à introduire toutes les simplifications possibles.

On pourrait prendre pour Y, soit $Ax^2 + By^2 - F$, soit mieux $y - K\sqrt{a^2 - x^2}$, et pour X, soit $mx + ny - p$, soit mieux, au moins pour commencer, $x - h$, ou $y - h$. Avec $x - h$, le problème est abordable. On a en effet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - K\sqrt{a^2 - x^2}}{x - h},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x - h} + \frac{K\sqrt{a^2 - x^2}}{x - h} = 0,$$

équation différentielle linéaire dont on voit la réduction immédiate par la substitution

$$y = (x - h)f,$$

ce qui donne

$$\frac{df}{dx} = \frac{K\sqrt{a^2 - x^2}}{(x - h)^2},$$

différentielle exacte, qu'on peut écrire

$$\frac{df}{dz} = \frac{K\sqrt{(a^2 - h^2) - 2hz - z^2}}{z^2}.$$

On aura ainsi f sous forme encore assez compliquée.

Le cas de $X = y - h$ donnera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - K\sqrt{a^2 - x^2}}{y - h},$$

ou

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{h - K\sqrt{a^2 - x^2}}{u}.$$

Note. — *Voir* aussi G. BJÖRLING, *J. M.*, 1858, p. 417, et H. DULAC, *B. D.*, 1re Partie, 1908, p. 30. *E. Liminon.*

3378. (**1908**, 97) (E. DUBOUIS). — L'énoncé ne précise pas de quel genre de symétrie il s'agit. Peut-être conviendrait-il de le spécifier, car il existe diverses formes de déterminants symétriques.

On pourra sur ce sujet consulter très utilement les *Éléments de la théorie des déterminants*, de M. P. Mansion (6e édition, 1900), où se trouvent des exemples de déterminants symétriques avec l'indication de règles particulières à plusieurs d'entre eux (Hankel, Studnicka, Pfaff, Janni, etc.).

Pour différentes applications, *voir* aussi C.-A. LAISANT, *Problèmes*, t. III; *Algèbre*, 1895, p. 5-17; et plusieurs Ouvrages ou écrits relatifs aux déterminants, par R. Baltzer, G. Salmon, S. Günther, Dostor, etc.

Des exemples du genre ici visé se rencontrent à l'occasion de diverses études :

1° *Équations binomes;*

2° *Équations et identités trigonométriques;*

3° L'article intitulé : *Sur les déterminants troués,* par G. de Longchamps (*J. S.*, 1891, p. 9-12, 29-32, 54-56, 85-87). L'auteur nomme ainsi les déterminants dont certains éléments sont ou deviennent nuls,

4° *Théorème sur les déterminants* de Sylvester (*N. A.*, 1854, p. 305).

5° La question **445** (*N. A.*, 1858, p. 262), résolue seulement en 1901 (p. 232) par M. C.-A. Laisant qui, par la permutation figurée sur un échiquier de n^2 cases, l'a ramenée au problème des n reines, extension de celui des 8 reines, questions **251** et **963** des *N. A.* (1852 et 1869). *Dr Charbonier.*

3379. (**1908**, 98) (G. QUIJANO). — Question posée déjà ici par M. N.-J. Hatzidakis, **2372**, § **4**, **1902**, p. 145, et à laquelle il a été

répondu, plus ou moins complètement, **1903**, p. 29, 164, et **1904**, p. 150, 290.

Se référer aussi à l'*Intermédiaire de l'A. F. A. S., loc. cit.*

Recta.

3380. (**1908**, 98) (G. Quijano). — *Point relatif au pentagone.* — Question comprise dans la question **228** (**1894**, 118), à laquelle j'ai répondu (**1895**, 59). (Les sommets homologues des pentagones ABCDE, *abcde* se correspondent dans une homographie ayant pour triangle invariant le triangle conjugué à la fois aux coniques circonscrites à ces pentagones, et aussi aux coniques qui y sont inscrites, trois quelconques de ces quatre coniques appartenant soit au même faisceau ponctuel, soit au même faisceau tangentiel.

Les sommets des pentagones successifs tendent vers l'un des sommets du triangle invariant, qui est leur point asymptotique commun.

Dans le cas où ABCDE est un pentagone convexe, ce point est le pôle double intérieur aux coniques circonscrite et inscrite à ce pentagone.)

Welsch.

M. G. Lemaire renvoie aussi aux questions **110** (**1898**, 54, 139, 198), **228** et **1275** (**1898**, 98). Une solution directe de M. G. Espanet a été transmise à M. Quijano.

La Rédaction.

3381. (**1908**, 98) (G. Quijano). — *Minimum d'une expression.* — Dans ses *Problèmes de Mécanique rationnelle,* t. I, le P. M. Jullien traite, p. 191-194, d'après Lamé et Clapeyron, le *problème* plus général des *moindres distances,* ayant pour objet de *déterminer les positions d'un certain nombre de points, de telle sorte que leurs distances mutuelles et leurs distances à des points donnés, multipliées respectivement par des coefficients connus, donnent des produits dont la somme soit la plus petite possible, ces points pouvant d'ailleurs être assujettis à d'autres conditions géométriques.*

La propriété signalée, à savoir que le minimum correspond au cas de l'existence de certain polygone, équivaut à celle d'un équilibre stable sous l'influence de forces constantes proportionnelles aux coefficients et dirigées de chacun des points cherchés vers les autres points.

La mention de cette propriété (*loc. cit.*) est suivie de la réflexion suivante :

« Cette observation n'avance en rien la solution analytique, souvent impraticable, mais elle conduit immédiatement à une solution pratique fort ingénieuse. »

Suit la solution pratique consistant à fixer dans un plan vertical des anneaux ayant entre eux des distances proportionnelles à celles des points donnés, à faire passer par chacun de ces anneaux un fil portant à l'une de ses extrémités un poids proportionnel au coefficient correspondant, enfin à réunir sur un même anneau (dans le cas d'un seul point à déterminer) les extrémités libres des fils. Le système abandonné à lui-même, l'anneau mobile étant laissé libre ou astreint à suivre une courbe donnée représentée par une tige rigide courbée, se mettra d'abord en mouvement, mais les frottements l'amèneront bientôt à une position d'équilibre stable, donnant la solution du problème.

Il y a lieu de remarquer :

1° Que la possibilité de tracer un polygone dans les conditions indiquées existerait également dans le cas du maximum (ou de l'équilibre instable);

2° Que cette propriété, comme celle de l'équilibre stable ou instable qui en est l'équivalent, existe tout aussi bien quand les points donnés sont placés d'une façon quelconque dans l'espace;

3° Que la solution pratique de Lamé et Clapeyron s'étend à ce cas général.

WELSCH.

Dans le *Formulario matematico*, édité par G. Peano (edizione V, anno 1908, Torino, Fratelli Bocca, editori), on trouve page 336, parmi les applications de la dérivée du potentiel, la suivante :

Le point qui rend minima la somme des distances à plusieurs points donnés est en équilibre sous l'action de forces égales entre elles et dirigées vers les points donnés.

Cette propriété se trouve dans STEINER, t. II, p. 95.

Prof. G. PAGLIERO (Turin).
[D'après l'italien. (LA RÉD.)]

3383. (**1908**, 99) (E. MALO). — Le théorème énoncé est susceptible d'une très vaste généralisation et s'étend à un nombre quel-

conque de points, de masses quelconques, placés d'une façon quelconque, dans le plan ou dans l'espace, le centre du cercle étant remplacé par un point quelconque; il se déduit immédiatement d'une propriété que j'ai signalée dans l'*Intermédiaire* à propos de la question **44** (**1895**, 136) et que j'ai formulée comme il suit :

Étant donné un système de points matériels de même masse ou de masses différentes, si l'on joint tous ces points à un même point quelconque, la résultante des forces mesurées par le produit de chacune des lignes obtenues par la masse du point correspondant passe par le centre de gravité du système et a pour mesure le produit de la distance de ces points par la somme des masses. WELSCH.

Autre réponse de M. BINI (Rome), transmise à M. *Malo.*

3390. (**1908**, 102) (A. TAFELMACHER). — Les identités indiquées se relient étroitement à d'autres données pour la résolution de l'équation

$$x^2 + y^2 = 2z^2.$$

Et en effet, la substitution $q = a$, $p + 3q = b$ transforme la première identité en

$$(b^2 - 2a^2)^2 + (b^2 - 4ab + 2a^2)^2 = 2(b^2 - 2ab + 2a^2)^2,$$

formule de M. Boutin (*J. E.*, 1895, p. 12); et la substitution $p - 2q = a$, $q = b$ transforme la seconde identité en

$$(b^2 - 2ab - a^2)^2 + (b^2 - 2ab - a^2)^2 = 2(a^2 + b^2)^2,$$

formule de M. Plakhowo (*J. E.*, 1897, p. 95).

Ces deux formules sont interchangeables (*loc. cit.*, 1897); donc il en est de même des deux identités de l'énoncé 3390. C'est ce qu'on vérifie aisément, car il suffit de changer p en $-p$.

Note. — Ces quatre formules trouveront naturellement leur application à la résolution de la question 3355 (**1908**, p. 54).

E. Liminon.

Réponse analogue de M. PLAKHOWO (Russie).

Ces formules sont connues, car elles ne sont qu'une application de

solutions plus générales

$$(m^2 - 2l^2)^2 + (m^2 + 2l^2 - 4lm)^2 = 2(m^2 + 2l^2 - 2lm)^2,$$

(voir *S. Œ.*, sept. 1906, p. 95).

Si l'on pose

$$m^2 + 2l^2 - 2lm = (m - l)^2 + l^2 = (p \pm 2q)^2 + q^2,$$

on voit qu'il suffira de poser

$$l = q, \qquad m = p - q \qquad \text{ou} \qquad p + 3q$$

pour retrouver les identités indiquées par M. Tafelmacher.

Il y a trois ou quatre méthodes générales donnant des solutions du problème à l'aide de deux ou trois indéterminées; elles ont été communiquées au Congrès de 1908 de l'A. F. A. S., à Clermont-Ferrand.

Voir aussi les *Exercices d'Arithmétique*, de Fitz Patrick et Chevrel (Q. 308, p. 250). Si

$$a^2 + c^2 = 2b^2,$$

$c^2 - a^2$ est toujours divisible par 48; donc 6 divisera toujours

$$q(p+q)(p+2q)(p+3q) \quad \text{et} \quad q(p-q)(p-3q)(2q-p).$$

A. GÉRARDIN.

Autres réponses de MM. DEGEL (Bayreuth), GLEIZES, WELSCH et WERKBRUSOW, transmises à M. TAFELMACHER. LA REDACTION.

3398. (**1908**, 123) (W. GAEDECKE). — *Courbes algébriques.* — En posant

$$\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2} = ubx + ay,$$

x et y sont, pour les deux courbes, des fonctions rationnelles de u. On peut dire alors que ce sont des fonctions elliptiques dégénérées. [On a $u = \sigma(u \mid \infty, \infty)$.]

Il semble inutile de chercher d'autres expressions des coordonnées.

DUBOUIS.

3406. (**1908**, 125) (WEREBRUSOW). — *Identités.* — La formule

$$(x+y+z)^n = x^n + y^n + z^n + (x+y)(y+z)(z+x)P,$$

pour n impair, est classique et bien connue; P est un polynome homogène de degré $n-3$ à coefficients entiers; mais, s'il n'y a pas de faute d'impression, M. Werebrusow suppose à tort que ces coefficients sont *toujours* divisibles par n. Ceci n'a lieu nécessairement que quand n est premier. En effet,

$$(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n = \sum A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

α, β, γ étant trois nombres de somme n, dont deux au moins sont différents de zéro; comme

$$A_{\alpha\beta\gamma}\,\alpha!\,\beta!\,\gamma! = n! \qquad (0! = 1)$$

quand n est premier, il est premier avec $\alpha!$ $\beta!$ et $\gamma!$, donc il divise $A_{\alpha\beta\gamma}$. Mais si n n'est plus premier, et que α, β et γ en soient certains diviseurs, il y a des cas où $A_{\alpha\beta\gamma}$ n'est plus multiple de n.

Exemple : pour $n = 9$, $A_{036} = 84$, $A_{333} = 1680$.

P. BARBARIN.

La formule générale est en partie une conséquence du théorème de la divisibilité des fonctions entières par des fonctions linéaires. Si n est impair,

$$(x+y+z)^n - (x^n + y^n + z^n)$$

est divisible par $x+y$, par $x+z$ et par $y+z$, parce qu'en faisant

$$x+y=0, \qquad x+z=0 \qquad \text{ou} \qquad y+z=0$$

on a

$$(x+y+z)^n - (x^n+y^n+z^n) = 0.$$

Mais $(x+y+z)^n - (x^n+y^n+z^n)$ n'est pas divisible en général par n; il faut que n soit un nombre premier.

G. QUIJANO (Xérès).

Autre réponse de M. HEUDLÉ.

3407. (**1908**, 125) (*Onponale*). — *Sommation de suites.* — Soit

$$S_0 = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

On aura

$$\begin{aligned}
S_1 &= S'_0,\\
S_2 &= \frac{d(xS_1)}{dx} = S_1 + xS'_1 = S'_0 + xS''_0,\\
S_3 &= \frac{d(xS_2)}{dx} = S_2 + xS'_2 = S'_0 + 3xS''_0 + x^2S'''_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
S_p &= \frac{d(xS_{p-1})}{dx} = S_{p-1} + xS'_{p-1} = S'_0 + A_p^2 xS''_0 + A_p^3 x^2 S'''_0 + \ldots + x^{p-1}S_0^{(p)}.
\end{aligned}$$

On vérifie sur les premières formules et l'on démontre ensuite facilement par récurrence que

$$\begin{aligned}
A_p^2 &= 2^{p-1} - 1 = \Delta(x^{p-1})_1,\\
A_p^3 &= \frac{3^{p-1} - 2.2^{p-1} + 1}{2} = \frac{\Delta^2(x^{p-1})_1}{2},\\
A_p^4 &= \frac{4^{p-1} - 3.3^{p-1} + 3.2^{p-1} - 1}{3!} = \frac{\Delta^3(x^{p-1})_1}{3!},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_p^k &= \frac{\Delta^{k-1}(x^{p-1})_1}{(k-1)!},
\end{aligned}$$

d'où en définitive

$$S_p = S'_0 + \frac{\Delta(x^{p-1})}{1} x S''_0 + \frac{\Delta^2(x^{p-1})_1}{1.2} x^2 S'''_0 + \frac{\Delta^3(x^{p-1})_1}{1.2.3} x^3 S_0^{\text{IV}} + \ldots + x^{p-1} S_0^{(p)}.$$

Si $x < 1$ et $n = \infty$,

$$S_0^{(k)} = \frac{k!}{(1 - x)^{k-1}},$$

et alors

$$S_p = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x\,\Delta(x^{p-1})_1}{(1-x)^3} + \frac{3x^2\,\Delta^2(x^{p-1})_1}{(1-x)^4} + \frac{4x^3\,\Delta^3(x^{p-1})_1}{(1-x)^5} + \ldots + \frac{p!\,x^{p-1}}{(1-x)^{p+1}}.$$

Si l'on remplace dans cette formule x par $\frac{1}{x}$ et p par n, on aura, pour $x > 1$,

$$1 + \frac{2^n}{x} + \frac{3^n}{x^2} + \ldots = x^2 \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2\,\Delta(x^{n-1})_1}{(x-1)^3} + \frac{3\,\Delta^2(x^{n-1})_1}{(x-1)^4} + \ldots + \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} \right]$$

et en divisant par x

$$\frac{1}{x} + \frac{2^n}{x^2} + \frac{3^n}{x^3} + \ldots = \frac{x}{(x-1)^2} \left[1 + \frac{2\,\Delta(x^{n-1})_1}{(x-1)} + \frac{3\,\Delta^2(x^{n-1})_1}{(x-1)^2} + \ldots + \frac{n!}{(x-1)^{n-1}} \right].$$

G. Quijano (Xérès).

On a évidemment

$$S_p = \frac{d}{dx}(x S_{p-1}),$$

ce qui permet de calculer S_2, S_3, S_4, ... On trouve

$$S_3 = \frac{1}{(x-1)^4} [(n+1)^3 x^{n+4} - (3n^3 + 12n^2 + 12n + 4)x^{n+3} + (3n^3 + 15n^2 + 21n + 5)x^{n+2} - (n+2)^3 x^{n+1} + x^2 + 4x + 1].$$

La formule générale S_p est laborieuse à calculer. (Pour différentes séries de ce genre, voir dans *Crelle*, t. 14, p. 15 et 16, une série d'articles d'Œttinger.)

Soient Σ_1, Σ_2, ..., les suites illimitées considérées par M. *Onponale*. On voit que

$$\Sigma_p = \frac{1}{x} S_p,$$

où l'on a remplacé, dans S_p, x par $\frac{1}{x}$. On trouve

$$\Sigma_3 = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(x-1)^4},$$

$$\Sigma_4 = \frac{x(x^3 + 11x^2 + 11x + 1)}{(x-1)^5}.$$

J'ai adressé au Congrès de l'A. F. A. S., Clermont-Ferrand, 1908,

une Note sur les coefficients des polynomes numérateurs de Σ_p : cette Note paraîtra vraisemblablement dans le *Compte rendu* de ce Congrès.

A. Boutin.

Autres réponses de MM. P. Barbarin, Dubouis et Welsch, analogues à celle de M. Boutin et transmises à M. *Onponale*.

La Rédaction.

3408. (**1908**, 126) (*Anonyme*). — *Aire maximum d'un parallélépipède.* — a, b, c, d, S désignant les trois arêtes, la diagonale donnée et l'aire totale du parallélépipède, on a

$$S = 2d^2 - [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2];$$

donc S est maximum quand toutes les différences mutuelles des arêtes sont *simultanément les plus petites possibles*. Quand il n'y a pas de condition restrictive à la forme de parallélépipède, qui reste d'ailleurs inscrit dans une sphère de diamètre d, le maximum de S a donc lieu pour

$$a = b = c = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Il faut remarquer aussi qu'en vertu de l'identité

$$(a+b+c)^2 = d^2 + S,$$

$a+b+c$ est aussi maximum en même temps.

P. Barbarin.

Réponses analogues de MM. U. Bini (Rome), Dubouis, *Efgehem*, Quijano (Xérès) et Welsch.

QUESTIONS.

1259. **[M²6cα]** La surface signalée dans la *question* **1108** (**1897**, 170) a été l'objet d'une étude de M. del Pezzo, publiée dans les *Rendiconti* de l'Académie des Sciences de Naples (23 octobre 1897). Ce travail me conduit à poser une autre question : *Quelles sont* TOUTES *les surfaces du sixième ordre, à sections planes du genre* un *dont la ligne singulière se compose de neuf droites ?*

Rosace.

1260. **[I11a]** Peut-on démontrer que la somme

$$\sum_{r=1}^{r=n} \mathrm{E}(rx),$$

où x est un nombre positif *incommensurable*, est égale à

$$n\frac{(n+1)}{2}x - \frac{n}{2},$$

en négligeant une quantité qui croît avec n (en valeur absolue) moins rapidement que n^{ε}, l'exposant ε étant une grandeur positive fixe, mais aussi petite qu'on le veut ?

J. Franel (Zurich).

1263. **[D1b]** La série

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin^2 \pi z \left[\frac{1}{n^2 \sin\frac{\pi z}{n}} - \frac{1}{\pi(n-z)}\right]^2$$

définit une fonction $\theta(z)$ qui existe pour toutes les valeurs

réelles de z et qui admet pour racines réelles les nombres premiers et les nombres premiers seulement (positifs ou négatifs). Elle admet probablement des racines imaginaires. Quelqu'un aurait-il le moyen, non pas de trouver ces racines, ce que je crois difficile, mais de limiter un champ contenant ces racines? H. LAURENT.

1264. **[I19c]** Je désirerais la solution de la question suivante : On a les congruences

$$4!+1\equiv 0 \pmod{5^2},$$
$$12!+1\equiv 0 \pmod{13^2}.$$

Peut-on découvrir une règle quelconque permettant de trouver les nombres premiers p tels qu'on ait

$$(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p^2}?$$

(*Voir* MATHEWS, *Theory of Numbers*, p. 318.)

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Michigan).

1265. **[K7c]** Soient A et B deux points dont les coordonnées sont x, y; x_1, y_1; et A′, B′ deux autres points dont les coordonnées sont x', y'; x'_1, y'_1; A et A′, B et B′ sont des points respectivement correspondants de deux figures semblables, AB et A′B′ étant deux droites homologues. Je voudrais avoir une expression explicite des coordonnées du point double S de ces deux figures :

1° Si elles sont directement semblables;
2° Si elles sont inversement semblables.

La question n'offre, par la méthode que j'ai essayée, d'autre difficulté que la longueur des calculs à effectuer, longueur devant laquelle j'ai reculé. *Alauda.*

1268. **[H11b]** Soit F une fonction telle qu'on sache

exprimer $F(u+v)$ par une formule non symétrique en $F(u)$, $F(v)$. Tel est le cas de $p(u)$. Que faut-il faire pour obtenir une formule symétrique d'addition? LÉMERAY.

1269. [H11b] Je suppose qu'il existe une fonction pouvant s'écrire sous la forme finie au moyen des signes ordinaires de l'Analyse, et satisfaisant à un théorème d'addition donné. Existe-t-il une méthode un peu générale pour obtenir cette fonction sous forme finie? LÉMERAY.

1273. [V9] Il serait désirable d'avoir un Note exacte des écrits de Gauss (lettres et travaux) qui ne se trouvent pas compris dans les *Œuvres complètes,* publiées en 7 volumes à Göttingen (1863). Quelque collaborateur pourrait-il la donner? Peut-on la trouver quelque part? *Novus.*

1274. [V8] Même question que la précédente pour les écrits mathématiques de Leibniz non compris dans les *Mathematische Schriften,* publiés par Gehrhardt en 7 volumes. Halle, 1855-1863. *Novus.*

1275. [L'14] Soit ABCDE un pentagone *convexe;* ses diagonales, se recoupant, forment un deuxième pentagone A'B'C'D'E'; les diagonales de celui-ci, se recoupant à leur tour, en déterminent un troisième A"B"C"D"E", et ainsi de suite. Sait-on trouver le point limite?

Les côtés successifs de ABCDE étant désignés par les indices 1, 2, 3, 4, 5, sait-on former l'équation explicite $f(1, 2, 3, 4, 5) = 0$ de la conique circonscrite à ce pentagone? BARBARIN.

3464. [R7a] Pour mettre les nouvelles découvertes (radium, rayons cathodiques, etc.) en concordance avec les

principe de la Mécanique classique, on a été amené à considérer la notion de masse comme variable avec l'orientation et l'intensité du mouvement.

Ne serait-il pas préférable d'admettre, dès le début, que le mobile (volume infinitésimal de matière en mouvement) étant susceptible de prendre le mouvement infinitésimal le plus général qui est, comme on sait, un mouvement hélicoïdal, possède non seulement une inertie de translation (la seule considérée jusqu'à aujourd'hui) mais aussi une inertie de rotation?

Dès lors, la situation cinématique ou dynamique d'un mobile serait définie par un quaternion dont la partie scalaire serait le pas de l'hélice fondamentale et la partie vectorielle le vecteur représentatif de la vitesse ou de l'accélération du mobile dans son mouvement hélicoïdal élémentaire.

A. Auric.

3465. [**H9h**] Dans un petit livre qui est intitulé *Ueber Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen* (1891), aussi bien que dans un Mémoire inséré dans les *Acta mathematica*, t. XII, M. Horn a étendu la théorie de M. Fuchs des équations différentielles linéaires à des systèmes d'équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$

où les coefficients a, b, c sont des fonctions rationnelles de x et y telles qu'il existe trois intégrales, linéairement indépendantes et satisfaisant à toutes les trois équations. A-t-on étudié des systèmes d'ordre quelconque du même point de vue? Quelles sont les conditions pour qu'un tel système ait toutes ses intégrales régulières? Je serais très reconnaissant

au correspondant qui pourrait me donner des renseignements bibliographiques sur ce sujet.

NÖRLUND (Copenhague).

3466. [IcfG] Soit à résoudre en nombres rationnels une équation algébrique à deux inconnues, ou, si l'on veut, à résoudre en nombres entiers une équation algébrique *homogène* à trois inconnues. C'est là un des problèmes les plus généraux de l'*Analyse indéterminée*. Nous l'énoncerons de préférence sous la forme suivante :

Déterminer les points rationnels d'une courbe algébrique.

On sait que si la courbe est de genre o ou de genre 1, elle admet une infinité de transformations birationnelles en elle-même, et ces transformations permettront, dans un grand nombre de cas, de déduire d'un point rationnel de la courbe une infinité de tels points. [*Voir,* pour plus de détails, POINCARÉ, *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques* (*J. M.*, 5ᵉ série, t. VII).]

Si la courbe est de genre $\geqq 2$, elle ne peut admettre qu'un nombre fini de transformations birationnelles ou simplement rationnelles en elle-même. Peut-elle néanmoins posséder une infinité de points rationnels? Je n'en connais aucun exemple et suis porté à croire que la chose est impossible.

Il y aurait donc lieu d'essayer d'établir le théorème suivant :

Si l'équation algébrique $f(x, y) = 0$ *représente une courbe de genre supérieur à* 1, *elle ne peut avoir qu'un nombre fini de solutions en nombres rationnels ;*

Ou, si cette proposition est inexacte, de trouver des classes de courbes algébriques pour lesquelles elle est en défaut.

C'est là une question qui me paraît très difficile mais fort intéressante à approfondir. On pourrait peut-être tenter

d'aborder certains cas particuliers, par exemple le suivant :

Rechercher si l'équation

$$y^2 = P(x),$$

où $P(x)$ *désigne un polynome du cinquième ou du sixième degré à racines distinctes, peut admettre une infinité de solutions rationnelles?* P. FATOU.

3467. [O 3 e] A-t-on étudié les courbes pour lesquelles le rayon de courbure R et le rayon de torsion T sont liés par la relation

$$R^2 T = \text{const.}$$

S. PRIETO.

[Traduit de l'espagnol. (LA RÉD.)]

3468. [O 2 h] Exprimer explicitement les coordonnées d'un point d'une courbe sphérique, dont le rayon de courbure géodésique varie proportionnellement à la longueur de l'arc, en fonction d'un paramètre arbitraire. Quand on traite le problème analogue dans le plan, on trouve que les coordonnées s'expriment au moyen des intégrales de la diffraction; dans le cas de la sphère, il semble que la solution soit plus compliquée. S. PRIETO.

[Traduit de l'espagnol. (LA RÉD.)]

3469. [I 19 c] Donner la solution générale du système indéterminé

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^2 = \sum_{s=1}^{n} y_s^2,$$

$$\sum_{s=1}^{n} x_s = \sum_{s=1}^{n} y_s.$$

U. BINI (Rome).

3470. [**I19c**] Je désire une bibliographie aussi complète que possible sur les équations indéterminées homogènes du quatrième degré. U. Bini (Rome).

3471. [**H12b**] Je désirerais savoir comment intégrer l'équation aux différences finies

$$A_n = (2n-1)A_{n-1} - (n-1)(n-2)A_{n-2}$$

avec les conditions initiales

$$A_0 = A_1 = 1\,?$$

Je trouve par une voie indirecte

$$A_n = 1 + n(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}n(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}n(n-1)(n-2) + \ldots$$

Ce n'est donc pas un résultat, mais une méthode que je désire. A. Boutin.

3472. [**V**] Je désire savoir par qui et pourquoi le mouvement défini par l'équation

$$s = A \sin \frac{2\pi}{T}(t - t_0),$$

où A, T, t_0 sont des quantités données, a été dénommé *harmonique*. Giov. Russo (Catanzaro).
[D'après l'italien. (La Réd.)]

3473. [**V**] Dans quel Ouvrage parle-t-on, pour la première fois, du partage des terres *au quartier du roi?*
En quoi consiste exactement ce partage ?

N'aurait-t-il pas inspiré les problèmes d'Huygens (question 3232; **1907**, 126) et de Leibniz (question 3; **1894**, 1)?

G. Lemaire.

3474. [V8] A la page 202 du Tome V des *Œuvres complètes* de Pouchkine, célèbre poète russe (édit. de Souvarine, Saint-Pétersbourg, 1903), on trouve l'anecdote suivante :

« Quand naquit Ivan Antonovitch, Anna Ivanovna envoya à Euler l'ordre de faire un horoscope au nouveau-né. Euler commença par refuser, mais dut se soumettre. Il s'occupa de l'horoscope avec un autre académicien et, en qualité d'Allemands consciencieux, ils le composèrent d'après toutes les règles de l'Astrologie, quoiqu'ils n'y ajoutaient aucune foi. Les résultats auxquels ils aboutirent terrifièrent tellement les deux mathématiciens qu'ils présentèrent à l'Impératrice un autre horoscope, qui prédisait au nouveau-né toutes sortes de félicités. Euler garda néanmoins le premier horoscope et le montra au comte C. Rasoumovsky, quand le sort du malheureux Jean VI se fut accompli. » (Entendu de Nath. Cyr. Zagriagskaya.)

On connaît le sort terrible d'Ivan Antonovitch qui, proclamé empereur à l'âge de 3 mois, ne régna que 404 jours et passa tout le reste de sa vie comme prisonnier enterré vif dans une tour de la forteresse de Schlüsselbourg, où il eut un sort semblable à celui du mystérieux *Masque de fer*, et où il fut assassiné par ses geôliers lors d'une tentative de libération entreprise par un officier Mirovitch.

Il serait intéressant de savoir : 1° si l'anecdote citée peut être regardée comme authentique; 2° si l'horoscope gardé par Euler a été découvert dans ses papiers; 3° quel est son texte pour pouvoir le comparer au sort de l'empereur prisonnier; 4° si d'autres études astrologiques d'Euler sont connues.

Georges Hitrovo (Saint-Pétersbourg).

3475. [Σ] Les Tables de nombres premiers permettent de construire, dans une partie ou dans toutes les limites de ces Tables, divers formules ou Tableaux relatifs à ces nombres et analogues à certains que j'ai fait connaître antérieurement (*I. M.*, rép. à **857**, **1906**, 9 et à **968**, **1905**, 110; *Ann. Fac. Sc. Toulouse,* 1904, p. 340) :

1° Soient les nombres premiers $2kh + l$ ($2k$ et l donnés premiers entre eux, h variable) rangés par ordre de grandeur croissante, et les différences Δ_1, Δ_2, ... de chacun avec le précédent; si l'on ne conserve que celles de ces différences supérieures à toutes les précédentes, on aura un Tableau ne contenant probablement que *fort peu* de nombres et donnant une limite supérieure de la différence entre deux nombres premiers consécutifs x_1, x_2 de la forme $2kh + l$; cette limite pourra s'exprimer avec moins de précision par une fonction simple de x_1. Traiter par exemple le cas des nombres premiers $4n + 1$, $4n + 3$, $8n + 1$, ...

2° On peut opérer de la même manière avec les nombres *premiers n* tels que $2kn + l$ soit premier ($2k$ et l donnés premiers entre eux, n premier variable), par exemple avec les nombres premiers n tels que $2n + 1$ (ou $4n + 1$, ...) soit premier. Quand $l = 1$, le résultat constituera une réponse partielle à **3344** (**1908**, 51) et, pour les petites valeurs de k premières à 3, une contribution à la démonstration du dernier théorème de Fermat (*voir* rép. à **612**, **1908**, 247).

3° On peut opérer de la même manière avec les nombres *premiers n* tels que $n + 2k$ (k donné) soit premier, plus généralement avec les nombres premiers jouissant d'une ou de plusieurs propriétés déterminées communes (comparer **2547** et **2548**, **1903**, 70, 196, 220, 222).

Les sujets sont très abordables avec de la patience et aussi une certaine ingéniosité pour abréger les opérations; les résultats ont de l'intérêt; il sera bon de s'aider des travaux de

M. Glaisher, mentionnés dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1904, p. 340. E. MAILLET.

3476. **[O6s]** Que sait-on des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre? Renseignements bibliographiques.
W. GAEDECKE (Berlin).

3477. **[H8f]** Trouver l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles

$$2z^4\frac{\partial z}{\partial x} + 5xy\frac{\partial z}{\partial y} = 5xz.$$

W. GAEDECKE (Berlin).

3478. **[F6]** Déterminer la valeur de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{ax^2+b}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$$

W. GAEDECKE (Berlin).

3479. **[O]** Je désire avoir une discussion exacte de la surface jouissant de la propriété suivante : La normale au point M à la surface coupe le plan XOY en un point P tel que PM = PO. W. GAEDECKE (Berlin).

3480. **[O2]** Quelle est l'équation intrinsèque (*natürliche Gleichung*) de la courbe ayant pour équation polaire

$$r = \frac{2e^{\lambda\varphi}}{e^{2\lambda\varphi}+\mu} \qquad (\lambda,\ \mu \text{ constants})?$$

Si l'on pose $\mu = 0$, on obtient la spirale logarithmique, ayant l'équation intrinsèque $\rho = ks$.
W. GAEDECKE (Berlin).

3481. [L¹15] On trouve facilement par le calcul analytique les lieux suivants :

La tangente (t) et la normale (n) en un point variable M d'une ellipse rencontrent les deux axes en T, T′ resp. N, N′. Les milieux des cordes TT′ resp. NN′ sont T_1 et N_1.

1° L'enveloppe des droites $T_1 N_1$ est l'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{c^4}{4}.$$

2° L'enveloppe des cercles de diamètre NN′ est la quartique

$$(x^2+y^2)^2 = c^4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

facile à interpréter.

Comment démontrer ces propriétés *géométriquement ?*

W. Gaedecke (Berlin).

3482. [I19c] L'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4$$

est-elle possible en nombres entiers? Et plus généralement l'équation

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_p^n = y^n$$

dans laquelle on suppose $n > p > 2$ est-elle possible en nombres entiers?

Mathieu.

3483. [I19c] Trouver une solution de l'équation indéterminée

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0.$$

A. Werebrusow (Russie).

3484. [A1b] Connaît-on les formules suivantes pour

le cube de la somme de trois carrés :

$$(a^2+b^2+c^2)^3 = A^2+B^2+C^2;$$

$$A = a(a^2+b^2+3c^2),$$
$$B = b(a^2+b^2+3c^2),$$
$$C = c(3a^2+3b^2-c^2);$$

$$A_1 = a^3 - a(b^2+c^2),$$
$$B_1 = b^3 - 2a^2c + b(a^2+c^2),$$
$$C_1 = c^3 + 2a^2b + c(a^2+b^2);$$

$$A_2 = a(a^2+b^2-c^2) - 2bc(c+a),$$
$$B_2 = b(b^2+c^2-a^2) - 2ac(a+b),$$
$$C_2 = c(c^2+a^2-b^2) - 2ab(b+c);$$

$$A_3 = a(a^2+c^2-3b^2) - 2bc^2,$$
$$B_3 = b(b^2-c^2-3a^2) - 2ac^2,$$
$$C_3 = c(c^2-a^2-b^2) + 4abc?$$

A. Werebrusow (Russie).

3485. [I1] Connaît-on des relations entre les chiffres d'une fraction décimale, lorsque celle-ci est le carré ou le cube d'un nombre rationnel? *Ganimard.*

3486. [I2] S'est-on occupé de la décomposition de $(2a)^a \pm 1$ en facteurs premiers? Peut-on trouver une ou deux limites pour les facteurs premiers de la forme $2an+1$, n étant premier? Dubouis.

RÉPONSES.

1056. (**1897**, 100; **1906**, 234) (*Canon*) — *Travaux sur la représentation plane des surfaces.* — M. O. Degel nous a adressé une liste bibliographique malheureusement trop longue pour être insérée. Nous la tenons à la disposition de nos correspondants, en les priant, s'ils la demandent, de nous la retourner après communication.

La Rédaction.

1108. (**1897**, 170; **1908**, 1) (*Rosace*). — L'étude de la surface du huitième ordre définie dans l'énoncé **1108** a fait l'objet d'un Mémoire spécial de M. del Pezzo, inséré aux *Rendiconti* de l'Académie des Sciences de Naples (23 octobre 1897). Cette indication a été donnée ici même dans l'énoncé **1259** (**1898**, 76) par l'auteur de la question **1108** (*Rosace*, feu E. Cesaro). La question **1108** pourra donc être considérée comme résolue. Elle ne paraissait d'ailleurs avoir été proposée que pour préparer la question **1109** (**1897**, 170; **1908**, 3), résolue ici tout récemment (**1908**, 178).

Devignot.

1163. (**1897**, 242; **1908**, 145) (E. Lemoine). — *Points doubles d'une division homographique.* — Par A je mène une droite quelconque où je prends AB_1 et AC_1 égaux à AB' et AC'; BB_1 et CC_1 se coupant en S, je tire SI et SJ_1 parallèles à AB_1 et AB. Je porte

$$A'J' = AJ'_1 = AJ_1.$$

Sur IJ'_1 et IJ' comme diamètres, je décris deux demi-cercles; la perpendiculaire à AB au point A coupant le premier en H, je tire HK parallèle à AB et coupant le second en m et n; leurs projections M et N sur AB sont les points doubles cherchés.

Car I et J′ sont les points limites de la division, donc

$$IA \times J'A' = IA \times J'_1A = -\overline{AH}^2 = -\overline{Mm}^2 = -\overline{Nn}^2$$
$$= IM \times J'M = IN \times J'N.$$

P. Barbarin.

1186. (**1897**, 269; **1908**, 170) (R. de Montessus). — Réponses de MM. Léon Philippe et G. Quijano communiquées à M. de Montessus.

La Rédaction.

1187. (**1897**, 270; **1908**, 171) (G. Ricalde). — Un Ouvrage de M. Désiré André sur les *Notations mathématiques* est à l'impression en ce moment et paraîtra au commencement de 1909. *Gévé.*

1241. (**1898**, 51) (E. Borel). — (**1898**, 185; **1899**, 13, 227, 275; **1900**, 202). — Autre réponse de M. G. Lemaire. La Rédaction.

1189. (**1899**, 79) (E.-B. Escott). — *Rectification des arcs de cercle* (**1899**, 211; **1900**, 413). — Voici une méthode simple, *peut-être nouvelle,* pour les arcs non supérieurs à 60°.

(On réduit au premier sextant, ne serait-ce que par bissections successives, les arcs supérieurs à 60°.)

Soient : AB la corde de l'arc à rectifier, M le milieu de l'arc opposé et N le point de AB tel que $AN = \frac{2}{3}$ AB.

En faisant, extérieurement au cercle, $BAX = 45°$, l'intersection de MN avec AX est un point P donnant, *à très peu près,* AP = arc AB.

G. Lemaire.

1622. (**1899**, 200) (J. Jonesco). — (**1908**, 132). — A étant la base d'un système quelconque de numération, on aperçoit tout d'abord *deux types* de nombres accouplés et *renversés* l'un de l'autre, savoir :

$$1^\circ \qquad p(A^n - 1) \qquad \text{et} \qquad (A + 1 - p)(A^n - 1),$$
$$2^\circ \quad p(A + 1)(A^n - 1) \qquad \text{et} \qquad (A - p)(A + 1)(A^n - 1),$$

p étant $< A$, n quelconque pour le premier type, $\overline{\gtrless} 2$ pour le deuxième.

Si p est diviseur de $A + 1$ (premier type), de A (deuxième type), le nombre correspondant divise celui qui lui est accouplé; il y a donc autant de solutions *distinctes* de la question que $A + 1$ et A ont, *ensemble*, de diviseurs, déduction faite de ces nombres eux-mêmes et le diviseur 1 ne convenant que pour le deuxième type. (Quand $p = \frac{A+1}{2}$ ou $\frac{A}{2}$, les nombres accouplés se réduisent à un seul, qui est *symétrique*.)

Il est clair que de deux nombres accouplés N et N′ on peut déduire une infinité de nombres, 2 à 2 proportionnels et renversés, en écrivant successivement, dans leur ordre et autant de fois qu'on veut, les chiffres de l'un de ces nombres faisant varier à volonté n, c'est-à-dire le nombre des chiffres $(A - 1)$, et séparant les groupes par des zéros en nombre quelconque.

Le nombre ainsi obtenu et celui qui lui est dans le rapport des nombres N et N′ sont dans les conditions de la question.

Mais, en dehors des deux types généraux indiqués ci-dessus, il existe encore des solutions dont la loi paraît bien plus difficile à découvrir.

Tels sont les nombres 1015 dans le système à base 8 qui, multiplié par 5, donne 5101, et 18 dans le système à base 13 qui, multiplié aussi par 5, donne 81.

Mais, contrairement à ce qui a lieu pour les nombres accouplés appartenant aux deux types généraux, l'existence de ces nombres renversés l'un de l'autre n'entraîne pas celle de nombres ayant avec ceux-ci des rapports simples.

Les nombres donnés ici comme exemples sont seuls de leur espèce dans la numération où ils sont écrits. WELSCH.

2690. (**1903**, 299) (H. BROCARD). — *Sur Leclerc et Cochin* (**1904**, 171). — I. *En ce qui concerne Leclerc.* — D'après le colonel Laussedat (*Recherches sur les instruments*, etc., t. I, p, 404, Gauthier-Villars, 1898) : « L'un de ses Ouvrages, publié en 1669, était intitulé : *Pratique de la Géométrie sur le papier et sur le terrain;* il fut réédité en in-8° en 1688, 1690, 1719, 1735 et 1745, sous le nouveau titre de *Géométrie théorique et pratique à l'usage des artistes.* Ce livre, *orné de charmantes et spirituelles vignettes, qui n'étaient pas toujours les mêmes dans les différentes éditions,* a eu, pendant près d'un siècle, une vogue extraordinaire.... »

II. *En ce qui concerne Cochin.* — Le titre du *Dictionnaire* de Savérien (1753) est orné d'une composition de Cochin, mal rendue par le graveur. G. Lemaire.

2816. (**1904**, 212) (Ler). — Le prix proposé pour 1899 par l'Académie royale des Sciences de Madrid : *Traité de Trigonométrie circulaire et hyperbolique,* etc., a été décerné à M. Antonio Gomez Ruiz, astronome à l'Observatoire de la Marine, à San-Fernando. (*Voir* l'*Annuaire de l'Académie* pour 1908, p. 208 et 295.)

H. Brocard.

2868. (**1905**, 10) (A. Clause). — *Incidence d'une date* (**1906**, 252; **1907**, 32, 62). — J'ai établi, en juin 1907, un projet de calendrier universel résolvant cette question *de plano* et offrant d'autres avantages.

Je l'exposerai avec plaisir aux correspondants qui désireraient en prendre connaissance. G. Lemaire.

Adresse : M. G. Lemaire, géomètre du cadastre, Saïgon, Indo-Chine.

3119. (**1906**, 259) (Nazarevski). — *Équations à coefficients entiers* (**1907**, 111). — Nouvelle réponse de M. Werebrusow transmise à M. Nazarevski. La Rédaction.

3128. (**1906**, 261) (G. Lemaire). — (**1907**, 182, 278). — Une indication bibliographique antérieure à la proposition de la question se trouve dans la *B. M.,* 1905 : H. Suter. — Sur le Traité *De superficierum divisionibus* de Mohammed Bagdadinus (321-322) [*voir B. D.* (2), 1906, 193-194], M. G. Eneström la résume ainsi : « On avance ordinairement que le mathématicien anglais J. Dee a trouvé un manuscrit arabe contenant le Traité de Mohammed Bagdadinus sur la division de figures rectilignes, et qu'il l'a traduit ensuite en latin. M. Suter fait observer que cette indication dérive, sans doute, d'un malentendu, et que Dee n'a que copié une ancienne traduction du Traité, due probablement à Gérard de Crémone. » H Brocard.

3169. (**1907**, 50) (E.-N. Barisien). — *Équations indéterminées* (**1907**, 200, 227; **1908**, 109). — x et u étant arbitraires, la *solution*

générale du problème est donnée par les formules :

$$y = \frac{a - x + \lambda}{2}, \qquad v = \frac{a - u + \mu}{2}$$

$$z = \frac{a - x - \lambda}{2}, \qquad w = \frac{a - u - \mu}{2},$$

dans lesquelles on a

$$\lambda^2 - \mu^2 = (u - x)[3(u + x) - 2a],$$

λ et μ étant uniquement astreints à être respectivement de même parité que $a - x$ et $a - u$.

a, qui est arbitraire, est la valeur commune des sommes

$$x + y + z, \qquad u + v + w.$$

WELSCH.

3256. (1907, 173) (E. GRIGORIEFF). — *Impossibilité de l'équation*

$$x^4 + y^4 + z^4 = 3u^4.$$

— x, y, z et u n'ayant aucun diviseur commun et en vertu des congruences

$$x^4 \equiv 0, 1, \qquad 3u^4 \equiv 0, 3 \qquad (\text{mod. } 8)$$

il faut admettre

$$x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv u^2 \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 8).$$

Soit

$$x^2 = u^2 - 2\alpha, \qquad y^2 = u^2 - 2\beta, \qquad z^2 = u^2 - 2\gamma;$$

on aura

$$u = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Or, α, β et γ étant divisibles par 4, u^2 le sera aussi, ce qui est impossible. A. WERKBRUSOW (Russie).

3331. (1908, 28) (HAZARD). — *Tables de carrés et de cubes* (1908, 157). — Question posée déjà sous le n° 416 (1895, 5). (*Voir* 1896, 40, 69 : 1907, 247.)

Aux Tables mentionnées ou non (de Crelle, Claudel, Arnaudeau, Vasselon, E. Gelin, Retsin, E. Lucas, Saint-Loup, etc.), on pourra

ajouter P. BARLOW, *New mathematical Tables* (carrés et cubes de 1 à 10000), 1814, et une annonce toute récente (juillet 1908) de la librairie Gauthier-Villars : E. DUHAMEL, ingénieur, *Carrés et racines carrées*. Tableau donnant : 1° les carrés des nombres entiers jusqu'à un milliard; 2° les racines carrées des nombres jusqu'à dix milliards. Tableau 44×26. *Devignot.*

3342. (**1908**, 32) (E. MAILLET). — (**1908**, 158). — Je crois bien que la phrase du *Scandale des Mathématiques* n'est pas d'Auguste Comte, mais celui-ci a jugé non moins sévèrement les tentatives analogues du calcul des probabilités.

Dans son *Cours de Philosophie positive*, 5e éd., 1894, t. IV, 50e Leçon, p. 410-415, il les qualifie d'absurde illusion, d'espoir chimérique, d'abus grossier, de manie algébrique, d'absurde doctrine, etc., mais l'expression attribuée à Stuart Mill est bien autrement énergique et suggestive. *L.-N. Machaut.*

3347. (**1908**, 52) (A. WEREBRUSOW). — *Équation indéterminée.* — (**1908**, 158). — D'après le théorème démontré (*Math. Sbornik*, t. XXVI) par la méthode de la question 3338 (**1908**, 30) l'équation est impossible pour

$$m = 3, 5, 9, 15, 21, 39, 45, 69, 81, 99, 105, 111, 129, 165, 195, \ldots, \\ -5, -21, -45, -69, -165, \ldots.$$

Les solutions de MM. Gleizes et Mathieu sont des cas particuliers, quand x^2y^2 divise un des facteurs $z \pm (x^2 - y^2)$.

A. WEREBRUSOW (Russie).

3348. (**1908**, 52) (A. WEREBRUSOW). — *Équation indéterminée.* — (**1908**, 158). — Dans la liste des valeurs impossibles de m se sont glissés par erreur -72, -90, -96. Chez Euler il faut au lieu de $+91$ mettre $92(29^2 \pm 6)$. Euler a trouvé les solutions pour

$$-15(24,95), \quad -39(24,155), \quad -51(3,88), \quad -77(7,72), \quad -79(5,48).$$

Ainsi il y a lieu d'étudier les valeurs négatives 35, 63, 71, 80, 84, 87, 95 et 99, pour lesquelles les équations ne sont pas évidemment incompatibles; par exemple, pour $m = -80$:

$$2a^2 + d^2 = b^2, \qquad 4a^2 - 39d^2 = c^2.$$

A. WEREBRUSOW (Russie).

3354. (**1908**, 54) (E.-N. Barisien) (**1908**, 163, 189). — Voici quelques indications supplémentaires concernant la bibliographie du problème A.

Tout d'abord l'unique article de Catalan au *Journal de Crelle*, t. **27**, 2ᵉ cahier, 1844, p. 192 :

M. Catalan, répétiteur à l'École Polytechnique.

Le théorème suivant, que je crois vrai, bien que je n'aie pas encore réussi à le démontrer complètement; d'autres seront peut-être plus heureux :

Deux nombres entiers, consécutifs, autres que 8 *et* 9, *ne peuvent être des puissances exactes; autrement dit, l'équation* $x^m - y^n = 1$, *dans laquelle les inconnues sont entières et positives, n'admet qu'une seule solution.*

Sur la même proposition, *voir I. M.*, question 487 (Désiré André) (**1895**, 26) et la réponse de M. *H. Braid* (**1895**, 427).

L.-N. Machaut.

3363. (**1908**, 75) (Hernandez). — *Déterminants* (**1908**, 166). — *Complément de réponse.* — On peut répondre à la seconde partie de cette question dont l'énoncé avait été incorrectement transcrit.

Considérons l'égalité

$$\frac{e^{xz}}{e^x + 1} = \sum \frac{\chi_n(z)}{n!} x^n;$$

$\chi_n(z)$ sont les polynomes d'Hermite, et l'on a

$$\chi_{2n}(0) = 0, \qquad \chi_{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{2(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \sum_{K=0}^{K=\infty} \frac{1}{(2K+1)^{2n+2}}.$$

On aura donc, en faisant $z = 0$,

$$H(x) = \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$$

et, par suite,

$$(e^x - 1) = H(x)[e^{2x} - 1],$$

ou, en réduisant,

$$\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} \cdots\right)$$
$$= 2H(x)\left[1 + \frac{2}{2!}x + \frac{2^2}{3!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^3 + \ldots\right];$$

d'où l'on tire :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{2}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2^2}{3!} & \frac{2}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3!} \\ \frac{2^3}{4!} & \frac{2^2}{3!} & \frac{2}{2!} & 1 & \dots & 0 & \frac{1}{4!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2^{n-1}}{n!} & \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} & \frac{2^{n-3}}{(n-2)!} & \dots & \dots & \frac{2}{2!} & \frac{1}{n!} \end{vmatrix} = \frac{2\chi_n(0)}{n!},$$

et par conséquent

$$D_{2n} = 0.$$

A. Auric.

3375. (1908, 97) (E. Dubouis). — *Série numérique* (1908, 205). — Th. Clausen, *Ueber die Summe der Reihen*

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \quad \textit{und} \quad 1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \dots$$

(*Cr.*, t. 5, 1830, p. 308-382). Degel (Bayreuth).

3386. (1908, 100) (O. Degel). — *Équation différentielle* (1908, 210). — Autres solutions de MM. O. Degel et Kapteyn (Utrecht). — M. Kapteyn intègre en faisant le changement de variable

$$y = (x+1)(z-1).$$

M. O. Degel introduit les coordonnées tangentielles u, v (Plückersche Liniencoordinaten) à l'aide des équations

$$ux + vy + 1 = 0, \qquad u\,dx + v\,dy = 0, \qquad x\,du + y\,dv = 0;$$

dans les deux cas, les nouvelles variables se trouvent séparées.

La Rédaction.

3403. (1908, 124) (*Agnès Morri*). — (1908, 215). — La première démonstration est de Bretschneider; c'est un essai de restitution de la démonstration de Pythagore. (*Voir* également Simpson, *Eléments de Géométrie*, traduction de l'anglais; Paris, 1766.)

Quant à la seconde, elle est due à A. Marre d'après l'Ouvrage

sanscrit *Youcti Bâcha* (*Bulletino di bibliografia di Boncompagni*, t. XX, 1887). *Voir* aussi ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, 6[e] édition, 1891. J. ROSE (Chimay, Belgique).

3409. (**1908**, 126) (*Anonyme*). — La proposition devient exacte si l'on considère la suite 0, 1, 2, ..., $\frac{p-1}{2}$ au lieu de 1, 2, ..., $\frac{p-1}{2}$. Voir : *Exercices d'Arithmétique* de Fitz-Patrick et Chevrel. Dans l'édition de 1893, sinon dans d'autres, la fin de la page 129, à partir de « Conséquences... », est à modifier. DUBOUIS.

3411. (**1908**, 147) (MEHMED NADIR). — *Équations indéterminées.* — On obtient facilement les formules suivantes :

$$u = 2a+1, \qquad y = 2a^2+2a, \qquad x = 2a^2+2a+1,$$
$$T = a(a+1)(2a^2+2a+1).$$

Devignot, A. GÉRARDIN.

3413. (**1908**, 148) (G. LEMAIRE). — *Point lié au quadrilatère.* — Le point O jouit probablement de propriétés remarquables. Voici une relation métrique que j'ai trouvée.

Le théorème de Simson-Stewart appliqué aux triangles AOC et BOD donne

$$\overline{OM_1}^2 + \overline{OM_2}^2 = \frac{\Sigma\overline{OA}^2}{2} - \frac{\overline{AC}^2+\overline{BD}^2}{4}.$$

D'après un théorème dû à Euler, on a

$$\Sigma\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{M_1M_2}^2;$$

donc

$$\overline{OM_1}^2 + \overline{OM_2}^2 - \overline{M_1M_2}^2 = \frac{\Sigma\overline{OA}^2}{2} - \frac{\Sigma\overline{AB}^2}{4},$$

Dans le cas du quadrilatère orthodiagonal on aura

$$2\Sigma\overline{OA}^2 = \Sigma\overline{AB}^2.$$

J.-F. D'AVILLEZ (Portugal).

Autre réponse de M. G. Quijano, transmise à l'auteur.

LA RÉDACTION.

3416. (**1908**, 171). (*Agnès Morri*). — *Rectangle maximum inscrit dans un triangle.* — Soient ABC le triangle ($C \gtreqless B$), DEFH le rectangle; D, E, H respectivement sur BC, AB, AC; F non extérieur au triangle. Si un rectangle inscrit n'a pas la disposition que j'indique, on peut l'agrandir par des homothéties succcessives, en prenant pour centres d'homothétie les sommets du triangle.

On a

$$A \gtreqless 90^\circ, \qquad DEB \gtreqless 90^\circ, \qquad DHC \gtreqless 90^\circ.$$

Soient

$$x = BD, \qquad \alpha = BDE,$$

S l'aire du rectangle.

$$\frac{DE}{\sin B} = \frac{x}{\sin(B+\alpha)}, \qquad \frac{DH}{\sin C} = \frac{a-x}{\cos(C-\alpha)}$$

donnent

$$\frac{S}{\sin B \sin C} = \frac{x(a-x)}{\sin(B+\alpha)\cos(C-\alpha)} = \frac{f(x)}{\varphi(\alpha)}.$$

$f(x)$ doit être maximum et $\varphi(\alpha)$ minimum. Donc $x = \frac{a}{2}$. On a

$$\varphi'(\alpha) = \cos(2\alpha + B - C).$$

Premier cas : $C < 90^\circ$. — α varie (croît) de $90^\circ - B$ à C; en vertu de $DEB \gtreqless 90^\circ$ et $DHC \gtreqless 90^\circ$, $\varphi(\alpha)$ croît puis décroît. Il est minimum et égal à sin A aux deux limites $90^\circ - B$ et C. On a ainsi deux rectangles maximums. Ils ont chacun un côté sur le périmètre ABC et pour aire $R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Second cas : $C \gtreqless 90^\circ$. — α varie de $90^\circ - B$ à 90°; $2\alpha + B - C$ croît de A à $A + 2B$, qui est $< 180^\circ$, car il est $< A + B + C$. On distingue les cas $A + 2B > 90^\circ$ et $A + 2B \gtreqless 90^\circ$ et l'on trouve encore le maximum $R^2 \sin A \sin B \sin C$. Dans tous les cas, un côté du rectangle maximum est sur le périmètre du triangle. DUBOUIS.

Soient le triangle ABC et le rectangle *inscrit* DEFG, DE étant parallèle à BC et FG partie de ce côté; les angles B et C sont supposés aigus. Si, D étant fixe sur AB, on fait tourner l'angle droit FDE à la position F'DE', F' restant sur BC et E' sur AC, le rectangle *intérieur* DE'F'G' a une aire moindre que DEFG, car soient $DF = h$, $DE = b$ et $FDF' = x$, on a

$$\text{aire DEFG} = bh,$$
$$\text{aire DE'F'G'} = bh\frac{\sin C}{\cos x \sin(C+x)} = bh\frac{2\sin C}{\sin C + \sin(2x + C)}.$$

Quand x commence à croître, de o à $\frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}$, cette expression décroît évidemment pour atteindre un minimum correspondant au cas où DF′ est parallèle à la bissectrice de l'angle GEC, puis elle croît jusqu'à ce que x étant devenu égal à $\frac{\pi}{2} - C$, DE′ soit à son tour perpendiculaire sur AC et que le rectangle redevienne inscrit.

Conclusion : Le rectangle maximum contenu dans le triangle est bien inscrit. P. Barbarin.

3418. (**1908**, 172) (Gleizes). — *Un problème de minimum.* — M. Czuber a traité un problème plus général comme application de la théorie des maxima dans *Vorlesungen über Differential und Integral-Rechnung*, t. I, p. 326.

Voici ses données :

Étant donnés n points de l'espace, à chacun desquels est attribué un coefficient m, déterminer un plan tel que la somme des carrés des distances de ces points au plan, multipliés respectivement par les coefficients m, soit minimum.

Il trouve trois plans de minimums et de maximums : ce sont les plans principaux de l'ellipsoïde d'inertie de ce groupe de points.

La méthode de solution employée par M. Czuber s'applique sans difficulté au cas plus simple de la question présente. Si x_i et y_i désignent les coordonnées des n points et si l'on pose

$$\Sigma x_i^2 = A, \quad \Sigma x_i y_i = B, \quad \Sigma y_i^2 = C, \quad \Sigma x_i = D, \quad \Sigma y_i = E,$$

on déterminera les constantes φ et p de la droite cherchée

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$$

par les équations

$$\begin{cases} \cos\varphi \,.\, \Sigma x + \sin\varphi \,.\, \Sigma y - p = 0, \\ \tang 2\varphi = \dfrac{2(nB - ED)}{n(A - C) + E^2 - D^2}. \end{cases}$$

La première de ces équations montre que la droite passe par le centre des moyennes distances des points donnés. La seconde donne immédiatement deux coefficients angulaires : l'un répond à un maximum, l'autre à un minimum. *Brugensis.*

Droite pour laquelle la somme des carrés des distances de n points est minimum. — Cette question a fait l'objet du problème proposé à l'École Normale en 1859 (*N. A.*, 1859, p. 376-381). Il y a un système particulier d'axes tels que

$$\Sigma x_i = 0, \qquad \Sigma y_i = 0, \qquad \Sigma x_i y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

l'origine est au centre des moyennes distances des n points. On voit alors aisément que, pour une direction donnée de la droite, le minimum a lieu quand elle passe par l'origine et que, quand la droite tourne autour de l'origine, le minimum a lieu suivant l'axe des x quand Σx_i^2 est moindre que Σy_i^2, suivant l'axe des y en cas contraire. L'autre axe correspond à un maximum relatif.

Il y a une infinité de systèmes de trois points tels que la somme des carrés de leurs distances à toute droite du plan soit dans un rapport constant $\frac{3}{n}$ à la somme des carrés des distances des n points. Ce sont les sommets du triangle maximum d'aire constante inscrit dans l'ellipse

$$\frac{x^2}{\Sigma x_i^2} + \frac{y^2}{\Sigma y_i^2} - \frac{2}{n} = 0.$$

La droite minimum est donc le petit axe de cette courbe.

P. Barbarin.

La droite est le petit axe de l'ellipsoïde central d'inertie des n points, supposés de même masse. Cet axe, situé dans le plan des points, se détermine facilement par la Géométrie analytique. Graphiquement, il semble impossible d'en donner une construction très simple.

Dubouis.

Autres réponses analogues de MM. O. Degel, Ph. Hatt, G. Quijano, Aubry et Prieto qui seront transmises à M. Gleizes quand il nous aura fait connaître son adresse actuelle. M. O. Degel considère en particulier le cas où $n = 3$, en renvoyant à la question 3025 (**1906**, 59, 181; **1908**, 105), et le cas où les n points sont les sommets d'un polygone régulier.

La Rédaction.

TABLE DES QUESTIONS ET RÉPONSES.

Chacune des questions parues dans le Tome XV porte le numéro d'ordre avec lequel elle a été publiée. Les autres nombres de la Table indiquent les pages du Volume.

Nous avons cru inutile de continuer à signaler les Réponses ou Notes en portefeuille. L'indication des solutions reçues est, en effet, toujours mentionnée au fur et à mesure dans les *Avis divers* annexés aux numéros mensuels de l'*Intermédiaire* (troisième page de la couverture).

Questions posées. Tome V (1898).	Pages.	Réponses. Tome XV. Pages.
1202.	4	228.
1241.	51	278.
1246.	53	228.
1401.	266	179.

Tome VI (1899).	Pages.	Tome XV. Pages.
1440.	6	132.
1477.	74	55.
1489.	79	278.
1622.	200	132, 228, 278.
1658.	245	56.

Tome VII (1900).	Pages.	Tome XV. Pages.
1761.	76	56.
1774.	80	180.
1882.	196	180.
1896.	238	229.
1910.	270	57.
1969.	358	229.
1972.	359	133, 229.

Tome VIII (1901).	Pages.	Tome XV. Pages.
2052.	82	180.
2072.	108	181.
2074.	108	181.
2098.	133	103.
2218.	274	133.
2224.	276	103.
2226.	277	229.

Tome IX (1902).	Pages.	Tome XV. Pages.
2325.	93	229.
2368.	144	182.
2385.	174	57.

Tome X (1903).	Pages.	Tome XV. Pages.
2552.	71	229.
2566.	101	229.
2604.	153	134.
2658.	253	57.
2670.	258	182.
2690.	299	279.
2693.	300	230.

Tome XI (1904).	Pages.	Tome XV. Pages.
2724.	33	201.
2778.	115	59.
2793.	138	230.
2800.	162	230.
2816.	212	280.
2855.	285	60, 230.

Tome XII (1905).	Pages.	Tome XV. Pages.
2868.	10	280.
2874.	26	7. 81.
2879.	27	232.
2885.	50	60.

Questions posées. Tome XII (1905).		Réponses. Tome XV.
	Pages.	Pages.
2893.	52	184.
2894.	73	104.
2895.	73	134.
2903.	76	104.
2909.	103	232.
2941.	171	232.
2948.	172	60.

Questions posées. Tome XII (1905).		Réponses. Tome XV.
	Pages.	Pages.
2951.	200	232.
2970.	265	184.
2972.	265	233.
2974.	266	81.
2976.	267	81.
2981.	268	104.

Tome XIII (1906).		Tome XV.
	Pages.	Pages.
2932.	87	135.
2996.	6	135.
2997.	6	83.
3004.	8	233.
3006.	8	104.
3007.	33	104.
3025.	59	105.
3026.	60	105.
3039.	88	233.
3041.	89	105.
3070.	141	63.
3072.	141	233.
3074.	142	106.
3075.	142	106.

Tome XIII (1906).		Tome XIV.
	Pages.	Pages.
3076.	142	106.
3077.	142	106.
3081.	164	7.
3082.	164	136.
3084.	164	136.
3085.	185	64.
3086.	185	107.
3090.	186	107.
3091.	187	108.
3111.	236	64.
3119.	259	280.
3126.	260	65.
3128.	261	280.
3129.	261	136, 233.

Tome XIV (1907).		Tome XV.
	Pages.	Pages.
3138.	5	66.
3141.	6	108.
3149.	25	109.
3152.	26	66.
3162.	29	67, 109.
3169.	50	109, 280.
3171.	50	112.
3174.	51	201.
3177.	51	137.
3178.	51	112.
3181.	52	IV.
3184.	52	233.
3185.	53	234.
3188.	75	7, 184.
3190.	75	137, 185.
3191.	75	234.
3195.	76	234.

Tome XIV (1907).		Tome XV.
	Pages.	Pages.
3199.	78	138.
3201.	98	138.
3210.	101	138.
3220.	121	234.
3221.	121	234.
3225.	124	138.
3229.	126	138.
3232.	126	84, 186.
3234.	147	186, 202.
3235.	147	138.
3239.	148	9.
3240.	148	11.
3242.	149	11.
3247.	169	18, 139.
3248.	169	67, 139, 202, 235.
3249.	170	236.

Questions posées. Tome XIV (1907).	Pages.	Réponses. Tome XV. Pages.
3252.	171	202.
3255.	172	19.
3256.	173	281.
3258.	173	139.
3259.	173	20.
3260.	173	68.
3261.	174	85.
3262.	174	140.
3266.	194	20, 140.
3267.	194	187.
3268.	195	140.
3271.	196	22, 141.
3272.	197	88, 236.
3273.	197	23, 89.
3274.	197	33.
3275.	197	24.
3276.	198	90, 236.
3277.	198	91.
3278.	198	141.
3281.	218	141.
3282.	218	141.
3284.	219	34.
3285.	219	141.
3286.	219	142.
3287.	219	237.
3288.	220	149.
3289.	220	149.
3290.	220	142.
3292.	221	143.
3293.	221	34, 143.
3294.	222	35, 143.
3295.	222	36, 150.
3296.	243	41, 143.
3297.	243	41, 143, 203.
3298.	243	43, 143, 237.
3299.	243	44.
3300.	243	44, 150.
3301.	243	150.
3302.	244	45, 144, 203.
3305.	246	151.
3306.	246	47, 152, 239.
3307.	246	152.
3309.	266	71, 154.
3310.	267	154.
3311.	267	92.
3312.	267	239.
3314.	268	187.
3317.	269	94, 154.
3318.	269	96.

Tome XV (1908).	Pages.	Tome XV. Pages.
3321.	4	156.
3322.	5	248.
3323.	5	240.
3325.	6	112.
3326.	27	114.
3327.	27	156.
3328.	27	240.
3330.	28	157.
3331.	28	157, 250, 281.
3332.	28	115, 187.
3334.	29	251.
3335.	29	117.
3336.	30	251.
3337.	30	117.
3339.	31	119.
3342.	32	158, 282.
3343.	51	188, 203.
3345.	51	203.
3347.	52	158, 282.
3348.	52	158, 282.
3351.	53	252.
3352.	53	160, 188.
3353.	54	162, 188.
3354.	54	163, 189, 283.
3355.	54	164, 252.
3356.	73	165.
3357.	73	190.
3359.	73	191.
3360.	74	252.
3361.	74	253.
3363.	75	166, 283.
3365.	76	254.

Questions posées. Tome XV (1908). Pages.		Réponses. Tome XV. Pages.	Questions posées. Tome XV (1908). Pages.		Réponses. Tome XV. Pages.
3366.	77	191, 254.	3387.	101	211.
3367.	77	192, 254.	3388.	101	212.
3368.	77	254.	3390.	102	259.
3369.	78	192, 204.	3391.	102	214.
3370.	78	254.	3395.	121	215.
3371	78	255.	3398.	123	260.
3375.	97	205, 284.	3402.	124	216.
3377.	97	206.	3403.	124	216, 284.
3378.	97	256.	3406.	125	261.
3379.	98	256.	3407.	125	262.
3380.	98	257.	3408.	126	264.
3381.	98	257.	3409.	126	285.
3382.	99	208.	3411.	147	285.
3383.	99	258.	3413.	148	285.
3385.	100	208.	3416.	171	286.
3386.	100	210,284.	3418.	172	287.

Nota. — Dans ce Tableau nous n'avons indiqué, lorsqu'il y a plusieurs réponses à une même question qui se suivent immédiatement, que la page où se trouve la première de ces réponses consécutives.

Rappel de questions non résolues antérieurement et reproduites au Tome XV (1908) ou rectifications.

Questions posées. Tome IV (1897).	Pages.	Réimpression. Tome XV. Pages.	Questions posées. Tome IV (1897).	Pages.	Réimpression. Tome XV. Pages.
1107.	170	1.	1149.	220	50.
1108.	170	1.	1150.	220	50.
1109.	171	2.	1152.	221	51.
1110.	171	2.	1154.	221	145.
1112.	171	2.	1157.	222	145.
1118.	173	3.	1162.	241	145.
1120.	174	3.	1163.	242	145.
1122.	174	25.	1164.	242	146.
1124.	193	25.	1170.	244	146.
1126.	194	25.	1176.	266	169.
1128.	194	26.	1177.	266	169.
1130.	195	26.	1179.	267	169.
1131.	195	26.	1180.	267	169.
1135.	196	26.	1183.	267	170.
1137.	217	49.	1184.	268	170.
1138.	217	49.	1186.	269	170.
1140.	217	49.	1187.	270	171.
1144.	219	49.	1188.	270	241.
1147.	220	50.	1190.	270	241.
1148.	220	50.			

Tome V (1898).	Pages.	Tome XV. Pages.	Tome V (1898).	Pages.	Tome XV. Pages.
1193.	2	242.	1258.	76	244.
1204.	4	242.	1259.	76	265.
1205.	4	242.	1260.	77	265.
1210.	5	242.	1263.	78	265.
1211.	5	243.	1264.	78	266.
1228.	29	243.	1265.	79	266.
1230.	30	243.	1268.	80	266.
1236.	31	243.	1269.	80	267.
1237.	32	244.	1273.	80	267.
1253.	75	244.	1274.	80	267.
1257.	76	244.	1275.	98	267.

D'après l'exemple de plusieurs journaux mathématiques, la Rédaction continue à reproduire les énoncés de questions demeurées sans réponse depuis la fondation de l'*Intermédiaire*.

TABLE DES QUESTIONS

CLASSÉES SUIVANT LES DIVISIONS DE L'INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La Table qui suit fait connaître le sujet général des différentes questions proposées.

Les nombres de cette Table sont les *numéros* des questions auxquelles se rapporte la division de l'Index du Répertoire.

A ou A1	3385, 3389, 3484.
A	3408.
A3	3346, 3397, 3447.
B ou B1	3363, 3378.
B3	3346.
C ou C1	3418.
C2	3333, 3353, 3440.
D ou D1	3428, 3463.
D2	3339, 3375, 3402, 3407, 3450.
D3	3336.
D6	3337, 3377.
E5	3340.
F6	3478.
F8	3398.
G ou G1	3437.
H2	3371, 3386.
H5	3395.
H7	3382.
H8	3477.
H9	3465.
H12	3471.
I ou I1	3329, 3331, 3379, 3429, 3438, 3453, 3454, 3455, 3466, 3485.
I2	3334, 3376, 3393, 3404, 3409, 3410, 3433, 3486.
I3	3345, 3451.
I4	3384.
I7	3320, 3330.
I9	3343, 3344, 3384, 3414, 3415.
I13	3420, 3439.
I18	3354, 3392, 3406, 3419.
I19	3321, 3338, 3347, 3348, 3355, 3359, 3361, 3362, 3365, 3366, 3367, 3368, 3388, 3390, 3405, 3411, 3421, 3422, 3423, 3424, 3425, 3426, 3427, 3436, 3469, 3470, 3482, 3483.
I22	3452.
I23	3412, 3437, 3445.
I25	3322.

J ou J1	3324.
J2	3326, 3327, 3328, 3342, 3351, 3357.
K ou K1	3352, 3403.
K4	3391.
K8	3323, 3413, 3416.
K9	3380, 3381, 3418.
K10	3383.
K13	3441.
K20	3449.
K21	3360.
$L^{1}15$	3358, 3481.
$L^{1}17$	3356.
M^{1} ou $M^{1}1$	3417.
$M^{1}3$	3335.
$M^{1}4$	3448.
$M^{1}8$	3325, 3369.
$M^{2}3$	3370, 3387.
M^{4}	3335.
O ou O1	3479.
O2	3401, 3461, 3468, 3480.
O3	3467.
O5	3364.
O6	3476.
P2	3349.
P6	3346.
Q ou Q1	3364.
Q4	3430, 3432.
R7	3464.
S6	3332.
T2	3462.
U10	3332.
V ou V1	3341, 3350, 3374, 3434, 3444, 3458, 3459, 3460. 3472, 3473.
V7	3373.
V8	3474.
V9	3394, 3396, 3400, 3457
V10	3394, 3396.
X2	3399, 3429, 3435.
Σ	3319, 3372, 3431, 3442, 3443, 3456, 3445.

La lettre Σ désigne les sujets de recherches ou d'études pour lesquels une subdivision spéciale a été adoptée dans l'*Intermédiaire* (*voir* t. II, 1895, p. 177).

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS.

Les noms inscrits sont exclusivement ceux des auteurs de questions ou de réponses.

L'*italique* désigne les pseudonymes.

Les chiffres ordinaires indiquent les numéros des pages et se rapportent aux QUESTIONS POSÉES ; avec astérisque, ils désignent le rappel des questions au moment de la publication des réponses. Les **caractères gras** sont réservés aux RÉPONSES annoncées ou publiées dans le texte ; les caractères romains désignent les pages du Supplément.

Les Tables ont été rédigées, cette année, par M. Ed. Maillet et vérifiées par M. P. Fatou.

La Rédaction.

ERRATA

TOME XIII (1906).

Page 174, ligne 4, *avant* : 1, *mettre* : =.

» 184, ligne 4 en remontant, *au lieu de :*

$$2(x^2+y^2)^4=[(x^2+y^2)^4-\ldots]^2,$$

lire :

$$2(x^2+y^2)^4=[(x^2+y^2)^2-\ldots]^2.$$

» 278, ligne 3, *au lieu de :*

$$\frac{\alpha}{a}=+\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\sqrt{\frac{\lambda^2-2}{\lambda^4-1}},$$

lire :

$$\frac{\alpha}{a}=\pm\frac{\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-2)^2}{(\lambda^4-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

» 278, ligne 9, *au lieu de :*

$$\frac{y_1}{b}=\mp\frac{1}{\lambda^2-1}\sqrt{\frac{\lambda^2-2}{\lambda^4-1}},$$

lire :

$$\frac{y_1}{b}=\pm\frac{1}{\lambda^2-1}\sqrt{\frac{2\lambda^2-1}{\lambda^4-1}}.$$

TOME XV (1908).

Page 3, question 1148, *au lieu de :* $\frac{\Delta\mu f(x)}{h\mu}$, *lire :* $\frac{\Delta^\mu f(x)}{h^\mu}$.

» 5, ligne 6, *au lieu de :* $u_{n+1}=6u_{n-1}$, *lire :* $u_{n+1}=6u_n-u_{n-1}$.

» 24, dernière ligne, *au lieu de :* DELTOR, *lire :* DELTOUR.

» 31, ligne 1, *au lieu de :* [D9], *lire :* [D2].

» 57, réponse à 2385, *ajouter à la fin :* p. 143.

» 58, ligne 3, *au lieu de :*

$$(P\,dy-Q\,dx)\,[(P\,dR-R\,dP)\,dx]+[(Q\,dR-R\,dQ)\,dy],$$

lire :

$$(P\,dy-Q\,dx)\,[(P\,dR-R\,dP)\,dx+(Q\,dR-R\,dQ)\,dy].$$

Page 76, ligne 11 en remontant, *au lieu de :* $[3t(t^2-1)]+1$, *lire* $[3t(t^2-1)+1]$.

» 86, avant-dernière ligne, *au lieu de :* $\frac{K}{r}$, *lire :* $K \mid r$.

» 94, ligne 7 en remontant, *au lieu de :* $[(x+y)-(x-y-u)^2]$, *lire :* $[(x+y)-(x-y-u)^2]^2$.

» 127, ligne 3, *au lieu de :* Sur la cycloïde, *lire :* Geometry of cycloids.

» 127, ligne 3 en remontant, *au lieu de :*

$$[(k-1)y+x]\,[(k-x)y+x]\ldots[y+(k-1)x],$$

lire :

$$[(k-1)y+x]\,[(k-2)y+2x]\ldots[y+(k-1)x].$$

» 143, réponse à 3298, *supprimer jusqu'à :* « De A et B comme centres ».

» 150, ligne 12 en remontant, *au lieu de :* Jinn, *lire :* Ginn.

» 151, ligne 13 en remontant, *au lieu de :* ξ_2^1, *lire :* ξ_1^2.

» 155, ligne 12, *au lieu de :* o, *lire :* σ.

» 155, ligne 7 en remontant, *au lieu de :* und, *lire :* et.

» 166, dans l'avant-dernière formule de la page, *au lieu de :* $x^{2\nu-1}$, *lire :* $x^{2\nu}$.

» 209, lignes 7 et 19, *au lieu de :* $X_0X_1X_2=-1$, *lire :* $X_0X_1X_2=+1$.

» 242, ligne 2, *au lieu de :* -1, *lire :* à $p-1$.

» 246, ligne 1, *au lieu de :* 3643, *lire :* 3462.

» 253, ligne 8, *au lieu de :* Oudouis, *lire :* Dubouis.

» 259, ligne 13, *au lieu de :* *Malo*, *lire :* Malo.

» 261, dernière ligne, *au lieu de :* Heudlé, *lire :* Hendlé.

Nous remercions tous ceux de nos Correspondants qui ont bien voulu nous signaler des *errata*. La Rédaction.

40967 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS.

N° 1. *SUPPLÉMENT.* MARS 1908.

BIBLIOGRAPHIE.

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE, professées en 1905-1906 par M. *E. Vessiot,* professeur à la Faculté des Sciences de Lyon, rédigées par M. *Auzemberger.* — 1 vol. in-4°. Lyon, Imprimeries réunies; Paris, Hermann, 1907. Prix : 12fr.

Ces leçons s'adressent aux étudiants qui veulent acquérir des connaissances solides en Géométrie; elles sont une excellente introduction aux Ouvrages de M. Darboux.

L'auteur reprend les questions dès le début, mais sous une forme générale qui donne aux résultats les plus élémentaires une portée que ne peut soupçonner celui qui n'a suivi qu'un cours de Calcul infinitésimal. Tout y est présenté avec clarté et surtout avec une précision qui font de cet Ouvrage un modèle d'exposition mathématique; on est tout étonné du champ immense que l'on a parcouru, quand on est arrivé au bout de ces 300 pages.

L'étude des complexes de droites, des congruences de sphères et de cercles, des transformations de contact offre une variété de résultats fort intéressants et permet à l'étudiant d'aborder les nombreux Mémoires qui ont été écrits ces dernières années sur ces sujets.

Ajoutons, et ce n'est pas la partie la moins utile, une série d'exercices variés sur les différentes matières traitées. A. G.

LES CARRÉS MAGIQUES; par *J. Riollot,* ingénieur civil des Mines. — 1 vol. grand in-8° de IV-119 pages avec 311 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1907. Prix : 5fr.

Parmi les problèmes amusants, par leur énoncé et les groupements curieux auxquels ils donnent naissance, il en est peu qui



aient été autant étudiés que ceux qui sont relatifs à l'échiquier et, en particulier, ceux qui traitent des carrés magiques. Ils offrent, d'ailleurs, un réel intérêt au mathématicien et sont mieux que de simples jeux; ils touchent à l'Arithmétique, à l'Algèbre, à la Géométrie de situation.

M. Riollot a écrit un Livre simple et clair, où il expose dans une première Partie la nature du problème; dans une seconde Partie, les propriétés arithmétiques des carrés magiques, qui permettent de considérer comme générateurs de tous les autres des carrés construits avec la suite des nombres entiers.

Une étude des propriétés géométriques, relatives à la symétrie et à la rotation, complète cet exposé.

La troisième Partie traite des divers procédés de construction, en particulier de la méthode du *carré guide,* et se termine par de courtes indications sur d'autres figures possédant des propriétés analogues à celles des carrés magiques. A. G.

DYNAMIQUE APPLIQUÉE, par *L. Lecornu,* ingénieur en chef des Mines, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Mines. — 1 vol. in-18 jésus, cartonné toile, 550 pages avec 113 figures dans le texte (*Encyclopédie scientifique*). Paris, O. Doin. Prix : 5fr.

Le caractère mathématique de la Mécanique rationnelle ne doit pas faire illusion sur la portée de ses applications. Les êtres abstraits dont elle s'occupe, tels que les points matériels, les solides rigoureusement indéformables, les fluides parfaits, etc., n'existent pas plus dans la nature que les figures idéales de la Géométrie, et, de même que la surface d'un cercle tracé au compas n'est fournie par la formule connue que dans les limites d'approximation correspondant aux irrégularités du papier et aux petits déplacements de la pointe supposée fixe, de même la dynamique des solides naturels diffère plus ou moins de celle des solides invariables.

Des restrictions du même genre s'imposent à chaque instant en *Dynamique appliquée.* On en trouvera de nombreux exemples dans l'Ouvrage de M. Lecornu, Ouvrage qui a pour but de montrer comment peuvent être abordées scientifiquement les recherches techniques relevant de la Dynamique. Après un rapide résumé des théories de la Mécanique rationnelle, l'auteur analyse les propriétés mécaniques des solides naturels. Puis vient la dynamique des ressorts, avec application étendue à la théorie de l'indicateur de Watt.

Divers mouvements, pendulaires ou autres, sont ensuite passés en revue. La dernière Partie est consacrée à la théorie des machines; elle comprend : la production et l'utilisation de la force vive, la régularisation du mouvement, le freinage, la dynamique des transmissions.

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1908. — In-16 de plus de 950 pages avec fig. et pl. Prix : $1^{fr},50$ (franco, $1^{fr},85$).

La librairie Gauthier-Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1908. Suivant l'alternance adoptée, ce Volume, de millésime pair, contient, outre les données astronomiques, des Tableaux relatifs à la Physique, à la Chimie, à l'Art de l'Ingénieur. Cette année, nous signalons tout spécialement les Notices de M. G. Bigourdan : *La distance des astres et en particulier des étoiles fixes*, et celle de M. E. Guyou : *L'École d'Astronomie pratique de l'Observatoire de Montsouris.*

Théorie et usage de la règle a calculs, par *P. Rozé*, licencié ès sciences. — 1 vol. in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

L'usage de la règle à calculs se répand chaque jour davantage; si sa théorie est simple et son maniement aisé, il n'en est pas moins utile de savoir avec précision ce qu'elle peut donner et comment on peut en tirer tout le parti possible; c'est ce qu'a exposé, avec de nombreux exemples, M. Rozé, dans ce petit Livre facile à lire et utile à consulter.

A. G.

Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz, par *M. Brillouin*, professeur au Collège de France. — Seconde Partie. 1 vol. in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Ce Volume contient l'exposé des travaux relatifs à la viscosité des gaz, à l'écoulement dans les tubes étroits, à l'étude de l'influence des hautes températures.

Il se termine par la discussion des diverses théories proposées : théorie cinétique, théories dynamiques appliquées aux gaz ou aux liquides.

A. G.



A BIBLIOGRAPHY OF THE WORKS OF SIR ISAAC NEWTON, par *G.-J. Gray*. — 2e édition revue et augmentée. Cambridge, Bowes and Bowes, 1907.

Cette bibliographie très complète contient non seulement la liste des travaux de Newton, mais aussi les commentaires de différents savants; chaque Ouvrage est accompagné de l'indication de tout ce qui a été écrit d'important à son sujet. C'est un monument élevé à la gloire de Newton et qui peut rendre des services à ceux qui veulent remonter aux sources et ne pas se contenter de la lecture d'Ouvrages de seconde main; ils trouveront là toutes les indications qui pourront leur éviter des recherches parfois longues et difficiles.

A. G.

3181 (**1907**, 52) (*Ygrec*). — *Travaux relatifs à l'itération* (**1907**, suppl., p. x, juillet, et p. XIII, octobre). — Voici une courte addition bibliographique :

J.-H. GRILLET. — Sur les exponentielles successives d'Euler et les logarithmes des différents ordres des nombres (*J. M.*, t. X, 1845, p. 233-241).

N. TAGLIAFERRO. — Sur de nouvelles fonctions numériques transcendantes (*A. F.*, Paris, 1878, p. 140-144).

E. WEST. — Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski (*suite*) (*J. M.*, 1883, p. 301-406).

E. WEST. — Intégration des équations aux différences finies linéaires et à coefficients variables (*A. F.*, Blois, 1884. Première Partie, p. 149; deuxième Partie, p. 64-73).

S. ZAREMBA. — Contribution à la théorie d'une équation fonctionnelle de la Physique (*Cercle math. de Palerme*, t. XIX, 1905, p. 140-150).

E. MAILLET. — Sur les fonctions monodromes d'ordre non transfini et les équations différentielles (*J. E. P.*, t. X, 1905, p. 1-78).

M. FRÉCHET. — Sur quelques points du calcul fonctionnel, 1906.

J'aurais aussi à mentionner : Condorcet (1777); Eisenstein (*Cr.*, 1844); Wœpcke (*Cr.*, 1851); Fredholm (*A. M.*, t. XXVII); mais je ne puis préciser ces références.

Pour terminer, j'observerai que les radicaux superposés pourraient sans doute justifier l'inscription de François Viète (1540-1603) parmi les précurseurs des formules de l'itération.

H. BROCARD.



L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS.

N° 2. *SUPPLÉMENT.* Septembre 1908.

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie et pratique des opérations financières, par *A. Barriol*, ancien élève de l'École Polytechnique, directeur de l'Institut des Finances et des Assurances, membre de l'Institut des Actuaires français. — 1 vol. in-18 jésus, cartonné toile, de 400 pages, avec nombreux graphiques et tableaux dans le texte. (*Encyclopédie scientifique.*) Paris, O. Doin. Prix : 5fr.

On peut résumer comme suit les matières contenues dans ce Livre : l'auteur part du prêt à intérêt simple, définit les comptes courants, étudie entièrement les opérations de change, passe au calcul des tableaux d'amortissement et de la valeur des titres, et termine par les opérations de Bourse (Comptant, terme, primes, reports, etc.) et les opérations de haute banque (prêts sur titres, émissions, etc.).

L'Ouvrage de M. Barriol est à la fois technique et pratique : technique, car il donne toutes les formules d'opérations, même les plus complexes; pratique, à cause des exemples numériques entièrement traités qu'il contient. Ce Traité d'opérations financières s'adresse donc aux praticiens (agents de change, banquiers, etc.) que les formules n'embarrasseront plus désormais, puisqu'ils n'auront qu'à remplacer les données numériques des exemples traités par celles relatives au problème qu'ils auront à résoudre effectivement; il sera également utile aux théoriciens (actuaires) qui trouveront des développements très intéressants, dont quelques-uns inédits, notamment sur les obligations et les primes.

Enfin, cet Ouvrage sera lu avec intérêt par toute personne désirant acquérir des idées précises sur les opérations financières.

ENQUÊTE DE L'*Enseignement mathématique* SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS, publiée par *H. Fehr,* professeur à l'Université de Genève, avec la collaboration de *Th. Flournoy,* professeur de Psychologie expérimentale, et *Ed. Claparède,* directeur du Laboratoire de Psychologie à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève. — 126 pages. Paris, Gauthier-Villars, et Genève, Georg et C[ie]. (Extrait de l'*Enseignement mathématique,* t. III à VIII.)

Cette enquête a déjà été signalée dans l'*Intermédiaire* (1904, 257; 1906, 242, réponse à **2446** et **2447**; 1907, 143). Voici la conclusion de M. Fehr :

« Il n'y a pas lieu, croyons-nous, de chercher de conclusions générales sur l'ensemble des réponses. La diversité des questions et leur grand nombre ne le permettent guère, pas plus que la variété des réponses. Sans doute, on devait s'attendre à ce que les méthodes et les habitudes de travail varient avec le tempérament et le milieu; il est évident qu'elles dépendent aussi des circonstances d'ordre professionnel. Notre enquête avait précisément pour but de faire connaître les principaux types de travailleurs, et, sous ce rapport, les résultats que nous avons publiés fournissent des indications d'un grand intérêt. En étudiant ces résultats, et surtout en s'inspirant des réponses que chacun tirera selon les préférences de son tempérament, les jeunes mathématiciens trouveront dans cette enquête des renseignements et des conseils qui leur seront d'un grand profit. »

E. M.

CALCUL GRAPHIQUE ET NOMOGRAPHIE (1), par *d'Ocagne.* — 1 vol. in-18 jésus, cartonné toile, 400 pages et 146 figures. Paris, O. Doin, 1908. Prix : 5[fr].

Ce Livre est le développement du cours libre fait par l'auteur à la Sorbonne, au printemps de 1907; il a surtout pour but de résumer sous une forme facilement accessible une partie des travaux de M. Massau et de l'auteur.

Le *Calcul graphique,* qui fait l'objet de la première Partie, s'occupe de l'exécution d'épures portant sur des segments représentatifs

(1) Ce Volume fait partie de la *Section des Sciences appliquées* (publiée sous la direction de M. d'Ocagne), de l'*Encyclopédie scientifique* du Dr Toulouse.

des nombres soumis au calcul. L'auteur traite des opérations arithmétiques, de la résolution des systèmes d'équations linéaires (question 2874, de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1905, 26, 184; 1906, 70) et des équations de degré quelconque, de l'interpolation parabolique, de l'intégration graphique.

La *Nomographie*, qui fait l'objet de la deuxième Partie, s'occupe de la construction de tableaux graphiques *cotés*, nomogrammes ou abaques, représentatifs des formules ou équations à résoudre, dont ils fournissent à simple vue les résultats. L'auteur traite de la représentation par lignes concourantes, par points et par éléments mobiles, en terminant par un résumé de la théorie générale de tous les modes possibles de représentation.

Exposicion sumaria de las teorias matematicas, par le Dr *Zoel G. de Galdeano*. — Saragosse, E. Casañal, 1907. Prix : 4 pesetas.

Algunas consideraciones sobre filosofía y enseñanza de la Matemática, par le même. — Saragosse, E. Casañal, 1907. Prix : 2 pesetas.

Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, par *Edmund Landau*. — 134 pages. (Extrait des *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXVI, 1908.)

Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, par *H. Minkowski*. — 59 pages. (Extrait des *Nachrichten der k. Ges. der Wiss. de Göttingen*, 1908.)

La nozione dell' infinito secondo gli studi piu recenti, par *G. Vivanti*. — 56 pages. (Extrait des *Atti della R. Accademia Peloritana*, t. XXIII, fasc. I.) Messine, d'Amico, 1908.

QUELQUES DÉMONSTRATIONS RELATIVES A LA THÉORIE DES NOMBRES ENTIERS COMPLEXES CUBIQUES. — PROPRIÉTÉS DE QUELQUES GROUPES D'ORDRE FINI, par *Raymond Le Vavasseur* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1908). — Paris, Gauthier-Villars, 66 pages. Prix : 3fr.

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER GANZEN TRANSZENDENTEN FUNKTIONEN DER ORDNUNG NULL. Thèse (Inaugural-Dissertation) de Doctorat présentée à l'Université de Halle-Wittenberg, par *Hans Zöllich*. — 59 pages. Halle, 1908.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN FRACTIONS CONTINUES. Thèse de doctorat présentée à l'Université de Zurich, par *Samuel Dumas*. — 60 pages. Zurich, Zürcher et Furrer, 1908.

GRENZWERKE VON REIHEN BEI DER ANNÄHERUNG AN DIE KONVERGENZGRENZE. Thèse (Inaugural-Dissertation) de doctorat présentée à l'Université Friedrich-Wilhelm de Berlin, par *Konrad Knopp*. — 51 pages. Göttingen, 1907.

LES PROBLÈMES DE PLATEAU, DE DIRICHLET, DE GAUSS, ETC., GÉNÉRALISÉS ET RÉSOLUS A L'AIDE DE LA THÉORIE DES PSEUDO-SURFACES, par l'abbé *Issaly*. — 1 vol. in-8, 64 pages, en vente chez l'auteur, 9, rue Poquelin Molière, Bordeaux. Prix : 2fr.

C'est la suite des précédents Ouvrages de l'auteur, mentionnés antérieurement (**1906**, 58); M. l'abbé Issaly y annonce, en outre, un nouvel Ouvrage intitulé : *Applications diverses de la théorie des pseudo-surfaces;* il en donne le programme en appendice, en réclamant dans sa Préface le concours du lecteur, *si*, dit-il, *il se sent de l'attrait pour cet élément subtil, fécond et quasi-universel que, depuis longtemps déjà, nous avons qualifié de* pseudo-surfaces.

E. M.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL (12 NUMÉROS) :

Paris .... 7 fr. | Dép. et Union postale... 8 fr. 50

Les douze numéros forment chaque année un Volume de 300 pages au moins.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET É. LEMOINE,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Examinateur à l'École Polytechnique.

Émile LEMOINE,
Ingénieur civil,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Ed. MAILLET,
Docteur ès Sciences,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

P. FATOU,
Docteur ès Sciences,
Astronome adjoint à l'Observatoire.

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.

TOME XVI. — 1909.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1909

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

QUESTIONS [1].

3487. [I1] J'obtiens par deux méthodes les résultats suivants :

1° $a^x + 1$ ne peut donner de nombres premiers que quand x est une puissance de 2 (a doit être pair ou égal à 1).

2° $a^x - 1$ ne peut donner de nombres premiers que quand $a = 2$ (on sait que, si $a = 2$, x doit être premier).

3° $\frac{a^x + 1}{a + 1}$, $\frac{a^x - 1}{a - 1}$ ne peuvent donner de nombres premiers : 1° que si x est premier; 2° que si x et le dénominateur $a \pm 1$ sont premiers entre eux.

4° $\frac{a^x + 1}{a^n + 1}$, $\frac{a^x - 1}{a^n - 1}$ ne peuvent donner de nombres premiers : 1° que si $x = nz$ et z premier (impair dans le premier cas); 2° que si x et le dénominateur $a^n \pm 1$ sont premiers entre eux.

Ces résultats sont-ils bien nouveaux, comme je le crois?

LOUVEL.

---

(1) Pour gagner de la place, nous supprimons cette année, comme nous l'avons déjà fait en 1896, 1903 et 1905, la Liste des abréviations conventionnelles. Nos collaborateurs pourront la consulter dans les Tomes précédents ou dans l'*Index du Répertoire de bibliographie des Sciences mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars). Ils pourront également se reporter aux observations indiquées en tête du Tome XI (1904), observations que nous ne reproduisons pas ici. LA RÉD.

3488. [I22b] Quelles sont les propriétés connues des nombres premiers exceptionnels de Kummer, en dehors de leur définition par les nombres de Bernoulli et de leur application au dernier théorème de Fermat, aux classes d'idéaux et aux équations étudiées par M. Maillet (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXIX, 1899, p. 78)?

Arsène.

3489. [I19c] L'équation $x^n + y^n = n z^n$ est-elle possible pour une infinité de nombres premiers n?

Holmès.

3490. [I19c] Résoudre complètement en nombres entiers l'équation indéterminée

$$x^2 = 4y^3 - 3.$$

RODRIGO RAVASCO (Lisbonne).

3491. [A3l] Quel est le procédé le plus expéditif pour résoudre l'équation $\log x = \frac{x}{10^m}$, où m est un nombre entier (log désigne le logarithme décimal)?

NAZAREVSKY (Kharkow).

3492. [I19c] Résoudre en nombres entiers le système

$$x + y = a^2, \qquad x^2 + y^2 = b^2, \qquad x^3 + y^3 = a^2 c^2.$$

Il est aisé de voir que les nombres a, b, c doivent satisfaire à la condition

$$3b^2 - 2c^2 = a^4,$$

laquelle équation est complètement résolue par les valeurs suivantes :

$$a = 3m^2 - 2n^2,$$
$$b = (3m^2 + 2n^2 + 6mn)^2 + 8m^2n^2,$$
$$c = (3m^2 + 2n^2 + 6mn)^2 - 12m^2n^2.$$

H.-B. MATHIEU.

3493. [I18c] Tout multiple de 6 est la somme algébrique de 4 cubes au plus. Cette proposition est très facile à démontrer. Existe-t-il des propositions analogues pour la décomposition des nombres en somme de cubes?

H.-B. MATHIEU.

3494. [D1b] Peut-on déterminer une suite de fonctions d'une variable réelle x, continues et définies dans un intervalle (a, b) :

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots,$$

telles

1° Que toute fonction continue dans cet intervalle puisse être représentée par une série convergente de la forme

$$c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots$$

où les c_i sont des constantes ;

2° Que ce développement ne soit possible que d'une seule manière?

Je rappelle que le développement en série de Fourier qui satisfait à la condition 2° ne remplit pas la condition 1° ([1]). Si, comme nous le pensons, la question proposée doit être résolue par la négative, il serait très intéressant d'établir un théorème d'impossibilité, même dans le cas particulier où, aux conditions précédentes, on ajoute la suivante : à savoir que le développement considéré doit être uniformément convergent.

H. LEBESGUE.

3495. [D4e] Connaît-on des exemples de séries de Taylor à coefficients entiers et de rayon de convergence égal à l'unité, qui soient prolongeables analytiquement au delà de leur cercle

([1]) MM P. Dubois-Reymond et Schwarz ont indiqué, en effet, des exemples de fonctions continues non développables en série de Fourier. Leur méthode permettrait sans doute de trouver des exemples analogues pour le cas du développement en série de polynomes de Legendre.



de convergence (en laissant de côté le cas où la série considérée représente une fraction rationnelle)?

Peut-on établir *a priori* l'existence ou la non-existence de telles séries? P. Fatou.

3496. [J2d] Existe-t-il une formule simple faisant connaître le cours auquel on doit acheter une obligation (de chemin de fer, par exemple), remboursable par voie de tirage au sort, pour placer son argent à un taux d'intérêt déterminé, *en tenant compte de la prime de remboursement?*

G. Charpentier.

3497. [O8a] L'arc de la podaire d'une courbe C relativement à un point P est égal à l'arc correspondant de la roulette décrite par P, quand C roule sur une droite.

C'est une proposition bien connue due à Steiner.

Je désirerais savoir si la suivante, qui est en quelque sorte le complément de ce qui précède, a été donnée par le même auteur :

Si l'on fait rouler la courbe podaire sur la roulette comme base, le point P, lié invariablement à cette podaire, décrira la base rectiligne primitive, à condition qu'on choisisse pour les deux courbes au contact une position initiale convenable.

A-t-on remarqué, comme cas particulier, que la courbe sur laquelle doit rouler une circonférence, pour qu'un point lié à elle décrive une droite, est la méridienne d'une surface minima de révolution? S. Prieto.

[Traduit de l'espagnol. (La Réd.)]

3498. [M'3j] Je voudrais connaître des courbes analytiques identiques à l'une de leurs parallèles : j'entends que les deux courbes doivent coïncider par symétrie et non par déplacement. S. Prieto.

[Traduit de l'espagnol. [La Réd.)]

3499. [M'8g] Dans un remarquable article publié dans

l'*Arch. f. Math. u. Phys.* (3e série, t. IV, 1902, p. 20-21), M. Appell a exposé quelques propriétés des courbes ayant pour équation

$$\frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n} = 1,$$

courbes qui ont été considérées par Hermite.

Quelque correspondant serait-il assez bon de m'épargner de longues recherches bibliographiques en m'indiquant exactement le titre du travail ou des travaux où se trouvent ces recherches du célèbre géomètre? G. Loria (Gênes).

3500. [**R1b**α] Comme généralisation de **3401** (**1908**, 123), la question suivante a-t-elle été traitée? Étude dans des cas généraux des relations entre les aires des trajectoires des points d'une figure plane qui reste semblable à elle-même et se déplace dans son plan. Cas particulier où le rapport de similitude est constant. V. Aubry.

3501. [**V8**] Je désirerais connaître en quelques mots (ou par des renvois bibliographiques) la part de Biornsen, Lambert, Lexell, Lhuilier, Mascheroni, Mayer, Sarrus, etc., dans la découverte ou la diffusion des théorèmes fondamentaux de la polygonométrie. G. Lemaire.

3502. [**V8**] Je désirerais savoir qui, le premier, a énoncé les deux théorèmes sur le $n^{\text{ième}}$ côté et la surface d'un polygone, en fonction de $(n-1)$ côtés et $(n-2)$ angles.

(Il suffirait probablement, pour résoudre cette question, de consulter les Ouvrages ci-après : 1° *Mémoires de Pétersbourg,* t. XIX et XX, articles de Lexell; 2° *Polygonométrie,* de Lhuilier, 1774? 1789? 3° *Méthode pour la mesure des polygones plans,* de Mascheroni, 1787?.)

G. Lemaire.

3503 [**D4c**]. Où trouver des renseignements détaillés sur ce problème : *Trouver tous les systèmes de fonctions*

méromorphes $x = M_1(t)$, $y = M_2(t)$, *d'une variable, satisfaisant à une équation algébrique*

$$(x, y) = 0.$$

Ce problème est entièrement résolu; mais dans quel livre ou journal (Comp. **1908**, 4, question 3319)?

G. Rémoundos (Athènes).

3504 [**K2c**]. On sait que, si H est l'orthocentre d'un triangle ABC, les cercles tritangents à chacun des triangles ABC, HAB, HBC, HCA (en tout 16 cercles) sont tangents au cercle des neuf points du triangle ABC. Connaît-on d'autres cercles tangents à ce cercle des neuf points?

Nester.

3505 [**M'3**]. Trouver l'aire de la courbe, genre lemniscate,

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

qui devient, pour $a = b$, la lemniscate de Bernoulli.

Nester.

3506 [**I 19**]. Trouver toutes les solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = P^2.$$

T. Hayashi (Tokio, Japon).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3507 [**L¹15**]. La podaire négative d'une parabole par rapport à son foyer jouit de propriétés intéressantes. Cette courbe a-t-elle fait l'objet d'études particulières?

T. Lemoyne.

3508 [**V 9**]. Je demande la bibliographie de la surface cubique de Ribaucour. T. Lemoyne.

3509 [I 12 b]. Comment doit être fixé le nombre k pour que l'équation indéterminée

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = k$$

(a_1, ..., a_n entiers donnés) ait un nombre donné de solutions entières positives. G. Russo (Catanzaro).
[Traduit de l'italien. (La Réd.)]

3510 [I 12 b]. Comment doivent être fixés les nombres k_i ($i = 1, 2, 3 \ldots, n$) pour que le système d'équations indéterminées

$$a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + \ldots + h_i x_{n-1} = k_i$$

soit satisfait par un nombre déterminé de solutions entières positives (a_i, b_i, ... entiers donnés).

G. Russo (Catanzaro).
[D'après l'italien. (La Réd.)]

3511 [K 4]. Quelle est la solution la plus simple du problème suivant : *Construire un triangle connaissant le produit de deux côtés, la différence des angles opposés et le troisième côté* et cela sans le secours des *équipollences?* J'ai aussi une solution par l'intersection de deux hyperboles équilatères concentriques, mais je désirerais une construction plus simple. Ansermet (Vevey, Suisse).

3512 [L¹ 15]. Comment démontrer géométriquement et analytiquement que, si P est un point du cercle ABC de centre O, le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrangle PABC est la conique qui passe par les milieux I, H, K des côtés BC, CA, AB du triangle ABC, par les milieux I_1, H_1, K_1 des droites PA, PB, PC, ayant pour centre le point de rencontre des cordes II_1, HH_1, KK_1 ?

W. Gaedecke (Berlin).

1276. **[O5g]** (**1898**, 98) Si l'on considère une surface Σ et, sur cette surface, une certaine courbe Γ, les normales à Σ aux différents points de Γ forment une surface σ qu'on appelle la *normalie* de la courbe Γ.

Prenons, sur Γ, un point M; soit M' un point de Σ, infiniment voisin de M. La normale, à Σ, au point M' rencontre σ en un certain nombre de points; soit μ' l'un d'entre eux. A la limite, quand M' vient se confondre avec M, μ' occupe sur σ une position μ.

Le lieu de μ est une courbe γ située sur la normalie et qu'on pourrait appeler *la normalienne* associée à Γ.

Cette courbe a-t-elle été déjà considérée?

G. de Longchamps.

1277. **[O2aβ]** (**1898**, 98) Je désirerais savoir s'il existe des courbes planes ou des contours mixtilignes plans fermés, jouissant de cette propriété que les centres de gravité de l'aire et du périmètre coïncident; en dehors, bien entendu, des figures qui présentent un centre ou une symétrie rendant cette propriété évidente. Th. Caronnet.

1278. **[V]** (**1898**, 98) Quel est le mathématicien qui a, le premier, mis en coordonnées cartésiennes rectangulaires l'équation de la ligne droite, sous la forme si employée aujourd'hui

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

ou en coordonnées obliques sous la forme

$$x \cos\alpha + y \cos(\theta - \alpha) - p = 0?$$

H. Braid.

RÉPONSES.

35. (**1894**, 9) (Javary). — *Tracé des épures* (**1894**, 44, 241; **1895**, 206; **1896**, 87). — M. G. Daressy, conservateur adjoint au Musée égyptien du Caire, vient de faire connaître un document très important au sujet de la manière dont les anciens traçaient leurs épures : *Un tracé égyptien d'une voûte elliptique,* par M. Georges Daressy (*Annales du service des Antiquités de l'Égypte,* t. VIII, Le Caire, 1907, p. 237-241). J'ai rendu compte de ce travail, avec quelques détails, dans la *Revue des questions scientifiques de Bruxelles* (octobre 1908); je prie le lecteur que le sujet intéresserait de bien vouloir s'y reporter. H. Bosmans.

1073. (**1897**, 123; **1907**, 97) (*Onponale*). — *Triangles équilatéraux inscrits dans une conique* (**1908**, 225). — *Les trois côtés* d'un triangle équilatéral inscrit dans une conique ont pour enveloppe *commune* une courbe de la sixième classe, car, outre qu'on peut inscrire dans une conique deux triangles équilatéraux ayant un côté parallèle à une direction donnée, la droite de l'infini est la position limite de deux côtés de chacun des triangles dont le troisième côté tend vers l'une des asymptotes de la conique; le sommet opposé étant lui-même à l'infini; et les quatre points de contact de l'enveloppe avec la droite de l'infini sont donnés par les directions faisant des angles de 60° (ou de 120°) avec l'une ou l'autre des asymptotes de la conique : ces points sont des points de rebroussement où la tangente est la droite de l'infini.

L'enveloppe, qui a pour asymptotes les asymptotes de la conique et comme tangentes doubles deux diamètres de celle-ci, est du quatorzième ordre ($6.5 - 3.4 - 2.2 = 14$) et a six points doubles sur chacun des axes; elle touche la conique aux points où les tangentes sont isotropes.

Si la conique est une hyperbole dont les asymptotes font un angle

de 120° comprenant la courbe, l'enveloppe se décompose en deux points (les points à l'infini de la conique) et deux paraboles égales touchant chacune l'hyperbole aux points d'intersection avec sa directrice, ayant par conséquent chacune pour foyer l'un des foyers réels de l'hyperbole.

Remarque. — Il est facile de déduire de ce qui précède que, si *deux* triangles équilatéraux sont circonscrits à une parabole, tous les triangles circonscrits à cette parabole et inscrits dans la même conique que les premiers sont équilatéraux, et que les deux coniques sont bitangentes l'une à l'autre suivant une directrice commune.

Cette proposition peut s'étendre projectivement au cas où les coniques sont quelconques, les triangles pouvant être remplacés par des polygones d'un nombre quelconque n de côtés.

WELSCH.

1154. (**1897**, 221; **1908**, 145) (E.-B. ESCOTT). — Avant de chercher une explication, il semble naturel de se demander si l'écart est assez invraisemblable pour qu'il ne puisse être attribué au hasard.

Or, les nombres de fois qu'on rencontre chaque chiffre dans la valeur de π calculée avec 707 décimales sont

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
74	78	74	72	71	64	70	53	72	79

(*voir* PEANO, *Formulaire de Mathématiques,* Paris, 1901, p. 176) et l'écart du chiffre 7 est 17,7.

La probabilité d'un tel écart est

$$1 - \theta\left(\frac{17,7}{\sqrt{1414.0,09}}\right) = 0,0265;$$

elle est petite, mais *a priori* le chiffre 7 n'était pas spécialement signalé et la probabilité que nous devons chercher, c'est la probabilité pour qu'un quelconque des chiffres donne un écart semblable.

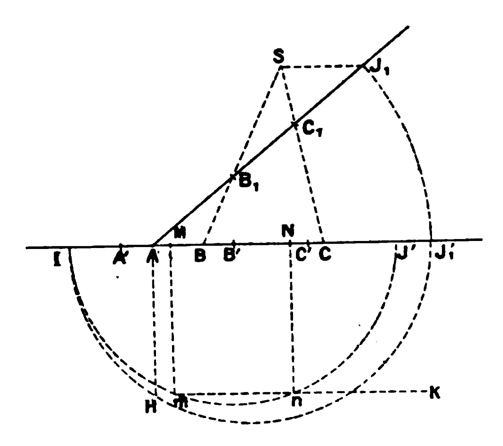
Cette probabilité serait approximativement

$$1 - (1 - 0,0265)^{10} = 0,24$$

et elle n'autorise aucun étonnement. G. QUIJANO (Xérès).

1163. (**1897**, 242; **1908**, 245) (E. LEMOINE). — ***Points doubles***

d'une division homographique (**1908**, 277). — Comme complément



à la réponse de M. P. Barbarin, nous insérons ici la figure corrélative, qui nous semble utile à l'intelligence de cette réponse.

La Rédaction.

1731. (**1900**, 8) (N.-J. Hatzidakis). — Une question tout à fait du programme ici tracé a été abordée et traitée à fond par M. Haton de la Goupillière dans les *Annaes sc. d. Acad. Polyt. do Porto*, t. III, 1908, et publiée à part dans l'Ouvrage intitulé : *Surfaces nautiloïdes*, in-8°, VI-177 pages, 28 figures, Coimbra, 1908.

C'est un chapitre des plus intéressants de l'extension, à trois dimensions, de l'étude des incurvations des coquillages.

L.-N. Machaut.

2447. (**1902**, 264) (*Meglio*). — *Rêve mathématique* (**1902**, 339; **1905**, 131; **1906**, 242). — M. Sabatier, ingénieur, m'a adressé diverses lettres que je résume ainsi :

Le P. A. Gratry, dans ses *Extraits de Logique*, t. II, livre VI, p. 317, dit : « Posez-vous des questions le soir; bien souvent, vous les trouverez résolues au réveil »; et il cite l'exemple de Laplace. Ayant suivi en 1863 les conférences du P. Gratry et étudié ses Ouvrages, j'ai fait travailler mon sommeil. « Les problèmes difficiles de Mathématiques et surtout d'Arithmétique, qui m'arrêtaient à l'état de veille, j'en trouvais la solution en rêvant et, souvent, le plaisir

que cela me causait m'éveillait. Je parle simplement de problèmes de Mathématiques élémentaires, mais cependant assez difficiles, à l'occasion, comme ceux de l'Arithmétique de Diophante.... Une fois, j'ai été averti en rêve qu'une solution que j'avais trouvée pendant le sommeil, et qui m'avait satisfait après le réveil, n'était pas cependant complète, et qu'elle devait l'être par ce que le rêve m'indiquait. Je vis que cela était vrai. »

J'ajouterai que, dans l'esprit du P. Gratry et dans ma pratique, se poser une question, c'est la travailler tant qu'on peut dans la soirée, en laissant au sommeil le soin de la parachever. Je n'ai opéré ainsi que sur des questions numériques ou algébriques.

SABATIER.

Cette réponse est à rapprocher d'articles de MM. L. Dauriac [*Sommeil et détente* (*Revue de l'hypnotisme,* de M. E. Bérillon, juillet 1906, p. 23)] et R. Pamart [*Sommeil et monoidéisme* (même *Revue*, août 1906, p. 61)]. En cinquième, M. Pamart trouvait en rêve des solutions de problèmes de Géométrie cherchées en vain le soir; aussi ses devoirs étaient-ils supérieurs à ses compositions faites en classe. M. Pamart attribue cette puissance du rêve à un état de *monoïdéisme* favorisé par le sommeil. E. MAILLET.

2747. (**1904**, 68) (P.-F. TEILHET). — (**1904**, 182; **1907**, 62). — Après avoir démontré (**1904**, 183) l'impossibilité en nombres entiers de l'équation

$$n(n+1)(n+2) = 3A^2,$$

j'ai ajouté que cette démonstration réussirait encore en substituant à 3 un nombre premier quelconque. Cette conclusion est erronée; l'équation $n(n+1)(n+2) = mA^2$ (m premier) est impossible pour les valeurs de m qui rendent insoluble l'équation de Pell

$$x^2 - my^2 = -1.$$

MATHIEU.

2778. (**1904**, 115) (*Carevyge*). — (**1906**, 106; **1908**, 59). — Le Tome X nouvellement paru (août 1908) des *Œuvres complètes de Descartes* (éd. Ch. Adam et P. Tannery) renferme, entre autres choses, tous les extraits du *Journal de Beeckmann* relatifs à Descartes avec l'indication des résultats du minutieux examen de cet important document par M. Ch. Adam qui l'a consulté à loisir à

Mitddelbourg, puis à Nancy. Le journal ne fait pas la moindre allusion à la rencontre un peu théâtrale rapportée par Baillet, biographe et panégyriste de Descartes. Il faudra donc se résigner à ignorer le problème à supposer qu'il y en ait un. S'agirait-il par hasard de la thèse *Angulum nullum esse male probavit Des Cartes?* Il se pourrait que ce fût le problème de Beeckmann, mais rien ne le prouve.

L'aventure a donc un caractère anecdotique et prestigieux, et Baillet sans doute a voulu tresser une couronne à Descartes avec les lauriers de Viète.

Peut-être aussi, après réflexion, le problème a-t-il été jugé par Beeckmann et par Descartes trop peu important pour que l'un ou l'autre en fit mention.

Il ne paraît pas non plus que l'on parvienne à reconstituer le problème de Faulhaber. H. Brocard.

2842. (**1904**, 260) (La Rédaction). — Voir *E. M.*, 1908, p. 227 : Chronique du 4e Congrès international des mathématiciens à Rome, en 1908, et p. 266.

Sur le Rapport de la Commission spéciale (MM. Poincaré, Nœther, Segre, rapporteur) la médaille Guccia a été, à l'unanimité, décernée à M. Fr. Severi (Padoue), pour ses travaux sur les surfaces algébriques.

Cette décision a été rendue le 6 avril 1908. La Rédaction.

2852. (**1904**, 283) (Saurel). — *La Mécanique sans la notion de force.* — *Voir* P. Appell, *Sur quelques questions de Mécanique rationnelle* (*A. F.*, Cherbourg, 1905 : Discours prononcé en séance générale).

M. Appell mentionne que Hertz fait une Mécanique sans forces, en ramenant tout aux liaisons.

Voir les *Œuvres complètes de Hertz*, t. III.

H. Brocard.

3181. (**1907**, 52) (*Ygrec*), — *Travaux relatifs à l'itération* (**1907**, suppl., p. x, juillet, et p. xiii, octobre; **1908**, suppl., p. iv, mars).

C.-J. Hill. — Exemplum usus functionum iteratarum in theoria functionum integraliter transcendentium (*Cr.*, t. XI, 1834, p. 193-197).



C. ISENKRAHE. — Ueber die Anwendung iterirter Functionen zur Darstellung der Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleichungen (*M. A.*, t. XXXI, 1888, p. 309-317).

L. DAVID. — Zur Theorie der algebraischen Iteration (*B. M. N.*, t. XXV, 1907).

G. EISENSTEIN. — Entwicklung von $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ (*Cr.*, t. XXVIII, 1844, p. 49-52).

GERLACH. — *Z. H.*, t. XIII, 1882.

A. KORKINE. — *B. D.*, 1882.

REICHENBAECHER. — Ueber das Iterationsproblem (*Z. H.*, t. XXXIX, 1908, p. 233-246).

F. WŒPCKE. — Note sur l'expression $\left(((a^a)^a)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\right)^a$ et les fonctions inverses correspondantes (*Cr.*, t. XLII, 1851, p. 83-90).

REICHENBÄCHER. — Die vierte Rechenstufe (*Z. H.*, t. XL, 1909, p. 10-37).

O. DEGEL (Bayreuth).

3230. (**1907**, 126) (*Nester*). — (**1907**, 258). — J'ai rappelé (*loc. cit.*) la proposition non encore démontrée de Catalan, ainsi formulée :

m étant un nombre premier impair et P *un polynome à coefficients entiers, l'équation*

$$(a+b)^m - a^m - b^m = mab(a+b)P^2$$

n'est vérifiée que par $m = 7$,

$$P = a^2 + ab + b^2.$$

Mon ami, le lieutenant-colonel Welsch, un de nos collaborateurs de la première heure, vient de me communiquer la démonstration suivante que je m'empresse de transmettre. H. BROCARD.

Si la proposition est vraie, elle doit se vérifier pour $a = b = 1$.

Dans ce cas, on a

$$2^m - 2 = 2mF,$$

et il s'agit de voir pour quelles valeurs de m, F est, ou non, un carré.

Or

$$mF = 2^{m-1} - 1 = \left(2^{\frac{m-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{m-1}{2}} + 1\right).$$

Pour que F soit un carré, il faut :

Ou que $2^{\frac{m-1}{2}} - 1$ soit un carré et

$$2^{\frac{m-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{m},$$

Ou que $2^{\frac{m-1}{2}} + 1$ soit un carré et

$$2^{\frac{m-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Les premières conditions ne sont réalisées que pour $m = 3$, les deuxièmes que pour $m = 7$. WELSCH.

3252. (**1907**, 171) (*Eix*). — *Ligne de terre* (**1908**, 202). — Depuis la publication de ma réponse, j'ai reconnu que la traduction anonyme de l'Ouvrage cité de Hondius devait être, en toute certitude, attribuée au mathématicien français Albert Girard. Il suffira de relire les réponses à la question 873 (**1894**, 227; **1895**, 193, 241; **1896**, 88) et les références diverses qui s'y trouvent mentionnées, pour affirmer, sans aucun doute possible, que les initiales A. G. S. auxquelles je n'avais pas pris garde, croyant ne pouvoir les déchiffrer, désignent Albert Girard Samié lois (né en 1595, mort à La Haye en 1632).

(*Voir* P. TANNERY, *B. D.*, 1re Partie, 1883, p. 358-360.)

H. BROCARD.

Voici le résumé d'une réponse de M. A. Schiappa-Monteiro déjà mentionnée (**1908**, 203) :

L.-L. Vallée emploie l'expression *ligne de terre*, en la justifiant, dans la première édition de son *Traité de Géométrie descriptive* (en 1819) et dans la deuxième (p. 3), publiée en 1825.

Comme Monge, José Victorino das Santas e Sousa, dans ses *Elementos de Geometria descriptiva, com applicações ás Artes, extrahidos das Obras de Monge*, publiés en 1812, désigne seulement la ligne de terre par la notation LM.

Les anciens auteurs d'écrits sur la perspective n'employaient pas l'expression *ligne de terre*, mais celle de *trace du tableau sur le géométral*. (Exemples : Guido Ubaldi, Salomon de Caus, Desargues, etc.)



M. E. Lebon, dans son *Traité de Géométrie descriptive,* attribue déjà à L.-L. Vallée le premier usage du mot *ligne de terre* en Descriptive.

La Rédaction.

3270. (**1907**, 196) (L. Godeaux). — *Systèmes de coniques.* — Une division du *Répertoire bibliographique* est réservée aux études visées dans la question. C'est la classe N, et non L[1]**21**. Cela dit, je rappellerai qu'une liste de travaux de la classe N se trouve les fiches mathématiques n[os] 885 à 896. Je crois devoir la signaler, mais en prévenant que certains sujets ne sont pas expressément ceux de l'énoncé. Cependant il pourra être utile d'en faire état, parce que les fiches précitées sont les seules de cette division publiées à ce jour.

On consultera non moins utilement les Ouvrages ci-après désignés:

A. Schœnflies (traduct. C. Speckel). — La Géométrie du mouvement (avec notions géométriques sur les complexes et congruences de droites, par. G. Fouret), Paris, 1893.

R. Sturm. — Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in syntetischer Behandlung. 3 Parties. Leipzig, 1892, 1893 et 1897.

G. Loria. — Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche (Chap. VII, p. 207-225). Torino, 1896.

Vieujeu.

3288. (**1907**, 220) (*Trinitario*). — *Point lumineux de Poisson* (**1908**, 149). — Contrairement à ce que j'ai affirmé, il s'agit ici d'un phénomène optique prévu par la théorie et vérifié par l'observation. (*Voir* quest. **1414**, **1898**, 270; **1899**, 168.)

Pour le sujet de la question **3288**, on consultera les Œuvres complètes d'Augustin Fresnel. Tome I : Mémoire couronné sur la diffraction. Note I : Calcul de l'intensité de la lumière au centre de l'ombre d'un écran et d'une ouverture circulaires éclairés par un point radieux (p. 365-372).

Après avoir indiqué un résultat d'expérience, Fresnel est amené à la démonstration de ce théorème, déduit par Poisson des intégrales générales qui représentent l'intensité de la lumière pour le centre de l'ombre d'un écran ou d'une ouverture circulaire, c'est que, dans certains cas, le centre de l'ombre d'un écran circulaire doit être aussi éclairé que si l'écran n'existait pas.

Arago en a fait la vérification expérimentale sur un écran de 2^{mm} de diamètre, distant de 4^{m} du point lumineux.

La Note est terminée par l'étude des phénomènes relatifs à une ouverture circulaire.

Voir aussi Tome II, *Théorie de la lumière*, p. 66-69.

L'auteur rappelle le théorème de Poisson et l'expérience confirmative d'Arago.

Voir encore *Ibid.*, p. 164-165. H. BROCARD.

3292. (**1907**, 221) (G. LEMAIRE). — *Tables numériques* (**1908**, 143). — Le relevé proposé ici nous a été adressé par M. Brocard et nous l'avons transmis à M. G. Lemaire. LA RÉDACTION.

3309. (**1907**, 266) (STEERMAN). — *Problème de Pappus* (**1908**, 71, 154).

LIEBER v. LÜHMANN. — Geometrische Konstruktionsaufgabeu, n° 49, p. 165.

C. FRENZEL. — Neue Lösungen einiger geometrischer Konstruktionsaufgaben (*Z. H.*, t. XL, 1909, p. 38-42).

O. DEGEL (Bayreuth).

3322. (**1908**, 5) (*Rudis*). — *Suite récurrente* 1, 5, 29, 169, ... (**1908**, 248). — Les nombres de la suite

(1) 1, 5, 29, 169, 985, 5741, ...

jouissent, et jouissent *seuls*, de la propriété que le carré de chacun d'eux est la somme de deux carrés consécutifs.

En effet, les solutions entières de l'équation

$$y^2 = x^2 + (x+1)^2$$

ou de celle-ci qui lui est équivalente

$$2y^2 = z^2 + 1$$

sont données par les réduites de rang impair de $\sqrt{2}$, transformé en fraction continue, savoir :

$$\frac{1}{1},\quad \left(\frac{3}{2}\right),\quad \frac{7}{5},\quad \left(\frac{17}{12}\right),\quad \frac{41}{29},\quad \ldots,$$

et les dénominateurs de ces réduites, qui fournissent les valeurs de y, reproduisent les termes de la série (1).

De plus, chacun de ces termes est lui-même *la somme des carrés de deux termes consécutifs* de la suite *complète* (2) des dénominateurs.

Cette dernière propriété n'est pas spéciale à la série (2); elle a lieu aussi pour la série de Fibonacci et en général pour toute série récurrente dans laquelle

$$y_0 = 0, \qquad y_{n+2} = A y_{n+1} + y_n,$$

A étant un entier quelconque.

Autres propriétés mentionnées dans la question 3322 :

1° Les termes de rang $6\mu + 2, 5$ sont composés, mais ne sont pas tous de la forme $8n + 1$: cette forme appartient à *tous* les termes de rang 4μ ou $4\mu + 1$, et tous les autres sont de la forme $8n + 5$.

2° Il existe aussi des facteurs premiers des termes de la suite (1) qui sont de la forme $8n + 5$, mais la proportion en est très faible, car il faut que ces nombres, qui divisent déjà les termes de rang $p - 1$, $\frac{p-1}{2}$ de la série complète (2), divisent en outre ceux de rang $\frac{p-1}{4}$, $\frac{p-1}{8}$.

En particulier, le neuvième terme de la série (1)

$$1\,136689$$

n'admet que deux facteurs premiers

$$137 \qquad \text{et} \qquad 8297,$$

et tous deux sont de la forme $8n + 1$.

3° Tout facteur premier de la forme $8n + 5$ divise le terme de rang $\frac{p+3}{4}$ de la série (1).

Plus généralement, la suite des termes de rang impair de *toute* série récurrente dont le terme général est

$$\frac{(a + \sqrt{b})^k - (a - \sqrt{b})^k}{2\sqrt{b}}$$

n'admet *aucun* facteur premier p pour lequel

$$\left(\frac{a^2 - b}{p}\right) = -1;$$

par contre, on y trouve comme diviseur *tout* facteur premier p tel qu'on ait à la fois

$$\left(\frac{b}{p}\right) = -1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{a^2-b}{p}\right) = 1.$$

WELSCH.

3337. (**1908**, 73) (BARRIOL). — *Problème de probabilité* (**1908**, 190). — Le nombre des combinaisons des N boules m à m est

$$\frac{N!}{m!(N-m)!},$$

celui des combinaisons m à m qui ont p blanches est

$$\frac{b!}{p!(b-p)!}\,\frac{(N-b)!}{(m-p)!(N+p-b-m)!}$$

et la probabilité demandée sera

$$\frac{b!\,m!\,(N-b)!\,(N-m)!}{N!\,p!\,(b-p)!\,(m-p)!\,(N+p-b-m)!}.$$

G. QUIJANO.

3390. (**1908**, 102) (TAFELMACHER). — *Équation indéterminée* (**1908**, 260). — La solution

$$(m^2-2l^2)^2+(m^2+2l^2-4lm)^2 = 2(m^2+2l^2-2lm)^2$$

n'est pas plus générale que celle de M. Tafelmacher.

On peut aussi employer la formule

$$\begin{aligned} &\{[(A+C)p+(B+D)q]^2-2(Ap+Bq)^2\}\\ \times &\{[(A+C)p+(B+D)q]^2-2(Cp+Dq)^2\}\\ &= 2[(Ap+Bq)^2+(Cp+Dq)^2]^2, \end{aligned}$$

qui non seulement n'est pas plus générale, mais ne l'est autant qu'à la condition que

$$AD-BC = \pm 1.$$

La forme générale la plus simple et la plus symétrique paraît être

$$[(l+m)^2-2l^2]^2+[(l+m)^2-2m^2]^2 = 2(l^2+m^2)^2.$$

WELSCH.

3396. (**1908**, 122) (*Anonyme*). — ***Bibliographie des publications de H. Laurent.*** — Mme veuve Laurent s'occupe de réunir les éléments de cette bibliographie; elle serait reconnaissante à toutes les personnes qui voudraient bien lui adresser des renseignements à ce sujet, 18, rue Denfert-Rochereau, Paris, V^e^. Elle possède en nombre des tirages à part de plusieurs des Mémoires publiés par son mari et nous prie de faire savoir qu'elle les donnerait volontiers aux mathématiciens qui lui en feraient la demande et qui pourraient y trouver une aide pour leurs travaux personnels.

Nous avons notamment remis à Mme Laurent un relevé bibliographique complet des travaux publiés dans les *Nouvelles Annales;* elle est aussi en possession du relevé complet des articles insérés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* et dans le *Journal de l'École Polytechnique.* La Rédaction.

3401. (**1908**, 123) (E.-N. Barisien). — *Aire de courbes.* — Toute droite passant par un point mobile sur une courbe et faisant un angle constant avec la normale en ce point touche son enveloppe au pied de la perpendiculaire abaissée du centre de courbure sur cette droite; l'aire qu'elle balaie est à chaque instant égale à l'aire balayée par le rayon de courbure, multipliée par le carré du cosinus de l'angle constant; en particulier, les aires balayées par les bissectrices de l'angle formé par la tangente et la normale au même point d'une courbe sont égales à la moitié de la différence entre l'aire de la courbe et celle de sa développée, à la condition d'examiner avec soin les parties des aires qui doivent être considérées comme négatives. (*Voir* la solution de la question 536, 1895, p. 414.)

Welsch.

Réponse analogue de M. S. Prieto. Autre réponse de M. V. Aubry.

La Rédaction.

3414. (**1908**, 148) (A. Boutin). — *Nombres premiers.* — La solution, provisoire au moins, est exposée dans la *Théorie des nombres ordinaires et algébriques* de H. Laurent (1904, p. 104 à 116). *Devignot.*

Soient b_1, b_2, b_3, ..., b_r les nombres moindres que a et premiers avec a. La forme $ax + b_1$, prise jusqu'à la limite N, aura approximativement autant de multiples d'un facteur quelconque f que les

formes $ax + b_2$, $ax + b_3$, ..., $ax + b_r$ et conséquemment toutes contiendront approximativement le même nombre de nombres composés. Il en sera de même pour les nombres premiers, et, comme ces formes contiennent tous les nombres premiers inférieurs à N à l'exception des diviseurs de a, la formule cherchée sera

$$\frac{\psi(N) - p_a}{r},$$

$\psi(N)$ étant le nombre total des nombres premiers inférieurs à N, p_a le nombre des facteurs premiers de a et r l'indicateur de a.

On pourrait prendre pour $\psi(N)$ la formule de Legendre

$$\frac{N}{l N - 1,08366}.$$

G. Quijano.

3415. (**1908**, 148) (A. Boutin). — *Nombres premiers.* — En appliquant la formule que je donne dans ma réponse à la question 3414, on trouvera, pour la limite demandée, la relation inverse

$$\frac{\varphi(c)}{\varphi(a)}$$

des indicateurs de c et de a. Elle serait indépendante de b et de d.

G. Quijano.

La solution de 3414 contiendra les éléments d'une réponse à 3415.

Devignot.

3418. (**1908**, 172) (Gleizes). — *Droite remarquable* (**1908**, 287). — La droite cherchée XX' est, comme on sait, le grand axe de l'ellipse centrale d'inertie du système des points donnés supposés de même masse; elle passe donc par le centre de gravité G du système.

Soient M, M', M", ... les n points donnés; P un point situé à l'unité de distance sur la perpendiculaire en G à XX': p, p', p'', ... les projections de P sur les perpendiculaires en G à GM, GM', GM", ...; m, m', m'', ... les projections de M, M', M", ... sur XX'.

On a

$$\frac{Mm}{GM} = Pp,$$

$$\frac{Mm'}{GM'} = Pp',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Par suite

$$\sum \overline{Mm}^2 = \sum \overline{GM}^2 \overline{Pp}^2,$$

et le problème est ramené au suivant :

Trouver sur une circonférence le point dont la somme des carrés des distances à n droites passant par son centre, multipliés respectivement par certains coefficients, est minimum.

En voici la solution :

Si l'on fait décrire à P la circonférence de rayon 1 et de centre G, les points $p, p', p'', \ldots$ se déplacent sur les droites Gp, Gp', Gp'', ... tout en restant constamment répartis de la même manière sur la circonférence de diamètre GP; le centre de leurs distances proportionnelles I conserve, par rapport à eux, la même position relative, ainsi que le diamètre du cercle mobile qui y passe.

Les extrémités de ce diamètre HK se meuvent donc sur des droites rectangulaires passant par G, et le point I décrit une ellipse dont les demi-axes, dirigés suivant GH et GK, sont égaux à IH et IK.

La droite cherchée XX′ est précisément confondue avec le petit axe de l'ellipse, auquel le cercle mobile est devenu tangent en G, et la somme des carrés des distances des points donnés à cette droite est égale à

$$\sum (\overline{GM}^2 \overline{pI}^2) + \overline{IK}^2 \sum \overline{GM}^2,$$

IK étant le plus petit des segments IK, IH.

(Pratiquement, il est inutile de mener les perpendiculaires à GM, GM′, GM″, ... ; il suffit de couper ces dernières droites par un cercle passant par G, de déterminer le centre i des distances proportionnelles du système des points d'intersection; la droite XX′ sera la droite qui joint G au point de la circonférence le plus rapproché de i.) WELSCH.

3419 (**1908**, 172) et **3438** (**1908**, 178) (DUBOUIS). — On peut toujours trouver quatre nombres a, b, c, d entiers, positifs, premiers

entre eux, différents de 1 et tels que $a^3b^2 - c^3d^2$ soit divisible par un nombre premier donné p.

Un des nombres, a par exemple, peut être choisi arbitrairement; les autres b, c et d peuvent être pris dans l'ensemble déterminé par la forme $px + a$, et de manière qu'ils soient premiers entre eux et avec a. Il n'y aura pas de difficulté, parce qu'il y a un nombre infini de nombres premiers de la forme

$$px + a.$$

Je suppose que a, b, c, d ne soient pas congrus à o par rapport à p. Si

$$a^3b^2 - c^3d^2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p),$$

a, b, c, d étant des entiers quelconques $\not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$, on peut trouver quatre nombres

$$k_1p + a, \quad k_2p + b, \quad k_3p + c, \quad k_4p + d$$

positifs et premiers entre eux, remplissant la condition imposée.

G. Quijano.

3437. (**1908**, 197) (E. Maillet). — *Points périodes.* — J'ai pu généraliser en partie, ainsi qu'il suit, le résultat signalé dans ma question 3437.

Soient n symboles e_1, e_2, ..., e_n, ou *unités principales,* assujettis à cette seule condition : la relation

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0,$$

où λ_1, ..., λ_n sont des quantités réelles, entraîne

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

La quantité

$$\omega_1 = \alpha_1^1 e_1 + \ldots + \alpha_1^n e_n$$

représente un point $P_1(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^n)$ de l'espace à n dimensions. Soient p pareils points P_1, P_2, ..., P_p, ou

$$\omega_1 = \alpha_1^1 e_1 + \ldots + \alpha_1^n e_n, \qquad \ldots, \qquad \omega_p = \alpha_p^1 e_1 + \ldots + \alpha_p^n e_n,$$

et l'ensemble des points Q ou

$$\Omega = m_1\omega_1 + \ldots + m_p\omega_p = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

m_1, ..., m_p prenant toutes les valeurs *entières* possibles, positives



ou négatives. Par extension, j'appelle les points Q *points périodes*. Je dirai que les points Q *remplissent* l'espace à n dimensions si l'on peut toujours trouver un point Q tel que

$$(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2<\varepsilon,$$

si petit que soit ε, pour tout point donné $(y_1, \ldots, y_n)$ de l'espace à n dimensions.

Les $\omega_1, \ldots, \omega_p$ n'étant liés par aucune relation linéaire à coefficients entiers, *voici quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les points* Q *remplissent cet espace :*

Il faut $p>n$; quand $p>n$, soient le Tableau

$$\begin{matrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_p^1 \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_p^n \end{matrix} \qquad \text{avec} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

et Δ_i^j ce que devient Δ quand on y remplace la $i^{\text{ième}}$ colonne par la $j^{\text{ième}}$ du Tableau : les déterminants d'ordre n du Tableau ne sont pas tous nuls ; de plus, soit, par exemple, $\Delta \neq 0$: on n'a aucun système de relations

$$C_1\Delta_1^s+\ldots+C_n\Delta_n^s=C_s\Delta \qquad (s=n+1, n+2, \ldots, p),$$

à coefficients entiers non tous nuls. E. Maillet.

3440. (**1908**, 198) (F. Godey). — *Intégrale.* — L'intégrale dont il est question a déjà été signalée par J. T. dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de Darboux, 1907, p. 121.

Cette intégrale (que je n'ai pas pensé à vérifier) se rencontre, p. 331, dans les *Esercizi di Calcolo infinitesimale* di Ernesto Pascal (Ulrico Hœpli), Milano, 1895.

G. Petit Bois (José, Belgique).

3444. (**1908**, 218) (Bouteloup). — *Ponts en maçonnerie.* — La méthode de l'ellipsoïde d'élasticité est traitée dans *Application de la Statique graphique*, par M. Kœchlin (Baudry, 1889).

Voir aussi *Der elastische Bogen*, de Ritter, et les cours du même auteur. Mesnager.

QUESTIONS.

3513. [Σ], (**1907**, 2, 146, 268; **1908**, 4) Prix académiques (Académie des Sciences de Paris) : *Prix Bordin pour* 1911 (3000^{fr}). — Perfectionner en un point important la théorie des systèmes triples de surfaces orthogonales. L'Académie désire des méthodes permettant d'ajouter à la liste des systèmes triples déjà connus. Elle attacherait un prix particulier à la découverte des systèmes triples algébriques les plus simples.

Prix Vaillant pour 1911 (4000^{fr}). — Perfectionner en quelque point l'étude du mouvement d'un ellipsoïde dans un liquide indéfini, en ayant égard à la viscosité du liquide.

Prix Damoiseau pour 1900 (2000^{fr}). — Perfectionner les *Tables de Jupiter* de Le Verrier.

Pour plus de détails, voir *C. R.*, t. CXLVII, séance du 7 décembre 1908. La Rédaction.

3514. **[A3g]** Étant donnée la formule ordinaire des annuités

$$a = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

qu'il s'agit de résoudre par rapport à r, je vois qu'on attribue à Bailly l'approximation

$$r = h\frac{1 - \frac{n-1}{12}h}{1 - \frac{n-1}{6}h},$$

en posant

$$h = (an)^{\frac{2}{n+1}} - 1,$$

dont je n'ai pu trouver une confirmation qui me satisfasse.

Quelque correspondant pourrait-il me dire :

1° Où je trouverais une confirmation de la paternité de Bailly;

2° Ce qu'il faut penser du degré d'approximation donné par la formule et des conditions des développements possibles de r.

J. MASCART.

3515. [D1bα] Existe-t-il des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge en aucun point?

H. LEBESGUE.

3516. [D1bα] Existe-t-il des fonctions continues développables en séries de Fourier convergentes, sans être uniformément convergentes dans aucun intervalle?

H. LEBESGUE.

3517. [D1bα] Une série de Fourier convergente peut-elle représenter une fonction qui ne soit *sommable* (au sens que j'ai attribué à ce mot) (¹) dans aucun intervalle?

H. LEBESGUE.

3518. [D5d] La théorie des intégrales des fonctions algébriques et celle des équations différentielles linéaires fournit des exemples de fonctions multiformes dont toutes les déterminations se déduisent de l'une d'entre elles par des substitutions rationnelles et du premier degré. Certaines de ces fonctions sont des inverses de fonctions uniformes (fonctions elliptiques, fuchsiennes, etc.).

Existe-t-il, en dehors des transcendantes auxquelles nous venons de faire allusion et de leurs transformées algébriques, des fonctions à une infinité de branches dont toutes les déterminations se déduisent *algébriquement* de l'une d'entre

(¹) *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (*G. V.*, 1904, p. 115).



elles ? Y a-t-il, en particulier, de telles fonctions qui soient des inverses de fonctions uniformes ([1]) ? P. Fatou.

3519. [H11] Au sujet de l'équation fonctionnelle

$$F[\theta(x)] = F(x),$$

dans laquelle $\theta(x)$ désigne une fraction rationnelle de *degré supérieur à* 1, et $F(x)$ une fonction analytique inconnue, on démontre facilement ([2]) :

1° Que toute solution *uniforme* de cette équation admet nécessairement une infinité de points singuliers essentiels;

2° Qu'il existe des fractions rationnelles $\theta(x)$ de degré quelconque $\geqq 2$ pour lesquelles l'équation précédente admet effectivement des solutions uniformes pouvant être dénuées de coupures, mais possédant alors des ensembles non dénombrables et discontinus de points essentiels.

Ceci posé, je demande s'il peut arriver que *toutes* les valeurs de x, qui font acquérir à $F(x)$ la même valeur, se déduisent de l'une d'entre elles par la substitution $[x \mid \theta(x)]$ et les puissances (positives ou négatives) de cette substitution.

Si l'on pouvait satisfaire à cette condition pour $F(x)$, on aurait une solution de la question 3518. P. Fatou.

3520. [H11] Une fonction vérifiant une condition

([1]) Pour l'étude de cette question, et de celle qui suit, il pourra être utile de consulter les articles ou Mémoires suivants :

G. Kœnigs, *Recherches sur les substitutions uniformes* (*B. D.*, 1re Partie, 1883, p. 340-357).

G. Kœnigs, *Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* (*A. E. N.*, 3e série, t. I, 1884, Supplément).

P. Boutroux., *Fonctions multiformes* (*A. E. N.*, 3e série, t. XXII, 1905).

P. Fatou, *Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles* (*C. R.*, t. CXLIII, p. 546).

([2]) *Voir* mon Article cité dans la Note précédente.

fonctionnelle de la forme

$$F[\theta(x)] = F(x),$$

où $\theta(x)$ est une fraction rationnelle de degré $\geqq 2$, peut-elle satisfaire à une équation différentielle algébrique en $x, y, y', y'', \ldots$?

A ce propos, je crois me souvenir que M. Kœnigsberger a démontré que certaines équations fonctionnelles ne pouvaient être vérifiées par les solutions d'une équation différentielle algébrique; mais je ne sais plus où a paru son Mémoire, ni s'il répond à la question précédente. Quelqu'un pourrait-il me renseigner à ce sujet? P. Fatou.

3521. **[O2p]** J'ai trouvé que, si une ellipse glisse sur deux droites rectangulaires, le lieu décrit par un point du plan de l'ellipse dont la distance au centre est d est une courbe dont l'aire totale est $4\pi d^2$.

J'ai cherché à avoir l'aire de la courbe enveloppe d'une droite liée invariablement à l'ellipse dans son roulement et je n'ai rien trouvé. Je signale ce sujet d'étude.

E.-N. Barisien.

3522. **[O2p]** On sait que le lieu du centre des ellipses de grandeur constante (axes $2a$ et $2b$) qui glissent sur deux droites rectangulaires Ox, Oy est le cercle $x^2+y^2=a^2+b^2$.

Mais toute la courbe ne convient pas. Dans chacun des quatre angles formés par Ox et Oy, la seule partie qui répond au lieu est un arc correspondant à l'angle

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}\right).$$

A quoi répond le reste du cercle? E.-N. Barisien.

RÉPONSES.

516. (**1895**, 131, 313; **1902**, 137) (D. Gravé). — *Inégalités* (**1900**, 52). — J'ai donné la solution de cette question (**1900**, 52).

Welsch.

527. (**1895**, 145; **1902**, 139) (E. Borel). — *Fonctions méromorphes : Pour qu'un développement de Taylor à coefficients rationnels* $\sum \frac{A_n}{B_n} z^n$ *représente une fonction méromorphe, n'est-il pas nécessaire que* $\sqrt[n]{B_n}$ *augmente indéfiniment?* A_n *et* B_n *sont des entiers premiers entre eux* (cf. *C. R.*, 11 février 1895, et Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*). — La condition présumée par M. Borel n'est nullement nécessaire; on peut le prouver par de nombreux exemples qui s'obtiennent facilement en partant de théorèmes que j'ai communiqués il y a 2 ou 3 ans à la Société mathématique, mais dont la démonstration n'a jamais été publiée ([1]) :

Soient $\theta(u)$ une fonction analytique de u et α un *point limite régulier* de la substitution $[u|\theta(u)]$ [*cf.* Kœnigs, *Mémoire sur les équations fonctionnelles* (*A. E. N.*, 1885, Supplément)], c'est-à-dire un point régulier de la fonction $\theta(u)$ qui vérifie les relations

$$\alpha = \theta(\alpha), \qquad |\theta'(\alpha)| < 1.$$

Soit u_0 un point du plan analytique appartenant au *domaine* de ce point limite α, et posons

$$u_1 = \theta(u_0), \qquad u_2 = \theta(u_1), \qquad \ldots, \qquad u_n = \theta(u_{n-1})$$

(u_n a donc pour limite α pour $n = \infty$).

Ceci posé, *la série de Taylor*

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

représente une fonction méromorphe de la variable z.

([1]) Elle paraîtra incessamment dans les *Annales de l'École Normale.*

Cette fonction est le quotient de deux fonctions entières de genre zéro, la fonction dénominateur ayant pour expression

$$(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\ldots(1-q^nz) \qquad [q=\theta'(\alpha)],$$

et le module maximum de chacune d'elles vérifiant l'inégalité

$$M(R) < e^{k(\log R)^2} \qquad (R = \mathrm{mod}\, z,\ k \text{ constante positive}).$$

Ces propositions s'étendent sans peine au cas où la substitution $[u|\theta(u)]$ admet, au lieu d'un point limite régulier, un *groupe circulaire limite* (*cf.* Kœnigs, *loc. cit.*), en sorte que les coefficients de la série, pris de p en p, tendent respectivement vers p limites distinctes.

Les propositions sont assez curieuses, en ce sens qu'elles permettent d'obtenir le prolongement analytique dans tout le plan d'une série de Taylor dont les coefficients sont donnés, non plus par une expression analytique simple du $n^{\text{ième}}$ coefficient en fonction de n (ainsi qu'il arrive dans la plupart des exemples connus de prolongement analytique), mais par une loi de récurrence d'où il est en général impossible de déduire une pareille expression.

Toutefois il pourra arriver, pour un choix convenable de la fonction $\theta(u)$ et du coefficient u_0, que u_n devienne une fonction simple de n. Ainsi, si l'on pose

$$u_0 = 2, \qquad \theta(u) = \frac{2u}{1+u},$$

on obtient la série

$$2 + \frac{4}{3}z + \frac{8}{7}z^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}z^n + \ldots,$$

qui représente une fonction méromorphe, d'après ce qui précède, et, si l'on désigne par B_n le dénominateur du coefficient de z^n, on a

$$\lim \sqrt[n]{B_n} = 2,$$

ce qui justifie l'assertion du début.

On vérifie d'ailleurs directement que cette série de Taylor est égale à la série de fractions rationnelles qui suit :

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4-z} + \ldots + \frac{1}{2^k-z} + \ldots,$$

et l'on voit bien ainsi que la fonction méromorphe obtenue admet

effectivement pour pôles les points $z = 2^k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ et ne se réduit pas à une fraction rationnelle.

Il est facile de multiplier ces exemples, en prenant pour $\theta(u)$ différentes expressions de la forme $\frac{au+b}{a'u+b'}$. Ainsi, par exemple :

La série de Taylor qui admet pour coefficient de z^n la $n^{\text{ième}}$ réduite $\frac{A_n}{B_n}$ du développement en fraction continue d'une irrationnelle quadratique réelle représente une fonction méromorphe (qui ne se réduit pas à une fraction rationnelle), et dans ce cas encore $\sqrt[n]{B_n}$ reste finie.

Conclusion. — Ce qu'on peut dire des séries de Taylor à coefficients rationnels $\frac{A_n}{B_n}$, représentant des fonctions méromorphes (qui ne se réduisent pas à des fractions rationnelles), se résume en ceci (*voir* l'Ouvrage cité de M. Borel) :

Ou bien les dénominateurs B_n n'ont dans leur ensemble qu'un nombre limité de facteurs premiers distincts; alors $\sqrt[n]{B_n}$ ne reste pas fini quand n devient infini;

Ou bien les facteurs premiers des B_n sont en nombre illimité; dans ce cas $\sqrt[n]{B_n}$ peut avoir une limite ou des limites d'oscillation finies ou infinies.

Toutes ces circonstances peuvent effectivement se présenter.

Toutefois on peut encore se poser la question suivante : *Peut-il arriver que $\sqrt[n]{B_n}$ ait pour limite l'unité?*

Je ne suis pas parvenu à fixer mes idées sur ce point.

P. Fatou.

1163. (**1897**, 242; **1908**, 145) (E. Lemoine). — (**1908**, 277; **1909**, 10). — Je considère comme distinctes deux droites portant, à leurs distances, la première les points a, b, c, la seconde les points a', b', c'.

Je les place à angle droit de manière que les points a, a' se confondent en O; je porte à partir de O, sur la première dans le sens abc, sur la seconde dans le sens opposé à $a'b'c'$, des longueurs $O\alpha = O\alpha' = aa'$.

Soient I le point de rencontre de bb' avec cc', F le milieu de $\alpha\alpha'$; la circonférence décrite sur IF comme diamètre coupe la perpendiculaire au milieu de OF en des points M et N : les droites IM, IN

passent par les points doubles ω et ω' tant sur abc que sur $a'b'c'$.

Cela résulte de ce que ces droites IM, IN sont tangentes à la parabole ayant F pour foyer, abc et $a'b'c'$ pour tangentes, parabole qui est l'enveloppe des droites déterminant, sur les droites rectangulaires abc, $a'b'c'$ et à partir de leur point d'intersection O, des segments dont la somme est constamment égale à aa'.

WELSCH.

1193. (**1898**, 2; **1908**, 242) (H. BROCARD). — *Travaux scientifiques de Napoléon.* — L'homme de science universelle qu'était Napoléon n'a pas eu le temps de laisser beaucoup de travaux mathématiques, tandis que dans le genre littéraire il a laissé quelques fables en vers, genre La Fontaine.

J'ai cependant le souvenir d'avoir entendu citer un problème dû à Bonaparte, et dont je ne me rappelle plus la solution :

Inscrire un carré dans un cercle, à l'aide seule du compas.

E.-N. BARISIEN.

1265. (**1898**, 79; **1908**, 266) (*Alauda*). — Cette question est identique à la question 1663 (**1899**, 244), dont j'ai donné la solution (**1900**, 357).

WELSCH.

1275. (**1898**, 98; **1908**, 267) (BARBARIN). — *Pentagone.* — La première partie est résolue (**1908**, 257). Je ne sais si l'on connaît la solution de la seconde. En voici une, le pentagone pouvant être quelconque :

Si l'on désigne pour abréger $y + a_n x + b_n$ par n, la conique a pour équation

$$\lambda_1 452 + \lambda_2 513 + \lambda_3 124 + \lambda_4 235 + \lambda_5 341 = 0,$$

ramenée au second degré par un choix des λ. Pour montrer que cela est toujours possible, opérons sur une perspective de la figure.

Nous pouvons supposer alors

$$a_2 = a_4 = 0, \qquad a_3 = a_1.$$

Alors le déterminant des coefficients de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 dans les équa-



tions qui donnent les λ est

$$a_3^2 a_1^3 (a_1 - a_3) \neq 0,$$

ce qui démontre la proposition.

E. DUBOUIS.

La première partie de la question est identique à la question 3380 (**1908**, 98), à laquelle j'ai répondu (**1908**, 257).

Quant à l'équation explicite de la conique circonscrite au pentagone ayant pour côtés

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

comme cette équation devrait rester la même lorsqu'on permuterait circulairement les quantités α, β, γ, δ, ε, elle serait évidemment de la forme

$$\begin{aligned} A(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2) + B(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha) \\ + C(\alpha\gamma + \beta\delta + \gamma\varepsilon + \delta\alpha + \varepsilon\beta) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, les trinomes α, β, γ, δ, ε ne sont pas quelconques : ils sont liés par deux équations linéaires homogènes contenant *six* paramètres, et les équations qui expriment que la conique est circonscrite au pentagone donnent, par l'élimination de A, B, C, trois relations entre ces paramètres, relations qui, en général, ne seront pas satisfaites, car il est toujours possible, et d'une infinité de manières, de choisir pour les côtés cinq droites telles que les six paramètres prennent telles valeurs qu'on voudra.

D'où il résulte qu'on ne saurait former l'équation explicite d'une conique circonscrite à un pentagone en fonction d'indices désignant les côtés.

WELSCH.

1596. (**1899**, 194; **1900**, 194) (E.-B. ESCOTT). — (**1900**, 102; **1903**, 15). — On a la solution suivante :

$$\left.\begin{aligned} a &= (9p^3)^3 \\ b &= (9p^3 - 2r^3)^3 \\ c &= (9p^3 + 2r^3)^3 \\ d &= (-6pr^2)^3 \end{aligned}\right\} \quad (p \text{ et } r \text{ entiers quelconques}).$$

a, b, c, d ont la même signification que dans la réponse de la page 15 du Tome X (1903).

MATHIEU.

1622. (**1899**, 200) (J. Jonesco). — (**1908**, 132, 228, 278). — Je crois que la réponse de M. Barisien est fautive : 9801, 98901, 989901, 9899901, ... sont les seuls nombres qui soient 9 fois le même nombre renversé. Ces nombres et 8712, 87912, 879912, 8799912, ... sont les seuls nombres qui soient multiples du même nombre renversé...

J. Edalj (Tokyo, Japon).

[Extrait d'après l'anglais. (La Réd.)]

2526. (**1903**, 40) (G. de Rocquigny). — *Équations indéterminées* (**1903**, 285). — On peut formuler les deux propositions suivantes :

1° Le carré d'un nombre non multiple de 3 est la somme d'un carré et d'un triangle non nuls (1 excepté).

2° Le carré d'un nombre non multiple de 3 est la somme de trois triangles non nuls (1, 4 et 16 exceptés).

Cela résulte des identités suivantes :

$$(12x \pm 1)^2 = (4x)^2 + \frac{(16x \pm 1)(16x \pm 2)}{2}$$
$$= \frac{(16x \pm 1)(16x \pm 2)}{2} + \frac{4x(4x+1)}{2} + \frac{4x(4x-1)}{2},$$

$$(12x \pm 2)^2 = (4x \pm 1)^2 + \frac{(16x \pm 1)(16x \pm 2)}{2}$$
$$= \frac{(16x \pm 2)(16x \pm 3)}{2} + \frac{(4x \pm 1)(4x \pm 2)}{2} + \frac{4x(4x \pm 1)}{2};$$

$$(12x \pm 4)^2 = (4x \pm 1)^2 + \frac{(16x \pm 5)(16x \pm 6)}{2}$$
$$= \frac{(16x \pm 5)(16x \pm 6)}{2} + \frac{(4x \pm 1)(4x \pm 2)}{2} + \frac{4x(4x \pm 1)}{2},$$

$$(12x \pm 5)^2 = (4x \pm 2)^2 + \frac{(16x \pm 6)(16x \pm 7)}{2}$$
$$= \frac{(16x \pm 6)(16x \pm 7)}{2} + \frac{(4x \pm 2)(4x \pm 3)}{2} + \frac{(4x \pm 1)(4x \pm 2)}{2}.$$

Mathieu.

3015. (**1906**, 35). (*Crut*). — *Lieux géométriques* (**1906**, 176). — Les résultats indiqués par M. Hendlé relativement au degré de l'enveloppe paraissent inexacts; ce degré est égal à 10, comme nous allons le démontrer.

Les équations données par M. P. Barbarin s'écrivent (en rectifiant une erreur typographique)

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \qquad \frac{\alpha y + \beta x}{\alpha\beta} = \frac{\cos^4\varphi - \sin^2\varphi}{\sin\varphi} \\ &(\mathrm{II}) \qquad \frac{\alpha y - \beta x}{\alpha\beta} = \frac{\sin^4\varphi - \cos^2\varphi}{\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad \left(\alpha = \frac{c^2}{a},\ \beta = \frac{c^2}{b}\right).$$

On en déduit

$$(1) \qquad c^4(\sin^4\varphi + \sin^2\varphi - 1)^2 = (ax - by)^2(1 - \sin^2\varphi),$$

$$(2) \qquad c^2(\sin^4\varphi - 3\sin^2\varphi + 1) = (ax + by)\sin\varphi.$$

Combinons l'équation (1) avec l'équation (2) élevée au carré; on obtient pour $\sin\varphi = u$ l'équation du sixième degré

$$8c^4u^6 - 12c^4u^4 + u^2[4c^4 + 2(a^2x^2 + b^2y^2)] = (ax - by)^2.$$

De même, de cette équation et de l'équation (2) multipliée par $-8c^2u^2$, on déduit l'équation suivante du quatrième degré :

$$(3) \qquad 12c^4u^4 + 8(ax + by)c^2u^3 - 2u^2[2c^4 - (a^2x^2 + b^2y^2)] - (ax - by)^2 = 0.$$

On a ensuite, d'après (2),

$$(4) \qquad c^2u^4 - 3c^2u^2 - (ax + by)u + c^2 = 0.$$

Pour éliminer u on a à former le résultant de deux équations du quatrième degré. On sait que le résultant de deux équations :

$$a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e = 0,$$
$$a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e' = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (ae') + (bd') & (be') \\ (ad') & (ae') + (bd') & (be') + (cd') & (ce') \\ (ae') & (be') & (ce') & (de') \end{vmatrix},$$

en posant, par exemple, $(ab') = ab' - ba'$.

On trouve ainsi, pour l'équation de l'enveloppe,

$$\begin{vmatrix} 8c^2\xi & \xi^2+\eta^2+32c^4 & 12c^2\xi & -\eta^2-12c^4 \\ \xi^2+\eta^2+32c^4 & 36c^2\xi & 8\xi^2-\eta^2-12c^4 & -8c^2\zeta \\ 12c^4\xi & c^2(8\xi^2-\eta^2)-12c^6 & \xi(\xi^2+\eta^2-12c^4) & 4c^6+c^2(2\eta^2-\xi^2) \\ -c^2\eta^2-12c^6 & -8c^4\xi & 4c^6+c^2(2\eta^2-\xi^2) & \xi\eta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$ax+by=\xi, \qquad ax-by=\eta.$$

En développant ce déterminant, on constate qu'il est du dixième degré en ξ, η. L'enveloppe a quatre branches infinies réelles avec les asymptotes

$$y=\pm\frac{a}{b}x-\frac{c^2}{b}, \qquad y=\pm\frac{a}{b}x+\frac{c^2}{b}.$$

W. Gædecke.
[D'après l'allemand. (La Réd.)]

3072. (**1906**, 141) (E.-N. Barisien, H.-B. Mathieu). — *Quadrilatère* (**1907**, 20, 92; **1908**, 233). — Si un quadrilatère ABCD est inscrit dans un cercle (O) et circonscrit à un cercle (I), les bissectrices de ses angles passent toutes quatre par le centre du cercle (I), et celles de deux angles opposés coupent la circonférence (O) aux extrémités du diamètre perpendiculaire à la diagonale joignant les deux autres sommets.

Par suite : 1° les points P et Q où se rencontrent respectivement la diagonale AC avec le diamètre du cercle (O) perpendiculaire à AC sont sur la polaire de I par rapport au cercle (O);

2° Les diagonales AC et BD se coupent en un point K de OI, conjugué harmonique de O par rapport à I et I', I' étant le point d'intersection de OI avec PQ, où se coupent en outre les bissectrices des angles extérieurs du quadrilatère, par conséquent le centre d'un cercle exinscrit à ABCD;

3° Le point K est le point de rencontre des diagonales de tout quadrilatère à la fois inscrit au cercle (O) et circonscrit au cercle (I), et réciproquement toute droite passant par K peut être prise comme diagonale d'un quadrilatère inscrit dans (O), circonscrit à un cercle (ou plus exactement à deux cercles) et dont l'autre diagonale passe également par K : ces cercles, l'un inscrit, l'autre exinscrit, ont pour centres les points I et I' de OK conjugués à la fois

aux points O et K et au cercle (O); ils sont complètement définis par la condition que K ait même polaire par rapport à ces cercles et au cercle (O), ce qui démontre le théorème de Poncelet pour le cas du quadrilatère. (Cette polaire commune est la troisième diagonale du quadrilatère ABCD complété; elle passe par le milieu K' de II', qui a aussi même polaire par rapport aux trois cercles. Ceux-ci ont pour axe radical commun la perpendiculaire au milieu de KK'.)

Pour trouver quel est celui des quadrilatères considérés dont l'aire et aussi le périmètre sont maximums, nous nous servirons du quadrilatère formé par les diagonales AC, BD et les diamètres du cercle (O) qui leur sont perpendiculaires en leurs milieux H et L; ce quadrilatère birectangle est inscrit dans le cercle de diamètre OK, a pour troisième diagonale PQ, polaire de I par rapport à ce cercle [et au cercle (O)]; ses deux diagonales proprement dites HL et OK se coupent en I, et les projections de H et L sur OK, h et l, sont en involution, les points doubles étant I et I'.

R désignant le rayon du cercle (O), on a

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = R^2 - OH^2 = OK.OK' - Oh.OK = OK.K'h \quad (^1);$$

$$\left(\frac{BD}{2}\right)^2 = R^2 - OL^2 = OK.OK' - Ol.OK = OK.K'l.$$

Le produit des diagonales AC, BD est donc égal à

$$4OK\sqrt{K'h.K'l} = 4OK.K'I$$
$$= 2R \times \text{corde du cercle (O) perpendiculaire à OK.}$$

Ce produit étant constant, l'aire du quadrilatère ABCD est maximum quand les diagonales sont rectangulaires, ce qui a lieu lorsque deux sommets opposés sont aux extrémités du diamètre qui coïncide avec la droite OI.

Elle est minimum quand HL est perpendiculaire à OI, ce qui se produit pour le trapèze isoscèle, dont les côtés parallèles touchent le cercle (I) sur OI.

WELSCH.

3279. (**1907**, 217) (A. ROSENBLATT). — Si, comme je le crois, la

(1) K et K' sont, comme nous l'avons dit, conjugués par rapport au cercle (O).



question a pour objet de réunir des exemples où intervient la condition de Lipschitz, je mentionnerai une étude de M. J. Hadamard *Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles,* 2ᵉ Mémoire (*A. E. N.*, 3ᵉ sér., t. XXII, 1905, p. 101-141).

Recta.

3290. (**1907**, 220) (E.-B. Escott). — *Équation de Fermat* $T^2 - DU^2 = 1$ (**1908**, 142). — La réponse de M. *E.-A. Majol* n'est pas tout à fait ce que je désire. Je voudrais des solutions avec $D = p$ ou $2p$, p étant premier de la forme $4n + 3$.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3331. (**1908**, 28) (Hazard). — *Tables des carrés et des cubes.* (**1908**, 157, 250, 281). — Aux indications de M. Lemaire, j'ajouterai l'excellente Table de carrés et de racines carrées donnant les carrés des nombres jusqu'à 1 milliard et les racines carrées des nombres jusqu'à 10 milliards, composée par M. E. Duhamel, ingénieur; en vente chez M. Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.

N. Plakhowo (Russie).

3334. (**1908**, 29) (Hernandez). — *Nombre multiple de plusieurs autres* (**1908**, 251). — L'énoncé doit être erroné, et cela ressort de l'exemple même qui a été choisi, car, si les binomes $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$, ..., $l + \lambda$ sont premiers entre eux, leur produit est le plus petit nombre qui soit à la fois leur multiple à tous, et ce nombre est plus grand que le produit $abc \ldots l$.

Welsch.

3350. (**1908**, 53) (E. Maillet). — Expressions *assez petit, assez grand.* — J'estime qu'il y aurait avantage à utiliser l'expression *un assez petit* (un assez grand). L'exposition de certaines théories est souvent désagréable, à cause des longueurs introduites par l'emploi fréquent de phrases telles que les suivantes : « On peut toujours donner à x une valeur suffisamment grande (petite) pour que... »; ou bien « on peut toujours trouver pour z une valeur de module suffisamment grand (petit) pour que... ».

On simplifierait évidemment le langage en disant : « Si z est un assez grand (petit), tel fait se produira.... »

On pourrait aussi dire, par exemple, qu'une limite supérieure (inférieure) des racines réelles d'une équation algébrique est un assez grand (petit) qui est supérieur (inférieur) à la plus grande (petite) racine, et ainsi de suite.

La petite difficulté consistera peut-être à trouver une bonne définition.

E. Lefèvre (Bruxelles).

Certes, des expressions telles que *un assez grand complexe, un assez petit négatif,* etc., seront parfois utiles et plus courtes que les expressions correspondantes usitées jusqu'ici : *un nombre complexe dont le module est suffisamment grand, un nombre négatif dont la valeur absolue est assez petite,* etc.

J.-L.-W.-V. Jensen (Copenhague).

Il me paraît utile de rappeler que la notation δx est déjà d'usage courant pour désigner un élément *assez petit,* bien différent de l'infiniment petit que désigne la notation dx.

Vieujeu.

Réponse approbative de M. Juhel-Rénoy. Autre réponse de M. M. Lerch.

3360. (**1908**, 74) (Paulmier). — *Géométrographie* (**1908**, 252). — Je suppose connues les intersections des droites AB, AC et des droites A′B′, A′C′ et inconnues celles de AB, A′B′ et AC, A′C′. On mène AA′, puis une droite qui coupe AA′ en O, AC et A′C′ en D et D′. On mène par O deux autres droites qui coupent AB en E et F et A′B en E′ et F′. DE et D′E′ se coupent sur la droite cherchée, à cause de l'homologie des triangles ADE et A′D′E′. De même DF et D′F′ se coupent sur la droite cherchée. On joint les deux points d'intersection, et l'on a ainsi la simplicité 23 et l'exactitude 14.

E. Dubouis.

3361. (**1908**, 74) (E.-N. Barisien). — *Nombres* B *et* B^n *ayant même somme de leurs chiffres* (**1908**, 253). — Soient S la somme des chiffres de B, S_n celle de B^n. 1° Quand S est $9p+2$ ou $9p+5$, S_{6k+1} est $9q+2$ ou $9q+5$. 2° Quand S est $9p+4$ ou $9p+7$, S_{3k+1} est $9q+4$ ou $9q+7$; exemple, $7^4=2401$. 3° Quand S est $9p+8$, S_{2k+1} est $9q+8$; exemple : $8^3=512$. 4° Quand S est



$9p+3$ ou $9p+6$, on n'a jamais S_n égal à $9q+3$ ou $9q+6$ pour $n>1$. 5° Quand S est $9p$ ou $9p+1$, $S_n = 9q$ ou $9q+1$.

J. Edalj (Tokyo, Japon).

[Extrait d'après l'anglais. (La Réd.)].

3394. (**1908**, 121) (A. Grévy). — *Encyclopédie mathématique.*

C. Burali-Forti. — *Sopra il sistema di quadriche che hanno l'n-pla polare comune* (*R. C. M. P.*, t. IV, 1890, p. 118-125).

Luigi-Brusotti. — *Ricerche sui fasci di quadriche nello spazio ordinario* (*R. C. M. P.*, t. XXVII, 1er sem. 1909, p. 179-246).

O. Degel (Bayreuth).

3408. (**1908**, 126) (*Anonyme*). — *Parallélépipède* (**1908**, 264). — Il s'agit simplement, étant donnée la somme des carrés de trois quantités, de trouver les valeurs à attribuer à ces quantités pour rendre leur somme maximum.

Si, l'une d'elles restant constante, les deux autres varient sans que la somme de leurs carrés change, leur somme sera maximum quand elles seront égales; le maximum demandé correspond donc au cas où les trois quantités sont égales, au cas du cube dans l'espèce.

Welsch.

3411 (**1908**, 147) (Mehmed Nadir). — (**1908**, 285). — On obtiendra aisément une solution immédiate qui se présente d'ailleurs assez naturellement.

En effet, $4T+1$ est la somme de deux carrés consécutifs. D'autre part, x^6+y^6 est la somme de deux carrés. On est donc amené à essayer de la solution $y=x+1$, avec $T=\frac{x(x+1)}{2}$. La division $\frac{x^6+(x+1)^6}{x^2+(x+1)^2}$ réussit et donne pour quotient

$$x^4+2x^3+5x^2+4x+1=[x(x+1)]^2+[2x+1]^2.$$

On a ensuite

$$\frac{x^4+(x+1)^4+u^4}{2}=x^4+2x^3+5x^2+4x+1,$$

d'où

$$u^4=(2x+1)^2.$$

x devra donc être de la forme $2a^2+2a$.

En définitive, on aura ainsi le système de solutions

$$\begin{array}{ll} a & \text{entier quelconque,} \\ x & 2a^2+2a, \\ y & 2a^2+2a+1, \\ u & 2a+1, \\ T & a(a+1)(2a^2+2a+1). \end{array}$$

Devignot.

Réponse analogue de M. R. Ravasco (Lisbonne).

3421. (**1908**, 172) (Dubouis). — *Équation* $x^n+y^n+z^n=u^n+v^n$. — D'après les recherches de M. Artemas Martin (*voir* questions 74 et 75. **1894**, 26), il semble probable que l'équation est impossible pour $n>3$. M. Martin a étudié cette question en détail dans le *Mathematical Magazine*, dont il est le rédacteur.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[Traduit de l'anglais. (La Réd.)]

3424. (**1908**, 193) (U. Bini). — $x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2$, $xyz=uvw$. — Soit

$$xyz=r, \qquad x^2+y^2+z^2=s, \qquad x+y-z=3\gamma,$$
$$-u+v+w=-3\gamma;$$

$x, y, -z$ et $-u, v, w$ sont racines de

$$x^3\mp 3\gamma x^2+\frac{9\gamma^2-s}{2}x+r=0. \tag{1}$$

Supposons que les formules de M. Werebrusow (**1908**, 152) s'appliquent aux deux équations (1) avec les mêmes valeurs de a et b; prenons

$$a=3A, \qquad b=3B.$$

On aura

$$s-3\gamma^2=2(A^2+AB+B^2), \qquad \pm(5\gamma^3-\gamma s)+2r=2AB(A+B).$$

Ces conditions sont satisfaites si l'on prend

$$5\gamma^2=s, \qquad r=AB(A+B),$$
$$A^2+AB+B^2=\gamma^2. \tag{2}$$

(2) s'écrit

$$\frac{A+B}{\gamma+B} = \frac{\gamma-B}{A} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{irréductible,}$$

d'où

$$A+B=\lambda\alpha, \qquad \gamma+B=\lambda\beta, \qquad \gamma-B=\mu\alpha, \qquad A=\mu\beta.$$

Égalant les deux expressions de B qu'on en tire, on obtient

$$\lambda(2\alpha-\beta)=\mu(2\beta-\alpha).$$

On peut prendre

$$\lambda=2\beta-\alpha, \qquad \mu=2\alpha-\beta.$$

On en déduit A, B, γ en fonction de α, β. D'autre part, d'après (**1908**, 152), les racines des équations (1) sont

$$x=A+\gamma, \qquad y=B+\gamma, \qquad -z=-A-B+\gamma,$$
$$w=A-\gamma, \qquad v=B-\gamma, \qquad -u=-A-B-\gamma,$$

d'où

$$x=\alpha\beta+\alpha^2, \qquad y=2\beta^2-\alpha\beta, \qquad z=3\alpha\beta-2\alpha^2-\beta^2,$$
$$u=\alpha\beta+\beta^2, \qquad v=-(2\alpha^2-\alpha\beta), \qquad w=3\alpha\beta-2\beta^2-\alpha^2,$$

qui satisfont aux équations de M. Bini.

DUBOUIS.

Si a, b, c sont trois nombres entiers liés par la relation

$$3a^2=bc,$$

le système proposé admet la solution suivante :

$$x=5a-b-2c, \qquad u=a-b,$$
$$y=5a-2b-c, \qquad v=a-c,$$
$$z=a, \qquad w=7a-2b-2c.$$

MATHIEU.

3425. (**1908**, 193) (U. BINI). — *Système*

$$x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+w^3, \qquad xyz=uvw.$$

Une solution du système proposé est

$$x=b(1+2b^3), \qquad u=1+2b^3,$$
$$y=-b^2(2+b^3), \qquad v=-b(2+b^3),$$
$$z=1-b^3, \qquad w=b^2(1-b^3).$$

Exemple : pour $b = -2$ on a la solution

$$10, \quad 8, \quad 3, \quad -5, \quad -4, \quad 12.$$

U. BINI (Rome).

3426. (**1908**, 193) (U. BINI, G. LEMAIRE). — *Système*

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3 + v^3 + w^3, \qquad x + y + z = u + v + w.$$

D'après l'identité

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x),$$

si l'on pose

$$y + z = a, \qquad z + x = b, \qquad x + y = c,$$
$$v + w = p, \qquad w + u = q, \qquad u + v = r,$$

le problème équivaut absolument au suivant :

Résoudre en nombres entiers le système

$$a + b + c = p + q + r = \text{pair},$$
$$abc = pqr.$$

E. DUBOUIS.

Si a et b sont deux entiers quelconques, m, n, p trois entiers liés par la relation $4mn + 1 = p^2$, on a la solution suivante :

$$\begin{aligned} x &= (n-1)a + (m-1)b, & u &= -(n+1)a + (m \pm p)b, \\ y &= (n \pm p)a - (m-1)b, & v &= (n \pm p)a - (m+1)b, \\ z &= -(n-1)a + (m \pm p)b, & w &= (n+1)a + (m+1)b. \end{aligned}$$

MATHIEU.

3429. (**1908**, 194) (A. GÉRARDIN). — *Table de facteurs.* — M. D.-N. Lehmer a préparé la Table jusqu'à 12 millions, mais on n'a publié que les 10 premiers millions. La publication est annoncée comme étant sous presse en mars 1908. Le prix n'est pas indiqué. Les ordres doivent être adressés à la Carnegie Institution of Washington, Washington, D. C.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

3432. (**1908**, 196) (J. JONESCO). — *Découpage d'un rectangle.* —

(2) s'écrit

$$\frac{A+B}{\gamma+B} = \frac{\gamma-B}{A} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{irréductible,}$$

d'où

$$A+B=\lambda\alpha, \qquad \gamma+B=\lambda\beta, \qquad \gamma-B=\mu\alpha, \qquad A=\mu\beta.$$

Égalant les deux expressions de B qu'on en tire, on obtient

$$\lambda(2\alpha-\beta)=\mu(2\beta-\alpha).$$

On peut prendre

$$\lambda=2\beta-\alpha, \qquad \mu=2\alpha-\beta.$$

On en déduit A, B, γ en fonction de α, β. D'autre part, d'après (**1908**, 152), les racines des équations (1) sont

$$x=A+\gamma, \qquad y=B+\gamma, \qquad -z=-A-B+\gamma,$$
$$w=A-\gamma, \qquad v=B-\gamma, \qquad -u=-A-B-\gamma,$$

d'où

$$x=\alpha\beta+\alpha^2, \qquad y=2\beta^2-\alpha\beta, \qquad z=3\alpha\beta-2\alpha^2-\beta^2,$$
$$u=\alpha\beta+\beta^2, \qquad v=-(2\alpha^2-\alpha\beta), \qquad w=3\alpha\beta-2\beta^2-\alpha^2,$$

qui satisfont aux équations de M. Bini.

Dubouis.

Si a, b, c sont trois nombres entiers liés par la relation

$$3a^2=bc,$$

le système proposé admet la solution suivante :

$$x=5a-b-2c, \qquad u=a-b,$$
$$y=5a-2b-c, \qquad v=a-c,$$
$$z=a, \qquad w=7a-2b-2c.$$

Mathieu.

3425. (**1908**, 193) (U. Bini). — *Système*

$$x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+w^3, \qquad xyz=uvw.$$

Une solution du système proposé est

$$x=b(1+2b^3), \qquad u=1+2b^3,$$
$$y=-b^2(2+b^3), \qquad v=-b(2+b^3),$$
$$z=1-b^3, \qquad w=b^2(1-b^3).$$

Exemple : pour $b = -2$ on a la solution

$$10, \quad 8, \quad 3, \quad -5, \quad -4, \quad 12.$$

U. BINI (Rome).

3426. (1908, 193) (U. BINI, G. LEMAIRE). — *Système*

$$x^3+y^3+z^3 = u^3+v^3+w^3, \qquad x+y+z = u+v+w.$$

D'après l'identité

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x),$$

si l'on pose

$$y+z=a, \quad z+x=b, \quad x+y=c,$$
$$v+w=p, \quad w+u=q, \quad u+v=r,$$

le problème équivaut absolument au suivant :

Résoudre en nombres entiers le système

$$a+b+c = p+q+r = \text{pair},$$
$$abc = pqr.$$

E. DUBOUIS.

Si a et b sont deux entiers quelconques, m, n, p trois entiers liés par la relation $4mn+1 = p^2$, on a la solution suivante :

$$x = (n-1)a+(m-1)b, \qquad u = -(n+1)a+(m\pm p)b,$$
$$y = (n\pm p)a-(m-1)b, \qquad v = (n\pm p)a-(m+1)b,$$
$$z = -(n-1)a+(m\pm p)b, \qquad w = (n+1)a+(m+1)b.$$

MATHIEU.

3429. (1908, 194) (A. GÉRARDIN). — *Table de facteurs.* — M. D.-N. Lehmer a préparé la Table jusqu'à 12 millions, mais on n'a publié que les 10 premiers millions. La publication est annoncée comme étant sous presse en mars 1908. Le prix n'est pas indiqué. Les ordres doivent être adressés à la Carnegie Institution of Washington, Washington, D. C.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

[Traduit de l'anglais. (LA RÉD.)]

3432. (1908, 196) (J. JONESCO). — *Découpage d'un rectangle.* —

Les théorèmes suivants donneront quelques renseignements utiles :

1° *On peut découper tout rectangle en* $2k$ *rectangles semblables à lui* ($k > 1$).

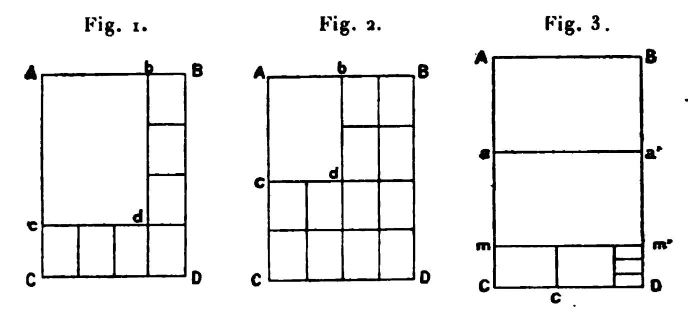
En effet, si l'on prend sur AB

$$Ab = \frac{k-1}{k} AB$$

et sur AC

$$Ac = \frac{k-1}{k} AC,$$

et si l'on trace bd et cd parallèles respectivement à BD et à CD, on



aura le rectangle Abdc semblable au primitif. Si l'on divise alors en k parties égales les côtés BD et CD, et si l'on trace par les points de division des perpendiculaires aux mêmes côtés, on aura d'autres $2k-1$ rectangles aussi semblables au primitif.

2° *On peut diviser tout rectangle en* $4k+1$ *rectangles semblables au primitif* ($k > 1$).

Il suffira de prendre

$$Ab = \frac{k-1}{k+1} AB, \qquad Ac = \frac{k-1}{k+1} AC$$

et de tracer bd et cd parallèles respectivement à BD et CD. On divisera ensuite facilement le polygone bBDCcd en $4k$ rectangles semblables à ABCD.

3° *Si*

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{h}{k},$$

h et k étant des entiers premiers entre eux, le rectangle peut être divisé en un nombre de rectangles semblables à lui, égal à

la somme des quotients qu'on obtient en calculant le plus grand commun diviseur de k et h.

En effet, on prendra $Aa = \frac{\overline{AB}^2}{BD}$ sur AC autant de fois que possible et l'on tracera aa', ..., mm' qui sépareront les rectangles $Abaa'$, ..., $aa'mm'$ semblables à ABDC : le nombre de ces rectangles sera le quotient entier de

$$\frac{BD}{Aa} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{k}{h}$$

et l'on aura

$$mC = \frac{r_1}{h} \frac{\overline{AB}^2}{BD},$$

désignant par r_1 le résidu de la division $\frac{k}{h}$.

On déterminera ensuite le point c par la condition

$$Cc = mC \frac{BD}{AB} = \frac{r_1}{h} AB = \frac{r_1}{k} \frac{\overline{BD}^2}{AB}$$

et l'on prendra Cc sur CD autant de fois que possible : on obtiendra ainsi le nombre des rectangles semblables à ABCD qu'on peut découper dans la bande $mm'DC$, et ce nombre sera le quotient entier de

$$\frac{CD}{Cc} = \frac{k}{r_1} \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{h}{r_1},$$

et ainsi de suite.

4° *Si l'on désigne par s la somme de tous ces quotients, le rectangle* ABCD *pourra être divisé en* $k(s-1)+1$ *rectangles semblables à lui.*

En effet, le rectangle étant divisé en s rectangles, on peut diviser un de ces rectangles en s nouveaux rectangles et alors la figure primitive deviendra découpée en $2(s-1)+1$ rectangles. Après une nouvelle division, le nombre de rectangles sera $3(s-1)+1$, et ainsi de suite.

En particulier, *si*

$$s = 2 = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{AB}^2},$$

le rectangle pourra être divisé en un nombre quelconque de rectangles semblables à lui. G. Quijano.

3434. (**1908**, 196) (J. Jonesco). — *Biographie de Petrus de Dacia.* — A ma connaissance, *Petrus de Dacia* ne se rencontre dans aucun dictionnaire biographique.

Ce nom, ou plutôt celui de Pierre de Dace, a été porté aussi par trois personnages mentionnés au *Répertoire* d'Ulysse Chevalier.

Le premier, de Wisby (Gottland), dominicain, vers 1245, prieur en 1283, mort en février ou mars 1288.

Le deuxième, recteur de l'Université de Paris, 1326.

Le troisième, à l'Université de Paris, 1481.

Les références bibliographiques ajoutées (*loc. cit.*) ne me paraissent pas spécifier qu'aucun d'eux ait été computiste, titre sous lequel *Petrus de Dacia* est mieux connu.

Un quatrième Pierre Dace, orfèvre, se trouve mentionné au *Répertoire des anniversaires* de l'église Saint-Nizier de Lyon (xve siècle).

Pour revenir au mathématicien du xive siècle, je signalerai, dans les manuscrits de Lyon, les deux suivants, qui méritent de retenir l'attention :

1649 (1627). *Canon supra Kalendarium magistri Petri de Dacia.* Recueil de Tableaux pour les différents cycles; calendrier lunaire et solaire pour les douze mois de l'année; calendrier liturgique, enfin *Tabula ad sciendum V^e festa mobilia.* Le Tableau type de la fin est daté de 1339.

45 (Palais des Arts. Lyon), fol. 71. *Tabula magistri Petri de Dacia, dicta Philomena, ad sciendum quo signo luna sit qualibet die; et in quo gradu signi.* xive siècle.

Le même recueil serait à examiner plus complètement, car il renferme d'autres documents non moins intéressants.

Je trouve dans les Tables de la *B. M.* de M. G. Eneström plusieurs mentions de *Petrus de Dacia* : I, 1887, 62; II, 1888, 18; III, 1889, 11; IV, 1890, 32; V, 1891, 118; VI, 1892, 82; X, 1896, 115.

M. G. Eneström a d'ailleurs posé à son sujet deux questions bibliographiques : n° 3 (1885, 94) et n° **29** (1890, 32).

La question n° 3 se rapporte à des copies d'un Traité *Summa artis geometriæ* qui ont été attribuées à *Petrus de Dacia* et à *Guilelmus Bradwardinus.*

La question n° 29 vise un document intitulé *Tabula magistri Petri Philomenæ de Dacia ad inveniendum propositionem cujusvis numeri* (voir *I. M.*, quest. 855, **1896**, 150; **1906**, 57).

J'ignore si des investigations ont été faites pour élucider ces questions et si la suite de la *B. M.* fournit de nouvelles références, soit biographiques, soit bibliographiques.

Pour finir, je mentionnerai un document qui désigne plus clairement le personnage. C'est le manuscrit de Rennes 593 (147), recueil dont les folios 1 à 42 contiennent des Tables astronomiques.

Fol. 1. « La lettre à savoir le vrai cours de la lune par le qualendrier mestre Pierre de Dace, dit Rosignol » et « la lettre à savoir le novel kalendrier que mestre Guillaume de Saint-Cloot fit à la requeste de la roygne ».

Vers la fin, un Tableau de calendrier pour la région de Montpellier.

Manuscrit de 1303 à 1304.

Guillaume de Saint-Cloud, astrologue de la reine Jeanne de Navarre, femme de Philippe le Bel; mort vers 1320.

Un autre contemporain, Arnaud de Rosignol (ou de Rossinyol), général de l'ordre de la Merci; mort au Puig le 3 mai 1317.

Cette réponse allait paraître lorsque j'ai rencontré la référence suivante :

M. Curtze, *Petri Philomeni de Dacia in algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius, una cum algorismo ipso*. Copenhague, 1897. Compte rendu par P. Tannery (*B. D.*, 1re Partie, 1897, p. 277-279).

Je suis fondé à croire que le présent article répond à quelques observations de P. Tannery.

J'aurai peut-être à y revenir. *Dr Charbonier,*

Pour ce qui concerne le mathématicien Petrus de Dacia (il y a eu au moyen âge un autre écrivain de ce nom), il convient de renvoyer au *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. XVII, année 1885 (Berlin, 1888), p. 4, 5, et aux écrits y analysés. *Voir* aussi : *Petri Philomeni de Dacia in algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius,* éd. M. Curtze (Copenhague, 1897). G. Eneström.

Petrus de Dacia, astronome danois de la première moitié du XIV[e] siècle, vécut longtemps à Paris, où il devint directeur du collège de Dace, et plus tard, en 1326, recteur de l'Université, dont il défendit les droits et privilèges contre les prétentions du clergé. Rendu à sa patrie, il devint chanoine de Ribe dans le Jutland. Ses Ouvrages principaux sont un *Comput ecclésiastique* et un *Traité du Calendrier*. G. QUIJANO (Xérès).

3435. (**1908**, 196) (G. LEMAIRE). — *Tables de logarithmes.* — Les séries mentionnées supposent que le dernier chiffre de la différence première soit zéro, et ces séries seront d'autant plus nombreuses que les différences secondes seront plus petites et, par conséquent, que le nombre correspondant au logarithme sera plus grand.

Or, la différence première a pour expression

$$\log(N+1) - \log(N) = \log\left(\frac{N+1}{N}\right) = \log\left(1+\frac{1}{N}\right),$$

approximativement $\frac{M}{N}$, M étant le logarithme vulgaire de e. Il y aura donc une série de logarithmes également terminés dans le voisinage de chacun des nombres

$$\left[\frac{M}{0,0000010}\right], \quad \left[\frac{M}{0,0000020}\right], \quad \left[\frac{M}{0,0000030}\right], \quad \ldots$$

dont les logarithmes sont approximativement

$$\log\left[\frac{M}{0,0000010}\right] = L, \qquad L - \log 2, \qquad L - \log 3, \qquad \ldots.$$

Mais le dernier chiffre du logarithme de 2 calculé avec 7 décimales est zéro; il en sera de même pour les logarithmes des puissances de 2, 4, 8, 16, 32, ... pour 5 et ses puissances et pour les produits de puissances de 2 par des puissances de 5. Les logarithmes de 7, 29, 59, 61, 89, ... ont aussi zéro pour septième décimale, et, par conséquent, il en sera de même pour 2^{n_1}, 5^{n_2}, 7^{n_3}, ...

Le chiffre zéro étant donc le dernier chiffre de beaucoup des premiers nombres, le chiffre le plus répété sera le dernier chiffre de L, qui est précisément 8. G. QUIJANO (Xérès).

QUESTIONS.

3523. [O2p] Je trouve par un calcul très long le résultat suivant :

Si une ellipse glisse sur deux droites rectangulaires, le grand axe de l'ellipse enveloppe une courbe formée de quatre ovales. L'aire de chacun de ces ovales est

$$\frac{\pi(a-b)^2(3a+b)}{4(a+b)}.$$

Je désire savoir : 1° si ce résultat est exact; 2° si, en raison de la simplicité de l'aire, il n'y a pas un procédé rapide pour y parvenir; 3° si l'on peut avoir de même l'aire de l'enveloppe des tangentes au sommet et des directrices de l'ellipse, résultat que j'ai vainement cherché; 4° les résultats obtenus lorsque les deux droites sur lesquelles glisse l'ellipse font un angle θ. E.-N. Barisien.

3524. [L¹15] Je désire les équations et les aires des deux courbes suivantes :

Soit Δ la droite menée par un point M variable d'une ellipse, perpendiculairement au rayon vecteur central MO. Les deux courbes que j'envisage sont : 1° le lieu du pôle de Δ par rapport à l'ellipse; 2° le lieu du milieu de la corde de l'ellipse, interceptée par Δ. E.-N. Barisien.

3525. [I3 et H12d] Si α, β, γ sont les racines de

$$x^3+x^2-1=0$$

et si

$$U_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n,$$

montrer que, pour p premier,

$$U_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

quand la congruence

$$x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

n'a pas de racines.

Exemples :

$$\begin{array}{llllll} n & = 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots, \\ U_n & = 3, & -1, & 1, & 2, & \ldots; \end{array}$$

$p = 2, 3, 13, 29, 31, 41, \ldots.$

Montrer que, dans ce cas, la période des résidus de U_n $\pmod{p}$ est un diviseur de

$$\frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1.$$

Quand $x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ a une seule racine, la période des résidus est un diviseur de $p^2 - 1$.

E.-B. Escott (Ann Arbor).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3526. [I3a] La congruence

$$x^3 - 3x + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad (p \text{ premier})$$

a trois racines, si elle en a une. Si α est une racine, les autres sont

$$\beta \equiv \alpha^2 - 2, \qquad \gamma \equiv \beta^2 - 2.$$

Il en est de même pour la congruence

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Peut-on citer d'autres congruences cubiques irréductibles ayant même propriété?

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3527. **[I19]** Dans le polynome $X^3 - X - 1$, si l'on substitue $X = ax^2 + bx + c$, déterminer a, b et c de façon que $X^3 - X - 1$ ait deux facteurs rationnels.

Exemples :

$$X = x^2 + 1, \qquad X^3 - X - 1 = (x^3 + x^2 + 2x + 1)(x^3 - x^2 + 2x - 1);$$
$$X = x^2 - 3, \qquad X^3 - X - 1 = (x^3 + x^2 - 4x - 5)(x^3 - x^2 - 4x + 5);$$
$$X = x^2 - x, \qquad X^3 - X - 1 = (x^3 - 2x^2 + x - 1)(x^3 - x^2 + 1);$$
$$X = x^2 - \frac{19}{25},$$
$$X^3 - X - 1 = \left(x^3 + \frac{13}{5}x^2 + \frac{56}{25}x + \frac{103}{125}\right)\left(x^3 - \frac{13}{5}x^2 + \frac{56}{25}x - \frac{103}{125}\right).$$

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3528. **[F4c]** Quel est le théorème en fonctions elliptiques dont le théorème de Moivre

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

est un cas particulier?

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3529. **[F8a]** Les racines de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

peuvent être exprimées par des fonctions trigonométriques

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}(\cos\theta \pm i \sin\theta),$$

où

$$\cos\theta = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}.$$

Y a-t-il une expression pour les racines d'une équation cubique ou de degré supérieur au moyen des fonctions elliptiques $\mathrm{sn}\,\theta$, $\mathrm{cn}\,\theta$, $\mathrm{dn}\,\theta$? E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3530. [A3] Si l'on a trois équations simultanées

$$F(x, y, z) = o, \qquad \Phi(x, y, z) = o, \qquad \Psi(x, y, z) = o,$$

avec les solutions

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \quad (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3), \quad \ldots,$$

quelle est la condition pour que deux des suites de racines coïncident; par exemple pour que

$$\alpha_1 = \alpha_2, \qquad \beta_1 = \beta_2, \qquad \gamma_1 = \gamma_2?$$

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3531. [H5jα] A-t-on étudié d'une manière approfondie les propriétés des intégrales réelles de l'équation différentielles du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda(x^2 - a^2)y$$

où λ est une constante positive ou négative?

Connaît-on une expression de ces intégrales sous forme d'intégrale définie? L. Bloch.

3532. [M¹8] Quelles sont les propriétés connues des courbes dont l'équation, par rapport à un triangle de référence, est

$$x^u y^v z^w = \lambda \qquad (u + v + w = o).$$

Je rappelle qu'elles ont, d'après M. G. Fouret, reçu d'Halphen le nom de *courbes anharmoniques* et que S. Lie et Klein ont attiré l'attention sur leurs propriétés.

T. Lemoyne.

RÉPONSES.

876. (**1896**, 175; **1906**, 84) (V. Retali). — *Courbes planes* (**1908**, 103, 224). — Au sujet des questions **876** et **1295** (**1898**, 125; **1899**, 18) : en publiant ma question **876**, on avait remplacé le mot *quartiques* par *courbes planes*, ce qui change essentiellement la portée de ma demande. L'énoncé correct a été publié sous le n° **1295** (**1898**, 125), et deux réponses, de MM. Wölffing et *H. Braid*, ont paru en **1899**, p. 18. Je crois nécessaire de rappeler cette circonstance pour éviter que la réédition de 876 (**1906**, 84) ne donne lieu à d'autres réponses qu'il n'était pas dans mon intention de solliciter. Les travaux indiqués dans les réponses de MM. Brocard et Degel (**1908**, 103, 224) se rapportant aux cubiques rationnelles, dont la Géométrie est très bien connue, n'ont rien à voir avec les *quartiques du genre deux*, qui ont été jusqu'ici bien peu travaillées. J'accepterai avec reconnaissance des renseignements bibliographiques sur ces dernières courbes et qui ne soient pas déjà indiqués dans l'intéressante réponse de M. Wölffing.

V. Retali (Milan).

1265. (**1898**, 79; **1908**, 266) (*Alauda*). — *Point double de deux figures semblables* (**1909**, 32). — (Résumé accompagnant une solution développée.) Soient a et b les coordonnées du point double I (axes rectangulaires). Soient

$$x - a = \rho\cos\varphi, \qquad y - b = \rho\sin\varphi,$$
$$x_1 - a = \rho_1\cos\varphi_1, \qquad y_1 - b = \rho_1\sin\varphi_1,$$
$$x' - a = k\rho\cos\varphi', \qquad y' - b = k\rho\sin\varphi',$$
$$x'_1 - a = k\rho_1\cos\varphi'_1, \qquad y'_1 - b = k\rho_1\sin\varphi'_1,$$
$$k = \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \frac{l'}{l}.$$

Les relations

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \pm\sin(\varphi'_1 - \varphi'),$$
$$\overline{\mathrm{IA'}}^2 - \overline{\mathrm{IB'}}^2 = k^2\left(\overline{\mathrm{IA}}^2 - \overline{\mathrm{IB}}^2\right)$$

donnent immédiatement deux équations linéaires en a et b. On prend $+$ ou $-$ suivant que les figures sont directement ou inversement semblables.

Dans le premier cas, la méthode suivante est plus commode pour pousser les calculs jusqu'au bout. Prenons des axes parallèles aux axes donnés et passant par I et soient X, Y, X', Y' les coordonnées de A et A' relativement à ces axes. Soit IA'' le vecteur de même longueur que IA et dirigé dans le sens de IA'. Les coordonnées de A'' sont $\frac{X'}{k}$ et $\frac{Y'}{k}$. Si l'on fait tourner les axes autour de I d'un angle

$$\varphi = (IA, IA'),$$

A'' acquiert les coordonnées X et Y qu'avait A avant la rotation. On a donc

$$\frac{X'}{k} = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \qquad \frac{Y'}{k} = X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$$

Au moyen de

$$X' - X = x' - x, \qquad Y' - Y = y' - y,$$

ces relations peuvent s'écrire

$$\frac{x'-x}{k} = X\left(\cos\varphi - \frac{1}{k}\right) - Y\sin\varphi,$$

$$\frac{y'-y}{k} = X\sin\varphi + Y\left(\cos\varphi - \frac{1}{k}\right).$$

On résout en X et Y, puis on trouve

$$a = x - X = \frac{k^2 x - k\cos\varphi(x+x') + k\sin\varphi(y-y') + x'}{1 + k^2 - 2k\cos\varphi},$$

et l'on trouve de même b.

On a

$$\varphi = (AB, A'B'),$$

d'où

$$k\cos\varphi = \frac{l'}{l}\,\frac{(x-x_1)(x'-x'_1) + (y-y_1)(y'-y'_1)}{ll'}$$

$$= \frac{(x-x_1)(x'-x'_1) + (y-y_1)(y'-y'_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2},$$

$$k\sin\varphi = \frac{l'}{l}\,\frac{(x-x_1)(y'-y'_1) - (x'-x'_1)(y-y_1)}{ll'} = \ldots.$$

Le calcul devient facile. Dans les expressions définitives de a et b, le dénominateur est

$$(x - x_1 - x' + x'_1)^2 + (y - y_1 - y' + y'_1)^2.$$

E. Dubouis.

1295. (**1898**, 125) (V. Retali). — *Quartiques* (**1899**, 18). — *Voir* ma réponse à 876 (**1909**, 53). Je désirerais, comme je l'y indique, de nouveaux renseignements bibliographiques relatifs à la question **1295**.

V. Retali (Milan).

3256. (**1907**, 173) (E. Grigorieff). — *Impossibilité de* $x^4 + y^4 + z^4 = 3u^4$ (**1908**, 281). — La démonstration de M. Werebrusow n'est pas concluante. On a

$$u^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{(après correction d'une faute d'impression)},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 16a, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 4b, \qquad \text{d'où} \qquad u^2 = \frac{4a}{b},$$

qui n'est pas nécessairement multiple de 4.

Dubouis.

3268. (**1907**, 195) (E.-B. Escott). — *Somme des n premiers termes d'une série* (**1908**, 140). — La réponse de M. Brocard n'est pas ce que je demande, car je désire la somme des n premiers termes. La série est le développement formel de $\frac{1}{3}(1 - 2)^{\frac{3}{2}}$ par la formule du binome, développement qui est bien divergent. Mais la question posée n'en reste pas moins sans solution.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3281. (**1907**, 218) (E.-B. Escott). — *Séries* (**1908**, 141). — La réponse de M. Quijano ne démontre pas que les séries données ont le premier terme de leurs différences d'ordre impair égal à zéro. Je désire une démonstration de cette propriété.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]



3296. (**1907**, 243) (*Arcitenens*). — ***Lieu relatif à une conique*** (**1908**, 41, 143). — Considérons dans un plan une courbe quelconque Γ et un point fixe O; A est un point variable de Γ; la perpendiculaire menée par O au vecteur OA va couper la normale et la tangente à Γ en A, respectivement aux points N et T; les perpendiculaires menées par O et A respectivement à la tangente AT et au rayon vecteur OA vont se couper au point R : cela posé, l'enveloppe de la droite AR, antipodaire de Γ par rapport à O, est aussi l'enveloppe des paraboles ayant O pour foyer et pour tangentes au sommet les tangentes de Γ ; donc le point de contact de |AR| avec son enveloppe étant le point où |AR| touche la parabole dont O est le foyer et AT la tangente au sommet est le point symétrique de R par rapport à A, savoir la projection de N sur |AR|. Le centre P du rectangle AONQ est aussi centre du cercle passant par O et tangent à Γ au point A; donc le lieu des points P situés à égale distance d'une courbe Γ et d'un point fixe O est identique au lieu des centres des cercles qui passent par O et touchent Γ; il est donc *la courbe homothétique à l'antipodaire de* Γ *par rapport au pôle* O, *ce point étant le centre et* $\frac{1}{2}$ *le rapport d'homothétie* (*cf.* ma réponse à la question **2827**, t. XIII (1906), p. 40 de ce Recueil). La construction indiquée du point Q montre immédiatement que, lorsque Γ est algébrique, les asymptotes de son antipodaire par rapport à O sont les normales menées à Γ en ses points de rencontre avec la première polaire de O, et que la droite à l'infini est tangente à l'antipodaire, sur les perpendiculaires aux asymptotes de Γ. Si Γ est de l'ordre m, de la classe n, et si elle est en situation générale par rapport au triangle isotrope OIJ, son antipodaire a donc sur la droite à l'infini $2m+n$ points : c'est l'ordre de l'antipodaire. Les tangentes de l'antipodaire issues d'un point arbitraire M sont les rayons qui unissent ce point à ceux où Γ est coupé par le cercle décrit sur le diamètre OM, et, par suite, la classe de l'antipodaire est $2m$. Il est aussi évident que Γ et son antipodaire par rapport à O ont entre elles un contact du premier ordre aux $m+n$ points d'incidence des normales menées à Γ par le point O.

Désignant par f et g les nombres de fois que Γ passe par un point cyclique ou touche la droite à l'infini, par φ et γ les singularités réciproques, par p et q les nombres de coïncidences des tangentes lorsque le pôle O ou un point cyclique est multiple, les formules

connues (¹) donnent, pour les caractéristiques des courbes (Q) et (P).

$$m' = 2m + n - 2(f+\gamma) - (\varphi + g) + p + q, \qquad n' = 2m - f - \gamma,$$
$$f' = q, \qquad g' = m - f, \qquad \varphi' = 2m - f - 2\gamma,$$
$$\gamma' = p, \qquad \pi' = g, \qquad \chi' = \varphi.$$

Dans le cas particulier de la conique ($m = n = 2$) nous avons donc :

1° Γ *est une conique réelle en situation générale par rapport au triangle isotrope* OIJ :

$$f = g = \varphi = \gamma = 0;$$
$$m' = b, \qquad n' = 4, \qquad g' = 2, \qquad \varphi' = 4, \qquad \gamma' = f' = \pi' = \chi' = 0;$$

(P), du sixième ordre et de la quatrième classe, a pour tangentes doubles la droite à l'infini et les droites isotropes issues de O.

2° Γ *est une conique passant par* O :

$$\gamma = 1;$$
$$m' = 4, \qquad n' = 3, \qquad g' = 2, \qquad \varphi' = 2;$$

(P) est une quartique tricuspidale, dont O est le foyer simple et la droite à l'infini la tangente double. C'est la polaire réciproque par rapport à O d'une cubique circulaire avec un nœud en O.

3° Γ *est une conique à centre ayant un foyer en* O :

$$\varphi = 2;$$
$$m' = 4, \qquad n' = 4, \qquad g' = 2, \qquad \varphi' = 4, \qquad \chi' = 2;$$

(P) est une quartique de la quatrième classe, ayant la droite à l'infini pour tangente double et les droites isotropes issues de O pour tangentes stationnaires. C'est la polaire réciproque d'un *limaçon*.

4° Γ *est une parabole :*

$$g = 1;$$
$$m' = 5, \qquad n' = 4, \qquad g' = 2, \qquad \pi' = 1;$$

(P), du cinquième ordre et de la quatrième classe, a la droite à l'infini pour tangente stationnaire.

(¹) Salmon-Fiedler, *H. Ebenen Kurven*, p. 135.

5° Γ *est une parabole passant par* O :

$$g = \gamma = 1;$$
$$m' = n' = 3, \qquad g' = \varphi' = 2, \qquad \pi' = 1;$$

(P) est une cubique cuspidale dont la droite à l'infini est la tangente stationnaire et O le foyer. Lorsque O est le sommet de la parabole, (P) est une parabole de Neil.

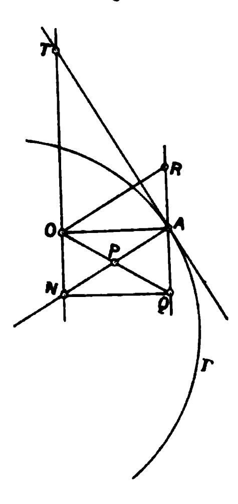
6° Γ *est une parabole ayant le foyer* O :

$$g = 1, \qquad \varphi = 2;$$
$$m' = 3, \qquad n' = 4, \qquad g' = 2, \qquad \varphi' = 4, \qquad \pi' = 1, \qquad \chi' = 2;$$

(P), du troisième ordre et de la quatrième classe, a la droite à l'infini et les droites isotropes issues de O comme tangentes stationnaires. C'est la polaire réciproque d'une cardioïde par rapport à un cercle ayant son centre au rebroussement réel.

Pour avoir les coordonnées ξ, η du point Q en fonction de celles

Fig. 1.



du point $A(x, y)$, prenons O pour origine des coordonnées rectangulaires et soit ω l'angle OAN formé par OA avec la normale AN; la figure donne

$$AQ = OA \tang\omega,$$

et, projetant la ligne brisée OAQ sur les axes,

$$\xi = x - y \operatorname{tang}\omega, \qquad \eta = y + x \operatorname{tang}\omega;$$

or, comme

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dy - y\,dx},$$

si l'on transporte les axes parallèlement au point $(-\alpha, -\beta)$ on obtient les formules

$$\xi = x - (y - \beta)\frac{(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy}{(x - \alpha)\,dy - (y - \beta)\,dx},$$

$$\eta = y + (x - \alpha)\frac{(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy}{(x - \alpha)\,dy - (y - \beta)\,dx},$$

qui expriment en fonction des coordonnées de A celles du point correspondant Q, de l'antipodaire de Γ par rapport au pôle (α, β). Celles du point P sont évidemment $\xi' = \frac{1}{2}(\xi + \alpha)$, $\eta' = \frac{1}{2}(\eta + \beta)$.

Lorsque Γ est unicursale, les dernières formules donnent sur-le-champ les équations paramétriques des courbes (P) et (Q), étant données celles de Γ. En général, les courbes (P), (Q), (N), (T) ont même *genre* que Γ, car elles sont rapportées à cette dernière courbe point par point.

Dans le cas particulier d'une conique à centre

$$\Gamma \equiv b^2x^2 + x^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

rapportée à ses axes, en posant pour abréger

$$A = \frac{c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y}{a^2b^2 - (b^2\alpha x + a^2\beta y)},$$

nous avons

$$\xi = x + A(y - \beta), \qquad \eta = y - A(x - \alpha).$$

Prenant les équations paramétriques de Γ sous la forme

$$x : y : 1 = a(1 - t^2) : 2bt : (1 + t^2),$$

on obtient, si le pôle (α, β) n'est pas sur Γ, pour ξ et η des fractions ayant même dénominateur et dont les numérateurs sont des polynomes du sixième degré en t. Pour vérifier algébriquement que l'antipodaire est du quatrième ordre, lorsque le pôle tombe sur Γ, on peut procéder comme il suit : appelant θ le paramètre du

pôle (α, β), nous avons

$$x - \alpha = -\frac{2a(t+\theta)(t-\theta)}{(1+t^2)(1+\theta^2)},$$
$$y - \beta = \frac{2b(1-\theta t)(t-\theta)}{(1+t^2)(1+\theta^2)},$$

et posant pour abréger

$$B = b^2\theta t^3 + (2a^2 - b^2)t^2 + (2a^2 - b^2)\theta t + b^2,$$

après substitution et suppression du facteur $2ab(t-\theta)$ aux deux termes de la fraction, on obtient

$$A = \frac{B}{ab(\theta - t)(1-t^2)}$$

et par suite

$$\xi = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2}{a(1+\theta^2)}\frac{(1-\theta t)B}{(1+t^2)^2},$$
$$\eta = \frac{2bt}{1+t^2} - \frac{2}{b(1+\theta^2)}\frac{(\theta+t)B}{(1+t^2)^2},$$

qui représentent bien une quartique unicursale ayant la droite à l'infini pour tangente double, etc.

Dans le cas de la parabole, les équations paramétriques sont $x = t^2$, $y = t$ et celles de son antipodaire par rapport au pôle arbitraire (α, β) :

$$\begin{aligned}\xi : \eta : 1 = {} & [-3t^4 + 4\beta t^3 - (1-\alpha)t^2 + 2\beta(1-\alpha)t - \beta^2] \\ & : (2t^5 - 4\alpha t^3 + \beta t^2 - 2\alpha(1-\alpha)t + \alpha\beta) \\ & : (-t^2 + 2t\beta - \alpha).\end{aligned}$$

Ces dernières montrent que la quintique a un point d'inflexion à l'infini, sur la perpendiculaire à l'axe de la parabole, et la droite à l'infini est la tangente stationnaire; les deux autres points impropres de la courbe correspondent aux points où la parabole va couper la polaire de (α, β), ce qui est d'ailleurs évident géométriquement.

Lorsque $\alpha = \beta = 0$ nous avons $\xi = 3t^2 + 1$, $\eta = -2t^3$, équations paramétriques de la parabole semi-cubique

$$4(\xi - 1)^3 = 27\eta^2,$$

antipodaire de la parabole conique par rapport à son sommet. S l'on prend

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \beta = 0.$$

on obtient les équations paramétriques

$$\xi = 3t^2, \qquad \eta = \frac{1}{2}t(3-4t^2)$$

de l'antipodaire de la parabole conique par rapport au foyer. L'équation cartésienne est

$$\xi(4\xi-9)^2 = 108\eta^2,$$

ou bien, prenant pour origine le foyer de la parabole,

$$4(\xi+1)^3 = 27(\xi^2+\eta^2).$$

Les trois points d'inflexion de cette cubique, dont deux sont imaginaires car le point double est un nœud, tombent sur la droite $\xi+1$; l'un d'eux est à l'infini, mais les deux autres sont placés sur les droites isotropes issues du foyer de la parabole. L'affirmation que deux points d'inflexion de la courbe sont les points cycliques (Salmon-Fiedler, *loc. cit.*, p. 239) n'est donc pas exacte.

V. Retali (Milan).

3363. (**1908**, 76) (Mehmed Nadir). — *Équation indéterminée* (**1908**, 254). — (A) (rectifiée) est

$$x^9 - y^9 = (3t-2)[3t(t^2-1)+1].$$

Le dernier facteur = Mult. $3+1 \neq 0$.

(B) multipliée par x^3-y^3 et combinée à (A) donne

(C) $$3t-2 = x^3-y^3.$$

En éliminant x^3 entre (B) et (C) on a

$$y^6+(3t-2)y^3-(t-1)^3 = 0,$$

équation en y^3 dont le discriminant $t^2(4t-3)$ doit être carré. Donc $4t-3$ est carré.

Soit

$$4t-3 = a^2.$$

On a alors

$$2y^3 = -3t+2+at,$$

d'où

$$(2y)^3 = (a-1)^3.$$

Alors (C) donne

$$(2x)^3 = (a+1)^3.$$

$y = \frac{a-1}{2}$ et $x = \frac{a+1}{2}$ sont consécutifs.

Les seules solutions sont donc celles de M. Mehmed Nadir.

DUBOUIS.

3391 (**1908**, 102) (DIAZ DE RABAGO). — *Construction de triangle* (**1908**, 214). — Autre réponse de M. *Jipé*, transmise à l'auteur de la question.

LA RÉDACTION.

3403. (**1908**, 124) (*Agnès Morri*). — *Démonstration du théorème de Pythagore* (**1908**, 216, 284). — Dans la série d'articles de J.-A. CALDERHEAD et B.-F. YANNEY, *New and old proofs of the pythagorean theorem* (*American math. Monthly*, t. III-VI (1896-1899), sont données cent démonstrations de ce théorème et une bibliographie du sujet. Les deux démonstrations mentionnées sont indiquées au Tome VI, p. 33.

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).
[D'après l'anglais. (LA RÉD.)]

3436. (**1908**, 197) (R. RAVASCO). — 1° Soit l'équation

$$v^4 + v^2 + v = 6561y^4 + \ldots + 3.$$

Faisant $y = 0$, on voit de suite que $v = 1$. Additionnant les coefficients du second membre, on trouve 10110 où l'on reconnaît aisément le polynome $10^4 + 10^2 + 10$. Donc $v = 10$, avec $y = 1$.

La substitution $y = 2$ ne donne rien, mais $y = 3$ réussit et l'on trouve alors $v = 28$.

On a ainsi trois solutions

$$y = 0, \quad 1, \quad 3.$$

L'idée se présente très directement d'essayer la récurrence

$$y_{n+1} = 3y_n + y_{n-1},$$

d'où $y_4 = 10$. Et, en effet, on trouve

$$f(10) = 91^4 + 91^2 + 91.$$

On est donc amené à essayer y_5 ou 33.

L'essai réussit et donne $v = 298$.

Si l'on cherche à mettre le polynome en y sous la forme $v^4 + v^2 + v$, on reconnaît très rapidement qu'en effet on y parvient par la substitution $v = 9y + 1$. Cette identification permet de formuler la loi de récurrence des nombres v.

On a donc

$$\begin{array}{lllllllll} y = 0, & 1, & 3, & 10, & 33, & 109, & 360, & \ldots, \\ v = 1, & 10, & 28, & 91, & 298, & 982, & 3241, & \ldots, \end{array}$$

C'est la solution complète en nombre entiers.

2° Après élimination de t, l'équation en v, y, z manque de symétrie, ce qui me fait douter si elle a été transcrite ou imprimée correctement. Ne faudrait-il pas l'écrire ainsi :

$$\Sigma(v + y)^2 - \Sigma z^2 = a,$$

avec a entier?

3° Quant à l'équation

$$3v(v^2 + 2) = x^2,$$

elle est vérifiée par les solutions immédiates

$$v = 1 \quad \text{et} \quad 2 \qquad \text{avec} \qquad x = 3 \quad \text{et} \quad 6.$$

Je crois qu'elle n'en admet pas d'autres.

D'ailleurs, il faudrait que $v^2 + 2$ fût multiple de v ou de $3v$, ce qui entraînerait la condition

$$m^2 - 8 = t^2,$$

vérifiée seulement par $m = 3$, $t = 1$, d'où

$$v = \frac{3 \pm 1}{3} = 1 \quad \text{et} \quad 2.$$

L.-N. Machaut.

3448. (**1908**, 220) (T. Lemoyne). — Pour $m = 4$, on a les quartiques binodales, courbes particulièrement remarquables, sur lesquelles Steiner a appelé l'attention dans un Mémoire extrêmement



intéressant : *Geometrische Lehrsätze* (*Cr.*, t. 32, 1846, p. 186); mais il semble que le sujet soit demeuré peu étudié (*I. M.*, quest. 1755, 1900, p. 49).

Voir aussi G. Salmon, *Courbes planes,* trad. Chemin, 1884, p. 356-357.

Pour $m = 6$, *voir* G. Halphen, *Sur les courbes planes du sixième degré à* 9 *points doubles* (*S. M.*, t. X, 1882, p. 162-172).

Voir aussi question 233 (1894, 134; 1900, 311).

Devignot.

H. Wieleitner. — *Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von* 1890-1904. Beilage zum Jahresbericht des Königl hum. Gymnasiums zu Speyer für das Schuljahr, 1904-1905. Leipzig, G.-J. Göschen, 1905.

O. Degel (Bayreuth).

3458. (1908, 222) (J. Rose). — *Complexes et congruences.* — Cette question me paraît avoir le même objet que le n° 3270 (1907, 196). Je ne crois donc pouvoir mieux dire que de renvoyer à la réponse que j'ai donnée (1909, 16).

Vieujeu.

S. Lie, G. Scheffers. — *Geometrie der Berührungstransformationen,* Leipzig, B.-G. Teubner, 1896, Abschnitt II : *Geometrie der Linienelemente des Raumes,* p. 177-480, en particulier Chap. VII : Monge'sche Gleichungen und Plücker'sche Liniencomplexe, p. 248-302.

E. Pascal. — *Repertorium der höheren Mathematik,* II. Theil, Leipzig, B.-G. Teubner, 1902, Chap. XIV : Die Liniengeometrie und die Kugelgeometrie im Raum, p. 373-423.

G. Salmon, W. Fiedler. — *Analytische Geometrie des Raumes,* II. Theil, Leipzig, B.-G. Teubner, 1880, Chap. VII : Complexe, Complex-und Singularitätenflächen, p. 476-513 et p. LVII-LX.

R. Sturm. — *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.* In 3 Teilen. Leipzig, Teubner, B.-G, 1892, 1893, 1897.

O. Degel (Bayreuth).



3459. (**1908**, 245) (T. Lemoyne). — *Spiriques à deux axes de symétrie.* — Voici des références bibliographiques à ce sujet :

Pagani. — Mémoire couronné par l'Académie de Bruxelles en 1824.

Darboux. — *Nouvelles Annales*, 1864, p. 156.

La Gournerie. — *Journal de Liouville*, 1869, p. 9.

Siebeck. — *Journal für Math.*, 1860-1861.

G. Holzmüller. — *Einführung in der Theorie der isogonalen Verwandtschaten*. Leipzig, Teubner, 1882.

Pour plus de renseignements, consulter :

G. Teixeira. — *Tratado de los curvos especiales*, ou sa *traduction* française ainsi que son Mémoire dans l'*Archiv für Mathematik und Physik*, 1907, p. 64-71.

H. Wieleitner. — *Spezielle ebene Kurven*. Göschen, 1908.

J. Rose (Chimay, Belgique).

3460. (**1908**, 245) (T. Lemoyne). — *Surfaces gauches dont la ligne de striction est une courbe de Bertrand.* — Consulter :

Darboux. — *Théorie des surfaces*, t. III, p. 314, où est indiquée une Note de Bioche, *C. R.*, 1888, p. 829.

Bianchi. — *Geometria differenziale*, t. I, p. 270; t. II, note I, p. 572.

J. Rose (Chimay).

Autre réponse de M. Dubouis.

3468. (**1908**, 270) (S. Prieto). — *Courbe.* — La courbure géodésique est la courbure de la projection de la courbe sur le plan tangent. Soient s l'arc et x, y, z, fonctions de s, les coordonnées d'un point de la courbe cherchée située sur la sphère

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

La projection du point (x, y, z) sur le plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) a pour coordonnées

$$X = x + x_0(1-\Sigma x x_0), \qquad \ldots,$$

et l'on trouve facilement que, pour $X = x_0$, $Y = y_0$, $Z = z_0$, X' et X'' se réduisent à x'_0 et $x''_0 + x_0$.

Le rayon de courbure ρ au point (X, Y, Z) est donné par

$$\rho^2 = \frac{(\Sigma X'^2)^3}{\Sigma(Y'Z''-Z'Y'')^2}.$$



En (x_0, y_0, z_0) il est égal au rayon de courbure géodésique g de la courbe sphérique, et l'on trouve

$$g^2 = \frac{1}{\Sigma x_0''^2 - 1}.$$

En supprimant l'indice zéro, et en supposant, conformément à l'énoncé,

$$g = as,$$

on est ramené à

$$\Sigma x''^2 = 1 + \frac{1}{a^2 s^2}. \tag{1}$$

Posons

$$x = \frac{1 - uv}{u - v}, \qquad y = i\frac{1 + uv}{u - v}, \qquad z = \frac{u + v}{u - v};$$

d'où

$$ds^2 = \frac{4\,du\,dv}{(u - v)^2}.$$

u et v sont des fonctions de s dont les dérivées premières et secondes seront désignées par u', v', u'', v''. L'expression de ds^2 fournit la relation

$$4u'v' = (u - v)^2.$$

D'après cela on peut poser

$$2u' = \lambda(u - v), \qquad 2v' = \frac{u - v}{\lambda}. \tag{2}$$

L'équation (1) fournit, après quelques calculs, l'équation de Riccati

$$\lambda' = \frac{\lambda^2 + 1}{2} + \varepsilon\frac{\lambda i}{as} \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{3}$$

Celle-ci ne peut s'intégrer par quadratures. En effet, en posant

$$\lambda = -2\mu - \frac{\varepsilon i}{as},$$

elle devient

$$\mu' + \mu^2 = \frac{2\varepsilon i - 1}{4a^2 s^2} - \frac{1}{4}.$$

Or (*Thèse* de M. Vessiot, p. 67) l'équation

$$\mu' + \mu^2 = \frac{b}{s^2} + c$$

ne se résout par quadratures que si b est le produit de deux entiers consécutifs.

Il résulte de là que x, y, z ne peuvent se ramener aux quadratures, car, s'ils s'y ramenaient, il en serait de même de u, v, λ.

Cela posé, soit $\lambda(s, \gamma)$ l'intégrale générale de (3), γ étant une constante arbitraire. Des équations (2) on déduit

$$\frac{2d(u-v)}{ds} = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)(u-v),$$

d'où, k étant une constante arbitraire,

$$u - v = k\varphi(s, \gamma).$$

Alors les équations (2) donnent, α et β étant deux constantes arbitraires,

$$u = k[\psi(s) + \alpha], \qquad v = k[\theta(s) + \beta].$$

On sait qu'une même transformation homographique faite sur u et v ne change pas la forme de la courbe sphérique. On peut donc se borner à prendre

$$u = \psi, \qquad v = \theta + h.$$

Finalement les courbes dépendent de deux paramètres arbitraires γ et h.

Posons

$$\lambda = P + Qi.$$

Si x, y, z sont réels on trouve

$$-P = \frac{d}{ds}L(1-z), \qquad Q = (1+z)\frac{d}{ds}\text{arc tang}\frac{y}{x}.$$

Donc, d'une solution $P + Qi$ de l'équation de Riccati on conclut

$$z = 1 - me^{\int -P ds}, \qquad \text{arc tang}\frac{y}{x} = \int \frac{Q\,ds}{2 - me^{\int -P ds}} \qquad (m = \text{const.}).$$

E. Dubouis.

3476. (**1908**, 274) (W. Gaedecke). — *Travaux sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.* — Voir :

G. Darboux. — *Sur une classe remarquable de courbes et de*

surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires, second tirage, Paris, A. Hermann, 1896.

K. DOEHLEMANN. — *Geometrische Transformationen*, II. Teil, Leipzig, G.-J. Göschen, Sammlung Schubert, XXVIII, 1908.

E. PASCAL. — *Repertorium der höheren Mathematik*, II. Theil. Leipzig, B.-G. Teubner, 1902, Kap. XII, § 7, p. 321-328.

G. SALMON, W. FIEDLER. — *Analytische Geometrie des Raumes*, II. Theil, Leipzig, B.-G. Teubner, 1880, p. 448-464 et p. LV-LVI.

M. SCHILLING. — *Catalog mathematischer Modelle*, 6. Aufl., Halle a. S., 1903, p. 11, 21-22, 90-92.

O. DEGEL (Bayreuth).

3477. (**1908**, 274) (W. GAEDECKE). — *Équation aux dérivées partielles.* — Le système

$$\frac{dx}{2z^4} = \frac{dy}{5xy} = \frac{dz}{5xz}$$

admet les intégrales

$$\frac{z}{y} = \text{const.}, \qquad z^4 - 5x^2 = \text{const.}$$

L'intégrale cherchée est donc

$$z^4 - 5x^2 = f\left(\frac{z}{y}\right).$$

E. DUBOUIS.

Même réponse de MM. H. BROCARD, O. DEGEL (Bayreuth), *Hix*, E. LEFÈVRE (Bruxelles).

3478. (**1908**, 274) (W. GAEDECKE). — *Intégrale elliptique.* — Déterminer la valeur de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{ax^2+b}{\sqrt{x^4+1}}\,dx.$$

Cette intégrale peut s'écrire

$$I = \int \frac{ax^2+b}{\sqrt{4x^2[(x^2)^2+1]}}\,d(x^2);$$

d'où, en posant

$$x^2 = p(u) \qquad (g_2 = -4, \; g_3 = 0),$$
$$I = \int [a\,p(u) + b]\,du = bu - a\,\zeta(u).$$

DUBOUIS, P. HENDLÉ.

3480. (**1908**, 274) (W. GAEDECKE). — *Équation intrinsèque.* — Pour préciser le signe du rayon de courbure ρ, je supposerai $\lambda > 0$ et je considérerai ce rayon comme positif quand le point qui décrit la courbe tourne dans le sens positif lorsque φ croît. Posons $e^{\lambda\varphi} = t$. On a

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\varphi^2} = \frac{2\sqrt{\Delta}\,dt}{\lambda(\mu + t^2)^2},$$
$$\Delta = (1+\lambda^2)t^4 + 2\mu(1-\lambda^2)t^2 + \mu^2(1+\lambda^2);$$

$\sqrt{\Delta}$ étant pris positivement, s croît avec t et φ.

Soit α l'angle que la demi-tangente aux arcs croissants fait avec le demi-axe polaire positif, et soit

$$V = \alpha - \varphi.$$

On a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}, \qquad \operatorname{tang} V = \frac{r\,d\varphi}{dr},$$
$$d\alpha = d\varphi + dV = \frac{(1+\lambda^2)(\mu + t^2)^2\,dt}{\lambda t \Delta},$$
$$\rho = \frac{2t\Delta^{\frac{3}{2}}}{(1+\lambda^2)(\mu + t^2)^4};$$

s est en fonction de ρ une intégrale abélienne :

$$s = \int \varphi(t)\,d\rho.$$

On pourra exprimer s et ρ en fonction d'un paramètre en utilisant par exemple les fonctions de Weierstrass dont les invariants sont

$$g_2 = \frac{4\mu^2(\lambda^4 + \lambda^2 + 1)}{3(\lambda^2+1)^2}, \qquad g_3 = -\frac{4\mu^3(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2)(2\lambda^2 + 1)}{27(\lambda^2+1)^3},$$

et l'on a

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p'u}{pu - c},$$

en posant

$$e=\frac{\mu(\lambda^2-1)}{3(\lambda^2+1)}.$$

Les expressions définitives semblent compliquées.

E. Dubouis.

3481. (**1908**, 275) (W. Gardecke). — *Lieux géométriques.* — P et Q étant les points de rencontre des axes de l'ellipse avec la droite passant par M et telle que

$$PM=a, \qquad MQ=b,$$

O le centre de l'ellipse, R le quatrième sommet du rectangle OPQR, la normale en M passe par R et les triangles semblables MPR, MQN, MQR, MPN' donnent

$$\frac{RM}{ab}=\frac{MN}{b^2}=\frac{MN'}{a^2}=\frac{NN'}{c^2}=\frac{NN_1}{\frac{c^2}{2}}.$$

Si par N_1 on mène une droite P'Q' dont la direction soit symétrique de celle de PQ par rapport aux axes, on a

$$N_1P'=\frac{c^2}{2a}, \qquad N_1Q'=\frac{c^2}{2b}.$$

Par suite, N_1 décrit une ellipse ayant pour longueurs d'axes

$$\frac{c^2}{a} \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{b},$$

et la tangente en N_1 à cette ellipse coupe les axes en des points θ et θ' dont les distances au centre O sont respectivement à OT et OT dans les rapports

$$\frac{c^2}{2a^2} \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{2b^2}.$$

Cela résulte de la correspondance homographique existant entre les positions simultanées des points M et N_1, mais peut encore se déduire simplement de ce que les deux ellipses sont semblables, directement et aussi *inversement,* de sorte que, les directions de ON_1 et de TT' étant antiparallèles par rapport aux axes, il en est de

même des directions de $\theta\theta'$ et de OM qui leur sont respectivement conjuguées dans l'une ou l'autre des ellipses.

La transversale $\theta\theta'$, divisant les côtés OT, OT' du triangle OTT' dans le rapport $\frac{c^2}{a^2+b^2}$, le premier intérieurement, le second extérieurement, passe par le milieu T_1 de TT', ce qui démontre (1°).

Quant à (2°), il suffit pour l'établir de remarquer que le cercle de diamètre NN' et la tangente TT' à la première conique sont des figures inverses l'une de l'autre, O étant le pôle et c^2 le paramètre de transformation.

WELSCH.

3503. (**1909**, 5) (G. RÉMOUNDOS). — *Fonctions méromorphes.* — 1° Si $f(x,y)=0$ représente une courbe de genre $\geqq 2$, il n'existe pas de couples de fonctions qui, mises à la place de x et de y, vérifient cette équation (c'est un théorème démontré par M. Picard). [*Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique* (*Acta mathematica*, t. XI, 1888, p. 1-12)].

2° Si $f(x,y)=0$ représente une courbe de genre zéro, on peut exprimer x et y en fonction rationnelle d'un paramètre t et cela de manière que la représentation soit *propre;* t, étant alors fonction rationnelle de x et de y, devra être une fonction méromorphe de z (fonction méromorphe d'ailleurs arbitraire).

La solution est donc évidente.

3° Si $f(x,y)=0$ représente une courbe de genre 1, cette courbe correspond point par point d'une manière birationnelle à la cubique

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

qu'on représente paramétriquement par

$$x=p(u),\qquad y=p'(u)$$

[$p(u)$ étant la fonction de Weierstrass].

On est donc ramené à chercher des fonctions méromorphes $F_1(z)$, $F_2(z)$ telles que

$$x=p(u)=F_1(z),$$
$$y=p'(u)=F_2(z).$$

Posons

$$u = \Psi(z).$$

La première équation différentiée donne

$$p'(u)\Psi'(z) = F'_1(z);$$

c'est-à-dire

$$\Psi'(z) = \frac{F'_1(z)}{F_1(z)}.$$

Donc $\Psi'(z)$ est une fonction méromorphe et $\Psi(z)$ est une fonction analytique n'ayant comme singularités possibles à distance finie que des pôles ou des points logarithmiques.

Or, si $\Psi(z)$ possédait un point logarithmique ou un pôle $z = z_0$, en faisant décrire à z un chemin aboutissant en ce point, le point $u = \Psi(z)$ s'éloignerait à l'infini suivant une ligne continue et le point *congruent* à u (dans un parallélogramme de périodes choisi une fois pour toutes) (¹) ne tendrait vers aucune limite. Donc

$$p(u) = F_1(z)$$

serait indéterminée en ce point, ce qui est contraire à l'hypothèse que F_1 est méromorphe.

On voit donc que $\Psi(z)$ est holomorphe en tout point à distance finie, c'est donc une fonction entière.

Conclusion. — Si $f(x, y) = 0$ est de genre 1, on exprimera les coordonnées x et y par des fonctions elliptiques de mêmes périodes, de manière qu'à un point de la courbe corresponde un seul point du parallélogramme des périodes, et l'on remplacera l'argument u des fonctions elliptiques ainsi obtenues par une fonction entière arbitraire de z.

P. Fatou.

(¹) En appelant *point congruent* à u le point u_1 de ce parallélogramme tel que $u_1 - u =$ période.

QUESTIONS.

3533. (Σ) *Sur certaines constantes arithmétiques.* — Soient N un nombre de n chiffres, N_1 le nombre renversé. On forme la différence positive

$$\pm(N - N_1) = N_2.$$

Soit N_3 le nombre N_2 renversé. On fait la somme

$$N_2 + N_3 = N_4.$$

Pour un nombre N quelconque, n étant donné, il n'y a qu'un nombre relativement très petit de nombres tels que N_4. Ce sont des constantes dont il serait intéressant de déterminer le nombre et de voir la loi de formation.

Ainsi, pour un nombre de 2 chiffres, $N_4 = 0$ ou 99,
» 3 » $N_4 = 0$ ou 1089,
» 4 » on trouve 5 valeurs
de N_4, etc.

E.-N. Barisien.

Même question pour un système de numération de base quelconque.

E. Maillet.

3534. [**K 1 c**] Je désirerais connaître la construction la plus simple de la Philo's Line. *Voir* **1782** (**1900**, 82; **1902**, 299).

G. Lemaire
(Saïgon, Cochinchine).

3535. [**M¹4**] Quelles sont les principales propriétés des courbes bicursales ? Je demande en même temps la bibliographie de ces courbes, à l'exception des deux études suivantes :

A. Cayley. — *On bicursal curves* (*Proc. London Math. Soc.*, t. IV, 1871-1873);

W.-R.-W. Roberts (*Proc. Roy. Irish Acad.*, 3e série, t. VIII, 1902-1903, p. 53-58). T. Lemoyne.

3536. **[O3j]** Je demande la bibliographie des études faites sur les courbes à courbure constante ainsi que les principales propriétés de ces courbes. T. Lemoyne.

3537. **[O2qα]** On a le théorème bien connu :

Étant donnée une ellipse de demi-axes a et 2a, le cercle ayant pour diamètre une demi-corde parallèle au grand axe enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements (*voir* question 2104, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1908, p. 479).

Je désire connaître l'enveloppe des cercles analogues quand on remplace l'ellipse par ses podaires (Fusspunktcurven) successives relatives au centre.

Calculer l'aire de ces courbes.

W. Gaedecke (Berlin).

[D'après l'allemand. (La Réd.)]

3538. **[D4]** On considère la fonction $f(x)$ (entière) définie par la série de polynomes

$$B_0 + B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots,$$

où

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -x, \qquad n^2 B_n = x(B_{n-1} + B_{n-2});$$

la série $B_0 + B_1\rho + \ldots + B_n\rho^n + \ldots$ vérifie, pour $\rho = 1$, la condition

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dy}{d\rho}\right) = x(1+\rho)y.$$

Je demande une méthode simple pour calculer numériquement de proche en proche les racines positives de l'équation $f(x) = 0$ (supposées rangées par ordre de grandeur croissante).

Je désirerais connaître également les principales propriétés

analytiques de cette fonction, par exemple au point de vue du genre, de la croissance, etc. L. Bloch.

3539. [**O2**] Quand on connaît l'aire et le périmètre d'une courbe C, peut-on obtenir l'aire et le périmètre d'une courbe parallèle à C, et par quelles formules? *Crut.*

3540. [**L¹15**] J'ai trouvé la propriété suivante, qui doit avoir une explication géométrique :

D'un point M *variable d'un cercle* C *concentrique à une ellipse* E *on mène à* E *les tangentes dont les points de contact sont* T *et* T'. *On considère la parabole* P *tangente en* T *et* T' *à* TM *et* T'M. *Le lieu du sommet de* P *coïncide avec l'enveloppe de sa tangente au sommet.*

Onponale.

3541. [**V10**] Dans le numéro d'octobre 1908 (p. 218), M. H. Brocard et la Rédaction de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* publient un concours pour un prix de l'Académie royale des Sciences exactes, physiques et naturelles de Madrid, sans indiquer les conditions de ce concours.

Je ne les ai pas non plus trouvées mentionnées à la page 4 de l'année 1908 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* page à laquelle la note en question renvoie le lecteur.

Je désirerais le plus tôt possible connaître les conditions exactes de ce concours.

L.-Gustave du Pasquier (Zurich).

3542. [**A1b**] M. W.-Fr. Meyer, de Königsberg i. P., a indiqué une remarquable identité dans les *Archiv der Math. u. Physik,* 3ᵉ série, Bd. XIII, 1908, p. 363 :

Si

$$x_n = x(x+a)(x+2a)\ldots[x+(n-1)a],$$

on a

$$x_n - \binom{n}{1} x_{n-1}x_1 + \binom{n}{2} x_{n-2}x_2 - \ldots + \ldots + x_n$$
$$= (2a)^l.1.3.5\ldots(2l-1)x_l,$$

quand $n = 2l$.

Il me semble probable que, si

$$\overset{+}{x}_n = x(x+a)(x+2a)\ldots[x+(n-1)a]$$

et

$$\overset{-}{x}_n = x(x-a)(x-2a)\ldots[x-(n-1)a],$$

la quantité

$$\overset{+}{x}_n + \binom{n}{1}\overset{+}{x}_{n-1}\overset{-}{x}_1 + \binom{n}{2}\overset{+}{x}_{n-2}\overset{-}{x}_2 + \ldots + \overset{-}{x}_n$$

est une fonction de x^2.

Cette assertion est-elle exacte? Quelle est l'expression de cette fonction de x^2?

Peut-on généraliser? Y a-t-il des relations analogues?

T. Hayashi (Tokyo, Japon.)
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3543. [I19] Résoudre en nombres entiers l'équation

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{2} = \frac{\mathfrak{E}^2}{T^2},$$

où $\mathfrak{E}$ et T sont deux nombres rectangulaires.

Je possède les formules qui satisfont à la proposée, si l'un des trois nombres x, y, z est égal à l'unité.

Mehmed-Nadir (Constantinople).

3544. [K8] Soient un losange ABCD et des points quelconques E, G pris sur le prolongement de la diagonale AC et F, H sur le prolongement de la diagonale BD. Soient :

K le point d'intersection de BE et AF;
L le point d'intersection de BG et CF;
M le point d'intersection de DG et CH;
N le point d'intersection de DE et AH.

Le quadrilatère KLMN est-il inscriptible dans un cercle?

G. Russo (Catanzaro).
[D'après l'italien. (La Réd.)]

RÉPONSES.

2345. (**1902**, 116) (C. Wargny). — Il n'existe pas de traduction française de l'*Histoire des Mathématiques* de M. Cantor.

Je crois qu'il n'y en a pas non plus de traduction anglaise.

Dr Charbonier.

2990. (**1905**, 272) (E. Maillet). — *Distinction de deux classes d'entiers algébriques réels.* — Je crois que les éléments d'une réponse affirmative sont exposés dans l'Ouvrage de K. Hensel, *Theorie der algebraischen Zahlen* (1908), analysé au *B. D.*, 1909, p. 10-20. *Devignot.*

3123. (**1906**, 260) (G. Lemaire). — (**1907**, 112, 278). — Au lieu d'imposer la condition qu'un des nombres $N-1$, N, $N+1$ soit multiple de 50, il sera plus correct de l'assigner à un des nombres $N-1$ et $N+1$, car il ne suffirait pas que ce fût le nombre N, les deux autres $N+1$ et $N-1$ étant alors impairs.

H. Brocard.

3333. (**1908**, 28) (*Zed*). — *Notion d'aire.* — Un souvenir de mes études classiques me permettra de répondre avec précision à la partie philosophique de l'énoncé.

Il y a 45 ans, lorsque je me présentai, bien imprudemment, à l'École Normale, section des Sciences, les candidats eurent à traiter, comme dissertation française, le sujet suivant, devant lequel je restai bien embarrassé, mais dont le texte est demeuré gravé dans ma mémoire : « Des notions et vérités premières dont l'ensemble constitue la raison. »

La Philosophie était, à ce moment, une des matières que j'ignorais profondément; mais, bientôt, j'appris que les notions premières, visées dans la question, étaient, par exemple : Je pense, donc je suis; le tout est plus grand que la partie; les axiomes de la Géométrie; etc.

Voilà comment je puis, aujourd'hui, saisir le sens caché de ces mots : *notion première*.

Si donc la notion d'aire n'est pas de cette catégorie, cela veut dire, plus prosaïquement, qu'elle n'est pas de la nature d'un axiome, et qu'il est indispensable de la définir et de la démontrer. A cet égard, le lecteur pourra sans doute en trouver la discussion mathématique dans la Thèse de M. Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire* (voir *B. D.*, 1re Partie, 1903, p. 58-61). *E. Liminon.*

3343. (**1908**, 51) (E. Dubouis). — (**1908**, 188, 203). — D'après Lebesgue (*N. A.*, 1856, p. 132) et d'après H. Laurent (*Théorie des nombres ordinaires et algébriques*, 1904, p. 105), la traduction citée du Mémoire de Lejeune-Dirichlet est de Terquem.

Il est bon de le rappeler, car les Tables du *Journal de Mathématiques* ne le spécifient pas, tandis que les traductions d'autres Mémoires du même géomètre, par J. Hoüel, sont formellement indiquées.

Le Mémoire de 1903 de M. Landau mentionné (*loc. cit.*) n'a pas été traduit en français, mais nous saisissons avec empressement l'occasion de signaler ici un tout récent travail de M. Landau (*A. E. N.*, 1908, p. 399-442) intitulé : *Nouvelle démonstration pour la formule de Riemann sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée et démonstration d'une formule plus générale pour le cas des nombres premiers d'une progression arithmétique.*

Une rédaction, en allemand, de la première Partie a été publiée aux *Sitz. d. könig. preuss. Akad. d. Wissensch. z. Berlin*, 1908, p. 737-745. *Vieujeu.*

3395. (**1908**, 121) (W. Gaedecke). — (**1908**, 215). — A la liste donnée (*loc. cit.*) il convient d'ajouter deux Notes, particulièrement importantes, de S. Spitzer, sur l'intégration des équations de la forme

$$x^m \frac{d^n y}{dx^n} = ay,$$

a entier (*C. R.*, t. XLVIII, 1859, p. 746-752 et 995-998). L'auteur cite Kummer et J. Liouville (*J. E. P.*, t. XV, 24e Cahier, 1835).

L.-N. Machaut.

3403 (**1908**, 124) (*Agnès Morri*). — *Théorème de Pythagore* (**1908**, 216, 284; **1909**, 62). — L'article de A. Marre (*B. Bon.*, 1887, p. 404) est intitulé : *Théorème du carré de l'hypoténuse;* en voici quelques extraits :

M. Charles Whish a extrait du *sastra* sanscrit intitulé : *Youcti Bâcha,* une démonstration du théorème du carré de l'hypoténuse qui, suivant lui, a pu être celle connue par Pythagore.

Colebrooke, le célèbre traducteur de Brahmagupta et de Bhascara-Acharya, a fait connaître en Europe une autre démonstration fort ingénieuse, laquelle est fondée sur le développement du carré de $(a - b)$. Elle se trouve dans le *Bija-Ganita,* § 146, Traité d'Algèbre, par Bhascara-Acharya.

La connaissance de cette démonstration amenait naturellement à en chercher une nouvelle, en s'aidant du développement de $(a + b)^2$.

Saunderson, le mathématicien aveugle de Cambridge, a imaginé une démonstration qui tient à la fois des deux précédentes.

Un géomètre anglais du XVIIIe siècle a proposé encore une autre démonstration.

Les Hindous démontraient aussi le théorème en s'appuyant sur la similitude du triangle rectangle proposé avec chacun de ceux de même nature formés par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit. On rencontre dans le *Bija-Ganita* ce genre de démonstration, employé plus tard par Wallis (Chap. VI, *De sectionibus angularibus*).

Enfin, si l'on voulait employer la proportionnalité des côtés homologues dans les triangles semblables et la relation

$$(c - a)(c + a) = c^2 - a^2,$$

il n'y aurait qu'à tracer un cercle sur le côté a du triangle rectangle pour rayon. Le côté b serait tangent au cercle et, par suite, moyenne proportionnelle entre la sécante entière $(c + a)$ et la partie extérieure $(c - a)$.

L'article de trois pages comporte 5 figures. Il est daté de Paris, le 16 mars 1887.

P.-S. — Je suis à la disposition de M. *Agnès Morri* s'il désire copie des figures. A. GÉRARDIN.

3406. (**1908**, 125) (WERBBRUSOW). — *Identités* (**1908**, 261). — La

première formule est en défaut par exemple pour $n = 9, x = y = z = 1$. Elle est exacte, si n est premier impair. En effet, dans ce cas, les coefficients du développement de

$$\frac{(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n}{n}$$

sont entiers. On a ainsi un polynome divisible par $x+y$, $y+z$, $z+x$.

Le quotient par $x+y$ est à coefficients entiers. Il en est de même du quotient de ce quotient par $x+z$ et ainsi de suite, ce qui démontre la proposition.

La seconde formule a été donnée dans l'*Éducation mathématique* (1899, p. 16).

E. Dubouis.

Réponse analogue de M. E.-B. Escott.

3407. (**1908**, 125) (*Onponale*). — *Séries* (**1908**, 262). — Autres réponses de MM. E.-B. Escott, Mathieu et Welsch, transmises à M. *Onponale*.

La Rédaction.

3409. (**1908**, 126). (*Anonyme*). — *Nombres premiers* (**1909**, 285). — A chaque décomposition d'un nombre impair p en un produit de deux facteurs correspond une décomposition de ce nombre en une différence de deux carrés, dont le plus petit est le carré de la demi-différence des deux facteurs $\frac{d}{2}$.

Si les facteurs sont inégaux et différents de l'unité,

$$d \text{ est } < \frac{p-1}{2};$$

si l'un des facteurs est 1,

$$d = \frac{p-1}{2};$$

si les deux facteurs sont égaux,

$$d = 0.$$

Le théorème est donc correct si l'on ajoute la condition que p est un nombre impair non carré.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.), Nazarewsky (Kharkov), Welsch.

Autres réponses de MM. Brocard et Jolivald.

3413. (**1908**, 148) (G. Lemaire). — ***Point lié au quadrilatère*** (**1908**, 285). — **Réponse de M. G. Quijano, transmise à l'auteur.**

La Rédaction.

3416. (**1908**, 171) (*Agnès Morri*). — ***Rectangle maximum*** (**1908**, 286). — **Réponses de MM. C. Orlandi et G. Quijano, transmises à l'auteur de la question.**

La Rédaction.

3417. (**1908**, 171) (*Agnès Morri*). — ***Courbe algébrique.*** — **Je crois bien que la question gagnerait à être présentée autrement, en y indiquant la description de la courbe. En effet, pour une foule de courbes, leur description fait ressortir les principales propriétés géométriques, beaucoup mieux que la connaissance de leurs équations, surtout lorsque ces dernières renferment des irrationnelles qui, dans la transformation en polynome entier, introduisent des facteurs étrangers surélevant inutilement le degré de la courbe.** ***Recta.***

3420. (**1908**, 172) et 3439 (**1908**, 198) (E. Dubouis). — ***Diviseurs d'une forme*** $x^2 - ay^2$. — Les diviseurs premiers de la forme (excepté ceux de a) sont compris dans un nombre fini de formes linéaires. Des Tables de ces diviseurs jusqu'à $a = 200$ se trouvent dans Tchebycheff, *Theorie der Congruenzen*, et Cahen, *Théorie des nombres*. Pour la méthode qui permet de les obtenir, *voir* Cahen, p. 130, ou Lejeune-Dirichlet, *Zahlentheorie*, p. 121-127.

Les Tables de Legendre contiennent des inadvertances. *Voir* A. Cayley, *Report on mathematical Tables*, art. 42 (*R. B. A.*, 1875, ou *Coll. math. Papers*).

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

Autre réponse de M. E. Ferrari (Pavie).

3423. (**1908**, 193) (U. Bini). — Posons

$$x + y + z = p, \qquad xy + yz + zx = q,$$
$$xyz = r, \qquad x^3 + y^3 + z^3 = s.$$

On a

$$s = p^3 - 3pq + 3r.$$

Si l'on n'a pas

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = w,$$

ou un système d'égalités analogue, p est nul; en effet, si $p \neq 0$, q serait connu, au moyen de p, r, s, par l'égalité précédente, et x, y, z seraient bien déterminés par l'équation

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0.$$

Il est facile de voir maintenant que le problème se réduit à résoudre

$$(1) \qquad xy(x+y) = uv(u+v).$$

DUBOUIS, MATHIEU.

Réponse en partie analogue de MM. E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.), C. ORLANDI (Palerme), G. QUIJANO (Xérès).

M. Mathieu mentionne encore les deux systèmes de solutions suivantes de l'équation (1):

$$(1^\circ) \quad \begin{cases} x = 9p^2q + 6pq - 6p^2 - 5p + q - 1, \\ y = 9pq^2 - 6pq + 6q^2 + p - 5q + 1, \\ u = 9p^2q + 12pq - 3p^2 - 5p + 4q - 2, \\ v = 9pq^2 - 12pq + 3q^2 + 4p - 5q + 2; \end{cases}$$

$$(2^\circ) \quad \begin{cases} x = -p^2q + 2pq^2 - 2pq + q^2 - q, \\ y = -q^2p + 2p^2q + 2pq - p^2 - p, \\ u = -p^2q + 2pq^2 - 4pq + p^2 + q^2 + 2p - 2q + 1, \\ v = -pq^2 + 2p^2q + 4pq + p^2 - q^2 - 2p + 2q - 1, \end{cases}$$

où p et q sont des entiers quelconques.

MATHIEU.

Autre réponse de M. F. FERRARI (Pavie).

A propos des questions 3423 à 3427, M. Ferrari indique d'autres résultats de même nature obtenus par lui et se met à la disposition de M. U. Bini pour lui communiquer sa méthode. La Note corrélative de M. Ferrari a été transmise à M. U. Bini.

M. Bini signale aussi les solutions suivantes de l'équation (1):

$$x = b(d^2c - a^2b), \qquad y = a(b^2a - c^2d),$$
$$u = c(d^2c - a^2b), \qquad v = d(b^2a - c^2d).$$

3427 (1908, 193) (U. BINI). — *Équation indéterminée.* — Les formules que j'ai trouvées et les méthodes qui m'y ont conduit sont trop compliquées pour être exposées ici; mais voici quelques résul-

tats :

$$1^4+2^4+9^4=3^4+7^4+8^4, \qquad 1^4+9^4+10^4=5^4+6^4+11^4;$$
$$2^4+4^4+7^4=3^4+2.6^4, \qquad 6^4+9^4+12^4=13^4+2.2^4;$$
$$3^4+5^4+8^4=2.7^4, \qquad 7^4+8^4+15^4=2.13^4.$$

Pour la résolution de l'équation

$$x^4+y^4+z^4=2v^4,$$

on peut noter l'identité suivante :

$$(a^2+2ac-2bc-b^2)^4+(b^2-2ab-2ac-c^2)^4$$
$$+(c^2+2ab+2bc-a^2)^4$$
$$=2(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)^4.$$

F. FERRARI (Pavie)

[D'après l'italien (LA RÉD.)]

Autre réponse de M. U. BINI (Rome) qui signale en particulier l'identité :

$$[a(d+c)-b(c-3d)]^4+[2(bc-ad)]^4+[a(d-c)-b(c-3d)]^4$$
$$=[a(d-c)+b(c+3d)]^4+[2(ad+bc)]^4+[a(c+d)+b(c-3d)]^4.$$

3429. (**1908**, 194) (G. QUIJANO). — *Table de nombres premiers* (**1909**, 43). — J'ai reçu des informations de bonne source et je puis assurer que :

1° L'Ouvrage est maintenant sous presse ;

2° La Table comprend les 10 premiers millions;

3° 600 exemplaires seulement doivent être tirés.

G.-A. L'HOMMEDÉ (Los Angeles, Californie).

3436. (**1908**, 197) (R. RAVASCO). — *Équations indéterminées* (**1909**, 62). — 1° L'équation peut s'écrire, en posant $9y=z$,

$$v^4+v^2+v=z^4+3z^3+7z^2+7z+3.$$

Soit

$$z=v-a.$$

Si $v=a$, $z=0$, on a

$$a=1 \qquad \text{et} \qquad v=1.$$

Si $a=0$, $z=v=-1$.

2° $v^3+y^3+z^3-t^2=0$; v, y, z peuvent être remplacés par av',

ay', az', où v', y', z' sont arbitraires et a choisi tel que

$$a^2(v'^2 + y'^2 + z'^2)$$

soit un carré.

Exemple : Soient $v' = 2$, $y' = 3$, $z' = 4$;

$$2^2 + 3^2 + 4^2 = 99, \qquad a = 11.$$

On a

$$22^2 + 33^2 + 44^2 = 3^2.11^4 = 363^2.$$

3° $3v(v^2 + 2) = x^2$; v et $v^2 + 2$ ne peuvent avoir d'autre facteur commun que 2. On ne peut donc rencontrer que les cas suivants :

1° $\quad v = r^2, \quad v^2 + 2 = 3s^2;$

2° $\quad v = 3r^2, \quad v^2 + 2 = s^2,$

ce qui est impossible puisque $s^2 - v^2 \neq 2$;

3° $\quad v = 2r^2, \quad v^2 + 2 = 6s^2;$

4° $\quad v = 6r^2, \quad v^2 + 2 = 2s^2.$

Dans le premier cas, éliminant v, $r^4 - 3s^2 = -2$, ce qui n'a probablement que la solution

$$r = 1, \qquad s = 1, \qquad v = 1;$$

dans le troisième cas, je trouve seulement

$$r = 1, \qquad s = 1, \qquad v = 2;$$

dans le quatrième cas, je trouve deux solutions :

$$r = 2, \qquad s = 17, \qquad v = 24;$$
$$r = 0, \qquad s = 1, \qquad v = 0.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor., Mich.).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

1° L'équation est équivalente au système

$$v^4 + v^2 + v = w^4 + w^2 + w,$$
$$w = 9y + 1;$$

mais la première de ces égalités ne peut être vérifiée en nombres entiers que par $v = w$.

En effet, on aurait

$$(v^4 - w^4) + (v^2 - w^2) + (v - w)$$
$$= (v - w)[(v + w)(v^2 + w^2 + 1) + 1] = 0;$$

donc

$$v = 9y + 1.$$

3° $3v(v^2 + 2)$ n'est un carré parfait que pour $v = 1$ et pour $v = 2$, parce que v et $v^2 + 2$ ne peuvent avoir d'autres facteurs communs que 1 ou 2.

G. Quijano (Xérès).

La première équation admet la solution

$$v = 9y + 1.$$

Pour la deuxième, citons la formule de Catalan déduite de l'équation de la *toroïde* (*N. C.*, **1875**, p. 132) et généralisée par Ed. Lucas (*B. Bon.*, **1877**, p. 176) :

$$(a^4 + 2ab^3)^3 + (b^4 + 2a^3b)^3 + (3a^2b^2)^3 - (a^6 + 7a^3b^3 + b^6)^2 = 0.$$

J'ai donné aussi (*S. Œ.*, sept. 1906, p. 92) la solution suivante de $x^6 + y^3 = a^6 + b^3$:

$$[g(g^3 \pm 9f^3)]^3 + (3f^2)^6 = [3f(3f^3 \pm g^3)]^3 + (g^2)^6,$$

d'où nous tirons deux nouvelles formules générales de résolution pour $v^3 + y^3 + z^3 - t^2 = 0$.

Faisons

$$g = 3f + 1$$
$$v = 9f^4, \quad y = (3f + 1)(18f^3 + 27f^2 + 9f + 1),$$
$$z = 3f(24f^3 + 27f^2 + 9f + 1), \quad t = (3f + 1)^6.$$

Si $g = 3f + 2$, on aura

$$v = 9f^4, \quad y = (3f + 2)(18f^3 + 54f^2 + 36f + 8),$$
$$z = 3f(24f^3 + 54f^2 + 36f + 8), \quad t = (3f + 2)^6.$$

Voir aussi 3129, **1907**, 112; **1908**, 136, 233.

A. Gérardin.

3439. (**1908**, 198) (E. Dubouis). — *Diviseurs d'une forme* $x^2 - ay^2$. — *Voir* ma réponse à 3420 (**1909**, 81).

E.-B. Escott (Ann Arbor. Mich.).

3451. (**1908**, 221) (E. Dubouis). — *Congruence*. — Écrivons

l'équation proposée sous la forme

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p = ma.$$

La question revient à chercher pour quelles valeurs de n et de p la somme Σ des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres est multiple de tel nombre donné a, premier ou non.

Des formules connues représentent la somme Σ. Leur degré est $p+1$. Le problème cesse donc bientôt d'être abordable par l'analyse et il est douteux qu'on parvienne aisément à des formules algébriques.

Sur l'expression de Σ on voit que Σ est multiple de $n^2(n+1)^2$ pour p impair, et multiple de $n(n+1)(2n+1)$ pour p pair. *Voir* 3007 (**1906**, 33, 133; **1908**, 104) et 3376 (**1908**, 97). Des solutions pourront donc se trouver et devront être cherchées parmi les valeurs de n, $n+1$ et $2n+1$ multiples de a, selon le cas. Ensuite, on aura à résoudre ou à étudier des équations telles que les suivantes :

$$\begin{aligned}
p &= 4, & 3n^2 & & +3n-1 &= 30\,ma,\\
p &= 5, & 2n^2 & & +2n-1 &= 12\,ma,\\
p &= 6, & 3n^4+6n^3 & & -3n+1 &= 42\,ma,\\
p &= 7, & 3n^4+6n^3 &- n^2 & -4n+2 &= 24\,ma.
\end{aligned}$$

Ces nouvelles équations sont toujours de degré pair, mais, passé le quatrième, le problème est trop compliqué pour être approfondi.

Pour $p=4$ et $p=5$, on aura les discriminants

$$\begin{aligned}
360\,ma + 21 &= t^2,\\
24\,ma + 3 &= u^2,
\end{aligned}$$

dont l'étude paraît pouvoir s'achever aisément.

En se servant des Tables des dix premières puissances des nombres de 1 à 100, on obtiendra, par essai direct, quelques solutions assez rapides, où l'on reconnaîtra quelques indices d'une périodicité qui pourra fort bien se présenter aussi pour d'autres valeurs de p, notamment pour celles qui produiront les mêmes chiffres terminaux des puissances $p^{\text{ièmes}}$ (propriété connue).

Pour les premières valeurs de a, n et p, l'équation donnée admettra parfois des solutions immédiates.

Ainsi, pour $a=2$, la solution est n impair >1 (p quelconque).

Pour $a=3$, la solution est $n=3t$ et $n=3t-1$ (p quelconque).



Pour $a = 5$, la question est aisée à résoudre. En effet, on aura

$$\sum_1^n n^p = 5m,$$

pour les valeurs de cette somme terminée par o ou par 5. Or, pour chaque valeur donnée de p, les chiffres terminaux forment une suite périodique. Supposons $p = 3$. La période sera

$$1\ 8\ 7\ 4\ 5\ 6\ 3\ 2\ 9\ 0.$$

La somme des quatre premiers termes est 20; puis, celle des cinq suivants, 25, et ainsi de suite.

Les valeurs de n seront donc

$$n = 4,\ 9,\ 10,\ 14,\ 19,\ 20,\ \ldots$$

ou

$$n = 10t + 4, \qquad 10t, \qquad 10t - 1 \qquad (a = 5).$$

Mêmes valeurs de n pour $p = 7$, parce que la période est identique.

Si maintenant $p = 5$, ou 9, on aura la suite

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 0,$$

d'où

$$n = 4,\ 5,\ 9,\ 10,\ 14,\ 15,\ 19,\ \ldots$$

ou

$$n = 5t, \qquad 5t - 1 \qquad (a = 5).$$

Soit encore $p = 4$. On aura la suite

$$1\ 6\ 1\ 6\ 5\ 6\ 1\ 6\ 1\ 0\ \ldots,$$

d'où

$$n = 6,\ 12,\ 18,\ \ldots$$

ou

$$n = 6t \qquad (a = 5).$$

Soit encore $a = 11$, $p = 7$. On trouvera, assez rapidement,

$$n = 4,\ 6,\ 10,\ 11,\ 15,\ \ldots.$$

Il resterait à vérifier s'il existe une périodicité.

En résumé, on voit que des essais numériques directs donneront promptement les solutions des cas particuliers

$$p = 1.2.3\ldots\ 8.\ 9.10,$$
$$a = 1.2.3\ldots 10.11.12.$$

Il paraît difficile d'aller au delà. *L.-N. Machaut.*

La congruence proposée est toujours résoluble à l'aide des relations suivantes :

$$x = 2\rho, \qquad y = \frac{n-1}{2},$$

dans lesquelles ρ est un entier positif quelconque, n un nombre premier impair, avec la condition

$$x = 2\rho \neq m(n-1),$$

m étant un entier positif quelconque.

MEHMED-NADIR (Constantinople).

3453. (**1908**, 221) (E.-N. BARISIEN). — *Produit n!* — La célèbre formule de Stirling donne la réponse immédiate. En effet, elle exprime le logarithme du produit $1.2.3\ldots n$, dont la caractéristique, plus l'unité, représente le nombre de chiffres dudit produit.

On a aussi la formule bien connue

$$\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n < 1.2.3\ldots n < \sqrt{2\pi n}\, e^{-n+\frac{1}{12n}} n^n.$$

Il restera à prendre les logarithmes.

Pour plus de détails, *voir* le *Calcul intégral* de Serret, t. II, où la question est minutieusement étudiée.

Voir également *I. M.*, **1894**, 227, question 370, **1895**, 193.

Dr Charbonier.

3454. (**1908**, 221) (E.-N. BARISIEN). — *Puissances de* 9. — A défaut d'étude formelle, je donnerai les résultats provisoires d'un essai direct portant sur les 26 premières puissances de 9.

On les détermine assez rapidement, par suite d'une simplification précisément particulière à la multiplication par 9, qu'on remplace par la soustraction successive de chaque chiffre de son voisin de droite, en commençant par la droite et en retranchant celui des unités de 10. Cela revient à l'opération $10.9^p - 9^p$ sans écrire le second nombre.

Cela fait, on a une liste de 26 nombres contenant en tout 346 chiffres dont la somme est 1746, ce qui donne, pour le chiffre moyen m de chaque puissance de 9, le nombre $m = 5{,}04$.

Il serait à désirer de connaître m plus exactement.

Quant au nombre de chiffres d'une puissance p, il a pour expression

$$E(1 + p \log 9)$$

avec

$$\log 9 = 0{,}95424251\ldots.$$

En fait, on peut affirmer que Σ (somme des chiffres de 9^p) ou $\frac{\Sigma}{9}$ augmente indéfiniment, mais par soubresauts avec reculs partiels.

Exemples :

$$\begin{array}{l} p = 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23\ 24\ 25\ 26, \\ \frac{\Sigma}{9} = 7\ 11\ \ 9\ 10\ 10\ 10\ 10\ 12\ 13\ 16\ 13. \end{array}$$

Vieujeu.

3464. (**1908**, 267) (A. Auric). — *Hypothèses de la dynamique.* — Les éléments d'une réponse dans le sens indiqué se trouvent aux paragraphes 57 à 59 (p. 110-120), *La dynamique des électrons*, de l'Ouvrage de M. Ch. Henry, tout nouvellement paru, intitulé *Psycho-Biologie et Énergétique* (Paris, Hermann, 1909). L'auteur rappelle à ce sujet les résultats de Max Abraham, *Principes de la mécanique de l'électron*, 1905, etc.

Max Abraham a montré que la masse longitudinale et la masse transversale deviennent infinies pour la vitesse de la lumière.

Dr Charbonier.

3467. (**1908**, 270) (S. Prieto). — *Courbes gauches.* — A défaut d'une étude plus complète des courbes pour lesquelles les rayons de courbure R et r (ou T) sont liés par la relation

$$R^2 r = K^3 \qquad (K \text{ const.}),$$

on peut engendrer de telles courbes par le procédé que j'ai indiqué (**1894**, 63) en réponse à la question **26** posée par M. Mannheim (**1894**, 7).

On a ici

$$R = K\sqrt[3]{\frac{R}{r}}.$$

Welsch.

3469. (**1908**, 270) (U. Bini). — *Équations indéterminées.* —

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \ldots,\quad x_{n-2}. \qquad y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad \ldots,\quad y_{n-2}$$

étant arbitraires, la *solution générale* est donnée par les formules

$$x_{n-1} = \frac{a - \sum_1^{n-2} x_s + \lambda}{2}, \quad y_{n-1} = \frac{a - \sum_1^{n-2} y_s + \mu}{2},$$

$$x_n = \frac{a - \sum_1^{n-2} x_s - \lambda}{2}, \quad y_n = \frac{a - \sum_1^{n-2} y_s - \mu}{2},$$

dans lesquelles on a

$$\lambda^2 - \mu^2 = \left(2a - \sum_1^{n-2} x_s - \sum_1^{n-2} y_s\right)\left(\sum_1^{n-2} x_s - \sum_1^{n-2} y_s\right)$$
$$- 2\left(\sum_1^{n-2} x_s^2 - \sum_1^{n-2} y_s^2\right);$$

λ et μ étant uniquement astreints à être respectivement de même parité que $a - \sum_1^{n-2} x_s$ et $a - \sum_1^{n-2} y_s$.

a, qui est arbitraire, est la valeur commune des sommes

$$\sum_1^n x_s \quad \text{et} \quad \sum_1^n y_s.$$

WELSCH.

3479. (1908, 274) (W. GAEDECKE). — *Surface définie par une propriété de ses normales.* — Les coordonnées de P sont

$$X = x + pz, \quad Y = y + qz, \quad Z = 0,$$

et l'on a

$$MP = z\sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

La surface est définie par

$$2pzx + 2qzy = z^2 - x^2 - y^2.$$

On trouve facilement l'intégrale générale

$$x^2 + y^2 + z^2 = x f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Elle représente la surface la plus générale qui soit engendrée par des cercles tangents à Oz en O.

E. Dubouis.

Réponse analogue de MM. H. Brocard, O. Degel, et d'un *Anonyme* qui ajoute :

Les surfaces représentées par cette équation sont les transformées inverses de cylindres ayant leurs génératrices parallèles à l'axe Oz.

Ce sont des cyclides faisant partie d'un système triple orthogonal, comprenant :

1° Des plans passant par l'axe Oz;

2° Des sphères passant à l'origine O et ayant leurs centres sur l'axe Oz.

Cette propriété définit les lignes de courbure des surfaces (F); une des séries de ces lignes de courbure se compose de cercles passant à l'origine et dont le plan contient l'axe Oz.

La Rédaction.

Autre réponse de M. E. Lefèvre (Bruxelles).

Toute surface jouissant de la propriété énoncée et dont l'équation aux dérivées partielles

$$2pxz + 2qyz = z^2 - x^2 - y^2$$

est facile à discuter, peut être étudiée par des considérations *purement géométriques*.

C'est soit une sphère ayant son centre dans le plan XOY, soit une enveloppe de première espèce de telles sphères dont le centre décrit une courbe quelconque de ce plan.

Il est clair en effet que les sphères tangentes en deux points infiniment voisins de la surface se coupent suivant un cercle dont le plan passe par OZ perpendiculaire à XOY et est perpendiculaire à la ligne des centres, et que réciproquement le centre de la sphère tangente en un point M de la surface et situé dans le plan XOY ne peut se déplacer que perpendiculairement au plan ZOM.

Il résulte de là que l'un des systèmes de lignes de courbure se compose de cercles dont les plans passent par Oz; les tangentes à deux lignes infiniment voisines du deuxième système en des points

d'une même ligne du premier devant se couper sur OZ, le deuxième système est constitué par des courbes sphériques appartenant à des sphères (Σ) tangentes en O à XOY et coupant la surface orthogonalement.

Si l'une des lignes de courbure du deuxième système est plane, le cône (Γ) de sommet O ayant cette ligne pour directrice coupe la sphère (Σ) correspondante suivant un cercle de rayon nul; ses sections circulaires sont dans des plans parallèles, soit au plan (P) de la ligne de courbure considérée, soit à XOY.

Le cône ayant pour sommet le centre Ω de la sphère (Σ) et pour directrice la courbe (C), lieu des centres des cercles qui sont les lignes de courbure du premier système, coupe le cône (Γ) suivant un cercle de la sphère de diamètre OΩ, et la courbe (C) est la transformée par inversion de ce cercle par rapport à cette dernière sphère, Ω étant le pôle de transformation; (C) est donc un cercle et le centre de la sphère génératrice décrit une conique de foyer O.

Un plan quelconque mené par OZ coupe la trace du plan (P) sur XOY en un point qui est un centre de similitude des cercles intersections du plan sécant avec la surface; la trace de (P) sur XOY est, en conséquence, la polaire de O par rapport au cercle (C), c'est-à-dire la directrice correspondant au foyer O.

Toutes les lignes de courbure du second système sont alors dans des plans passant par cette directrice.

(La surface étudiée ici est un cas particulier de celles qui ont fait l'objet d'un Mémoire d'Ossian Bonnet publié dans le *J. E. P.*, t. XX, 35ᵉ cahier, 1853, p. 117, sous ce titre : *Surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques*.) WELSCH.

3483. (**1908**, 275) (A. WEREBRUSOW). — La résolution de l'équation indéterminée

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$$

a été exposée avec quelque détail par A. Desboves (*N. A.*, 1879, p. 399-408).

Le même sujet a été étudié par Fermat, Prestet, Euler, Legendre, Lagrange, Cauchy, Ed. Lucas (*N. A.*, 1878), Sylvester, Realis, etc.

Realis avait proposé une question analogue sous le nº **1296** (*N. A.*, 1878, p. 526) et il en a été donné deux solutions par Sondat (1880, p. 458) et par A. Desboves (1881, p. 173). *Recta.*

3485. (**1908**, 276) (*Ganimard*). — Comme première réponse, voici de brèves indications que le lecteur complétera aisément.

Soit, pour prendre un exemple très simple, $\frac{2}{9}$ dont le carré est $\frac{4}{81}$. Il s'agit de trouver la période qui, divisée par un nombre formé de chiffres 9, représentera $\frac{4}{81}$.

C'est ce qu'on obtiendra assez rapidement sans recourir à la division, par le moyen d'une multiplication déguisée, qui se réduira à une addition, en disposant les nombres en gradins reculés successivement d'un chiffre à gauche. Ces nombres seront les multiples de $\frac{1}{9}$ ou de 0,1111... par les chiffres 0, 1, 2, ..., 9.

On aura d'abord

$$\frac{4}{9} = 0,4444\ldots,$$

puis

$$\frac{4}{9.9} = \frac{4}{81} = 0,444\ldots \times 0,111\ldots,$$

ce qui revient à écrire, en gradins successifs, autant de nombres qu'on voudra formés du seul chiffre 4. On aura ainsi, par exemple :

$$\begin{array}{r} 4\,4\,4\,\ldots \\ 4\,4\,4\,4\,\ldots \\ 4\,4\,4\,4\,4\,\ldots \\ 4\,4\,4\,4\,4\,4\,\ldots \\ \hline 4\,9\,3\,7\,7\,6 \end{array}$$

Les trois premiers chiffres 4, 9, 3 sont définitifs.

Il faudrait pousser l'opération jusqu'à faire apparaître la période complète. On trouverait ainsi

$$0\,4\,9\,3\,8\,2\,7\,1\,6\,0\,4\,\ldots,$$

de sorte que

$$\frac{4}{81} = \frac{49382716}{999999999},$$

ce qui est bien une identité.

Autre exemple :

$$\frac{49}{81} = 49 \times 0,111\ldots \times 0,1111\ldots$$

ou, effectuant la multiplication par la gauche,

$$544444\ldots \times 11111 = 6048888\ldots.$$

En prenant suffisamment de lignes d'addition, on trouvera

$$0,604938271604\ldots.$$

Le procédé ici exposé n'a en réalité qu'une valeur théorique. Il est loin d'être expéditif, mais il permet de constater qu'on pourrait parvenir à la période, sans passer par la division. J'ai pensé que tel était le but de la question. *L.-N. Machaut.*

3507. (**1909**, 6) (T. Lemoyne). — *Podaire.* — La podaire négative de la parabole par rapport à son foyer est bien connue. C'est la cubique de Tschirnhausen ou de l'Hôpital dont il a été indiqué ici une Bibliographie très complète (**1901**, 10–12) à laquelle je ne trouve à ajouter que deux ou trois références : *N. A.*, 1844, p. 365-370 : 1885 (n° 1541, p. 392); 1893, p. 27*; *R. M. S.* (Vuibert), nov. 1902 et mai 1904; *I. M.*, questions 3283 (**1907**, 219); 3278 (**1907**, 198); 3296 (**1907**, 243); *M.*, 1908, p. 79 et 193.

Une curieuse propriété de cette courbe, c'est d'être, comme le cercle, de même famille que ses parallèles. *Dr Charbonier.*

Voir G. Salmon, W. Fiedler. — ***Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven***, Leipzig, 1882, B.-G. Teubner, p. 135-136.

H. Wieleitner. — ***Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt*** von 1890-1904, Leipzig, 1905, G.-J. Göschen, p. 27-28. O. Degel (Bayreuth).

La podaire négative d'une parabole par rapport à son foyer est identique à la « cubique de Tschirnhausen » (*voir* ma question **3283**, *I. M.*, t. XIV, 1907, p. 219) dont R.-C. Archibald a donné une bibliographie (*I. M.*, t. VIII, 1901, p. 10), reproduite dans la Thèse

du même auteur : *The cardioide and some of ist related curves* (Strasbourg, 1900, p. 18). Ajouter à ses indications : LAGUERRE, *N. A.*, 2ᵉ série, t. II, 1883, p. 27 ; DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, etc., t. I, Paris, 1887, p. 318 ; HUMBERT, *J. M.*, 4ᵉ série, t. IV, 1888, p. 133-152 (§ 15) ; WIELEITNER, *A. Gr.*, 3ᵉ série, t. XI, 1907, p. 309-313 ; KÖSTLIN, *Thèse*, Tübingen, 1907, p. 40 ; STÜBLER, *Z. H.*, t. XXXIX, 1908, p. 134.

H. WIELEITNER (Spire).

La podaire négative de la parabole par rapport à son foyer a été considérée plusieurs fois sous le nom de *cubique de Tschirnhausen* et de *cubique de l'Hospital*. Elle est la caustique de la parabole pour les rayons parallèles à son axe. Ce problème a été considéré par Tschirnhausen (*Acta eruditorum*, 1690), par Jean Bernoulli (*Opera*, t. III, p. 471), par l'Hospital (*Analyse des infiniment petits*, 1696, p. 109), etc. Laguerre (*Œuvres*, t. II, p. 660) et M. Humbert (*Journal de Liouville*, 1887, p. 376) ont rencontré la même ligne en cherchant les *courbes de direction* de troisième classe et de troisième ordre. La même courbe est une *spirale sinusoïde* et une *parabole divergente à nœud*. Nous avons considéré cette courbe dans notre *Traité des courbes spéciales* (t. I, p. 132, et t. II, p. 173 et 305).

Nous avons mentionné ci-dessus les premiers travaux où cette courbe a été envisagée. On peut voir l'indication de plusieurs autres dans la Dissertation de M. Archibald, intitulée *The cardioide* (Strasbourg, 1900, p. 17). T. GOMES TEIXEIRA (Porto).

3512. (**1909**, 7) (W. GAEDECKE). — *Lieu géométrique*. — La question, tout à fait analogue, mais plus générale, où le cercle est remplacé par une conique, a été proposée sous le n° **600** (*N. A.*, 1861, p. 399) et résolue analytiquement (1865, p. 551), au moyen des coordonnées trilinéaires, le triangle de référence étant le triangle des diagonales du quadrilatère formé des tangentes à la conique en A, B, C, P.

La droite de Newton de ce quadrilatère est tangente à la conique lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère ABCP.

En particulier, la droite de Newton passe par le centre du cercle ABCP. *Devignot*.

Extrait d'une réponse de M. O. Degel. *Voir :*

E. Hunyady. — *Der geometrische Ort der Mittelpunkte des Kegelschnittbüschels* (*B. M. N.*, t. I, 1882-1883, p. 183-190).

E. Pascal. — *Repertorium der höberen Mathematik*, II. Theil, Leipzig, 1902, B.-G. Teubner, p. 71 et 95.

G. Salmon, W. Fiedler. — *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, II. Teil, Leipzig, 1888, B.-G. Teubner, p. 438-439.

O. Degel (Bayreuth).

Sur le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère, voir le *Traité de Géométrie analytique* de Salmon (Sections coniques, p. 254, 427, 452, 458, 543).

Lorsque, comme dans le cas signalé, le quadrilatère est inscriptible, ce lieu est une hyperbole équilatère. F. Michel.

Extrait d'une réponse de M. V. Retali, qui renvoie aussi à l'Ouvrage de Salmon-Fiedler :

Voir, pour la démonstration géométrique :

Chasles. — *Sections coniques*, p. 309-311. — On trouve une étude très complète de la conique lieu des centres des coniques d'un faisceau dans les *Vorlesungen* de Steiner-Schröter, 2e édition, § 48, p. 304-312. V. Retali (Milan).

Autres réponses de MM. E.-N. Barisien et J. Rose (Chimay, Belgique), communiquées à M. Gaedecke, ainsi que les réponses de MM. Degel et Retali.

QUESTIONS.

3545. [I 19 c] M. D. Mirimanoff a signalé que l'équation

$$x^2 - x - 3y(y+1) = 0,$$

qui a pour solutions immédiates $x = 2$ et 4 et $y = 1$ et 4, est résolue aussi par $x = 21$, $y = 55$ (*E. M.*, 1909, p. 129).

Il aurait pu indiquer pareillement $x = 9$, $y = 15$ et $x = 35$, $y = 119$.

L'équation admet-elle d'autres solutions?

H. Brocard.

3546. [Σ] (1907, 2, 146, 268; 1908, 4, 218). Prix académique (*Académie royale des Sciences exactes, physiques et naturelles de Madrid*). — Un aérostat fusiforme supposé en repos, au milieu d'une atmosphère calme, déterminer la forme définitive que prendra, sous l'action de la pression du gaz intérieur, de l'air extérieur et des systèmes de suspension des divers fardeaux, l'enveloppe construite en tissu flexible et élastique, et calculer en même temps les tensions correspondant à chaque point de l'enveloppe.

Mémoires en castillan ou en latin, avec devise, le nom de l'auteur sous pli cacheté spécial, à adresser au Secrétariat de l'Académie, calle de Valverde, n° 26, Madrid, jusqu'au 31 décembre 1910.

La Rédaction.

H. Brocard.

(D'après l'*Anuario* de l'Académie pour 1909, p. 250.)

Note. — Le même sujet, demeuré sans réponse, avait été proposé au concours de 1907.

3547. [K 10 e] La longueur d'un arc de cercle et celle

de la corde correspondante étant connues, comment peut-on déterminer analytiquement et graphiquement le centre du cercle à qui l'arc appartient?

J'ai pu faire cette détermination par approximation, mais dans aucun Traité, je n'ai trouvé de méthode exacte.

C. ALASIA DE QUESADA (Brindisi).

3548. [V] Je désirerais une bibliographie des Notes publiées sur la développée de parabole.

T. LEMOYNE.

3549. [V 9] Delaunay, Steiner, Catalan et Minding se sont occupés de la courbe de longueur donnée qui, sur une surface, renferme une aire maximum. Quels sont, en dehors de leurs travaux, les études qu'on a publiées sur cette courbe et les propriétés qu'on en a découvertes?

T. LEMOYNE.

3550. [V 9] Quelles sont les propriétés particulières des cycliques, intersections d'une sphère et d'un cône du second ordre dont un des axes principaux passe par le centre de la sphère? Ces cycliques ont été étudiées par W. Roberts.

T. LEMOYNE.

3551. [V 9] D'après M. C. Alasia (*E. M.*, 1907, p. 18), M. Wölffing a donné le nom de courbes de Cesaro aux courbes telles que le rayon de courbure, en un point, soit proportionnel au segment de normale qui va du point de tangence à son intersection avec la polaire du point de tangence par rapport à un cercle fixe.

Ces courbes ont-elles été étudiées par d'autres que par Cesaro? En connaît-on des propriétés simples?

Elles comprennent comme cas particulier, dit M. C. Alasia, la courbe de Ribaucour. Dans quel Mémoire cette dernière courbe s'est-elle présentée aux recherches de Ribaucour? A-t-elle fait l'objet d'autres études? T. LEMOYNE.

3552. **[V 9]** Mannheim a étudié les courbes gauches dont le produit des rayons de courbure et de torsion est constant. Ces courbes ont-elles fait l'objet d'autres recherches que les siennes? T. LEMOYNE.

3553. **[V 9]** Dans plusieurs Mémoires, Mannheim a étudié la surface lieu des normales principales communes à deux courbes de Bertrand. Quelles sont, en dehors des études de Mannheim, les recherches publiées sur cette surface et les propriétés qu'on en connaît? T. LEMOYNE.

3554. **[R7bγ et S6b]** On sait que, pour l'étude de l'influence de la résistance opposée par l'air au mouvement des projectiles de l'artillerie, il est d'usage de comparer la fonction $R = F(v)$ à des fonctions monomes de la vitesse v.

La courbe $f(v) = \frac{F(v)}{v^2}$ a été plus particulièrement étudiée, pour des vitesses voisines de 200^m, 340^m et 500^m; elle présente successivement un minimum, une inflexion et un maximum.

J'ai étudié, par la méthode du problème balistique inverse et d'après les données expérimentales de l'École normale de Tir, les particularités du mouvement d'un projectile de petit calibre.

La courbe $f(v)$ relative à ce projectile présente successivement un maximum, une inflexion et un minimum pour les vitesses respectives

$$v = 194^m,1, \qquad v = 340^m,3, \qquad v = 443^m,8.$$

D'après ces résultats, les concavités et les convexités des courbes $f(v)$ relatives aux projectiles de gros et de petit calibre seraient opposées.

A-t-on déjà remarqué cette singularité et peut-on l'expliquer? GLEIZES.

3555. **[Q]** Il y a une science nouvelle, la Métagéométrie

ou Néogéométrie, qui, au moyen de l'adoption arbitraire des postulats ou hypothèses, prétend ruiner la Géométrie proprement dite, en l'attaquant sur la fragilité de ses principes. Cette science est belle, elle est brillante, mais elle a de l'arbitraire et, par cela, elle se prête à toute fantaisie. Les théories physiques ont aussi de la fantaisie, mais ce n'est que par nécessité, et elles ne sont nullement des moules arbitraires pour mouler la nature; au contraire, bien qu'elles ne soient que des tentatives pour classer les phénomènes, elles les accompagnent dans toutes leurs modulations.

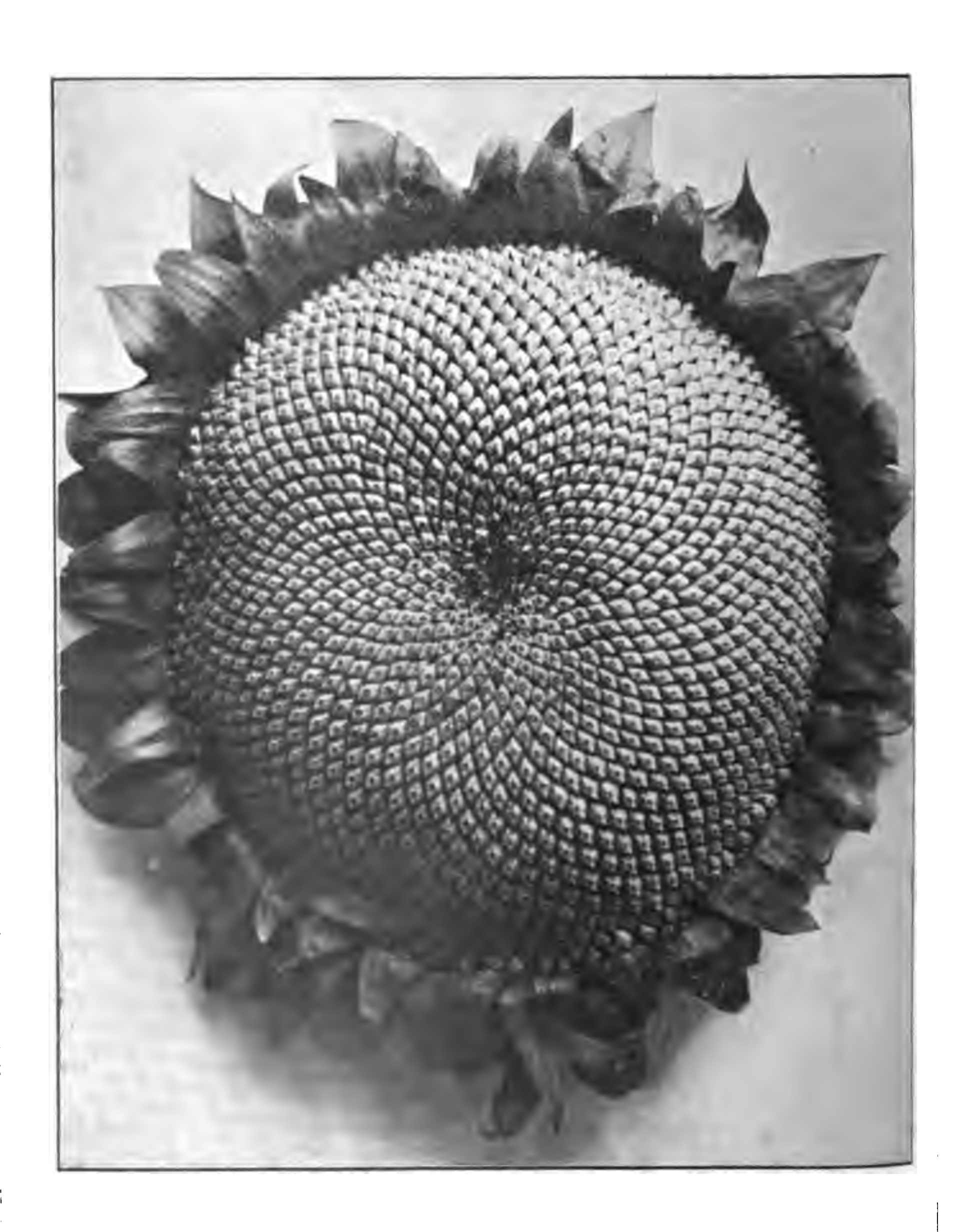
Mes réflexions faites, je voudrais savoir si la philosophie de cette nouvelle science s'impose à l'esprit des mathématiciens, si bien qu'elle annulerait toute tentative sur le modeste chemin de l'empirisme, ou si, vraie épopée de la Science, elle leur captive l'esprit comme l'épopée littéraire, ce mélange d'histoire et de fantaisie, peut, elle aussi, captiver l'esprit de l'historien. *Ogard.*

3556. [**Q 1 d** et **J 5**] S'il est « commode » de considérer, en général, un point de l'espace comme un *ensemble* de trois nombres x, y, z, peut-on en dire autant lorsque ce point appartient à une pseudo-surface, telle que

$$\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz = 0,$$

par exemple? Alors, en effet, sur les trois coordonnées du point, deux sans doute sont toujours *mesurables*; mais, par hypothèse, la troisième ne l'est pas. L'ensemble (x, y, z) cesse donc ici d'être *homogène*, ce qui infirme, selon nous, tous les raisonnements dont s'accommodent les points *ordinaires* de l'espace.

Ne s'ensuit-il pas que la théorie des pseudo-surfaces et, par suite, leurs propriétés sont incompatibles avec la nouvelle théorie classique des ensembles? ISSALY.



RÉPONSES.

524. (**1895**, 134; **1902**, 138) (H. BROCARD). — *Mosaïque de l'hélianthe* (**1904**, 95; **1908**, 173). — En cherchant à représenter la mosaïque des graines, on est amené à tracer des circonférences concentriques de rayons croissant en progression arithmétique (ou en progression géométrique), rencontrées par une étoile de rayons formant des angles égaux à une petite fraction de la circonférence. Les lignes de joint sont alors des diagonales des quadrilatères mixtilignes ainsi obtenus et correspondant à une certaine loi de succession des sommets à joindre.

On dessinera de cette façon des lignes rappelant tout à fait la spirale d'Archimède (ou la spirale logarithmique), ou même d'autres spirales, selon la loi de variation du rayon vecteur. Ces courbes conviendront d'ailleurs beaucoup mieux que la cardioïde considérée primitivement.

J.-W.-N. LE HEUX
(Voorthuizen, près Barneveld, Hollande).

Résumé d'après une nouvelle réponse.

Note. — Nous profitons de l'occasion de cet article pour publier la gravure promise ici (**1908**, 174), dont le cliché nous a été obligeamment communiqué par M. F.-J. Vaes (Rotterdam).

LA RÉDACTION.

Je ne puis m'empêcher d'être frappé de l'analogie de disposition que présentent les spirales de la photographie de M. Brocard avec celles qu'a rencontrées M. le commandant Hartmann, dans ses études sur la déformation des métaux, pour le cas d'un cylindre creux soumis à une pression intérieure ou extérieure, ou pour le cas d'une plaque poinçonnée en son centre [*Revue d'Artillerie*, novembre (p. 99-100) et décembre 1894, 1895 et 1896].

M. Mesnager a montré (*Revue d'Artillerie*, mars 1898) qu'on pouvait, au moins en partie, expliquer la production de ces lignes en admettant que, dans la déformation d'un corps donné soumis à

des efforts : 1° le glissement tend à se produire en un point le long de l'élément plan suivant lequel la valeur absolue du rapport R de l'effort tangentiel à l'effort normal (cohésion comprise) est maximum ; 2° ce glissement, qui constitue *une déformation permanente*, se produit effectivement dès que R atteint une valeur constante f (analogue à un coefficient de frottement) caractéristique du métal.

Voir encore APPELL, *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 66.

Je ne suis pas assez botaniste pour dire si des phénomènes de déformation tout à fait analogues au point de vue de la Mécanique peuvent se produire dans le développement de la fleur et du fruit de l'hélianthe (ou d'autres plantes) et si cela peut influer sur la disposition de la mosaïque, ou même la déterminer.

E. MAILLET.

1266. (**1898**, 79) (BARBETTE). — *Nombre considéré par Mersenne* (**1898**, 214 ; **1899**, 14). — Le nombre 100895598169, que Mersenne proposait à Fermat de décomposer, est de la forme $120M + 49$; nous étudions les nombres de cette espèce à l'aide de 32 équations générales de la forme $a^2x^2 + 2bx - c = y^2$ en entiers positifs. Ici, les facteurs du nombre proposé sont tous deux de la forme $120x + 103$.

Le problème se ramène alors à résoudre

$$x + y = 120z + 21,$$
$$xy = 7006620 - 103z.$$

La somme des inconnues est impaire ; les inconnues x et y sont donc de parité contraire, et leur produit est pair ; on doit donc poser $z = 2u$.

On vérifie alors, d'après la méthode générale, que le nombre donné n'admet pas les facteurs 103 ou 223 ; et l'on peut alors poser

$$xy \geqq x + y,$$

ce qui donne la valeur entière maxima pour u, soit 15709.

Posant, d'autre part,

$$M = A^2 + h \qquad (h \leqq 2A),$$

M étant 7006620 ici, on voit que

$$x + y \geqq 2A - 1,$$



d'où

$$240u + 21 \geqq 5293,$$

ou encore en entiers

$$u = 22 + s.$$

Ceci nous donne enfin l'équation de condition

$$(240s + 5301)^2 - 4(7002088 - 206s) = Z^2,$$

ou encore

$$57600s^2 + 2545304s + 92249 = Z^2.$$

J'étudie les formes possibles de s à l'aide des modules. Pour abréger, on voit facilement que

$$s = 13$$

donne

$$Z = x - y = 6551$$

et

$$x + y = 8421,$$

d'où

$$x = 7486, \qquad y = 935$$

et les facteurs premiers sont 898423 et 112303.

A GÉRARDIN.

1683. (**1899**, 268) (HOFFBAUER). — *Résoudre*

$$d^2 = a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2,$$

où d est le diamètre du cercle circonscrit au triangle abc (**1900**, 318; **1901**, 94). — Voici une solution générale du problème. Il faudra poser $m = u^2 - v^2$,

$$p = 2uv, \qquad f = k^2 - l^2, \qquad g = 2kl, \qquad d = (u^2 + v^2)(k^2 + l^2),$$

$$a = m(f^2 - g^2) + 2pfg, \qquad a' = p(f^2 - g^2) - 2mfg,$$

$$b = m(f^2 - g^2) - 2pfg, \qquad b' = p(f^2 - g^2) + 2mfg,$$

$$c = m(f^2 + g^2), \qquad c' = p(f^2 + g^2).$$

A. GÉRARDIN.

1774. (**1900**, 80) (E.-B. ESCOTT). — *Nombres amiables* (**1900**, 380; **1908**, 180). — (Rappelons que chaque nombre est égal à la somme des diviseurs de l'autre.)

Nous avons donné (*S. Œ.*, 1906) la liste des *soixante et un* nom-

bres amiables d'Euler (*Comment. Arith. Coll.*, t. I. p. 102, 145). Voici les quatre autres couples donnés dans les deux autres articles d'Euler sur le sujet (t. II, p. 627, 639) :

$$2^2.5.131 \quad \text{et} \quad 2^2.17.43,$$
$$2^2.5.251 \quad \text{et} \quad 2^2.13.107,$$
$$2^4.19.8563 \quad \text{et} \quad 2^4.83.2039,$$
$$2^3.47.2609 \quad \text{et} \quad 2^3.11.59.173.$$

Le Lasseur s'est occupé des nombres amiables, et il a constaté qu'il n'existe pas pour $n < 35$ d'autres nombres amiables de la forme

$$A = 2^{n+1}d, \qquad B = 2^{n+1}bc,$$

b, c, d étant des nombres premiers des formes suivantes :

$$b = 3.2^n - 1, \qquad c = 3.2^{n+1} - 1, \qquad d = 3^2.2^{2n+1} - 1$$

[à ce propos, la valeur de d (**1900**, 380) doit se lire $18.2^{2n} - 1$], sauf les trois couples de la question **1774**.

Nous avons poussé l'étude de ces nombres jusqu'à $n = 200$; une méthode nouvelle nous a permis d'éliminer rapidement de grands nombres, et nous n'avons pas trouvé d'autre solution. Ce Mémoire, communiqué au Congrès de l'*A.F.A.S.*, 1908, à Clermont-Ferrand, sera envoyé, dès son apparition, aux collaborateurs de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* qui nous le demanderont.

A. GÉRARDIN.

2052. (**1901**, 82) (E.-N. BARISIEN). — *Évaluation graphique de* π (**1901**, 268; **1907**, 81, 178; **1908**, 180). — Voici un renseignement intéressant, à propos de π, tiré des *Moyennes en Statistique*, par M. Cheysson : dans un remarquable article de la *Revue des Deux Mondes* (15 avril 1884), consacré aux *lois de hasard*, M. Joseph Bertrand a indiqué que l'on obtenait une valeur approchée de π, soit en comptant les variations du *septième* chiffre pour 10000 logarithmes des Tables à 10 décimales de Véga, soit en supputant les écarts du nombre des naissances de part et d'autre de la moyenne pour nos 86 départements en 1878.

Voir aussi 3191, **1907**, 229, et **2663**, **1903**, 325.

A. GÉRARDIN.

2266. (**1902**, 6) (C. Alasia). — *Solution de l'équation*

$$x^2 - 79y^2 = 101z^2$$

(**1902**, 187; **1904**, 81). — Si nous avions à résoudre

$$5x^2 = 79y^2 + 101z^2,$$

nous aurions immédiatement une solution, car

$$79 + 101 = 5.6^2;$$

on poserait alors

$$x = 6a + \alpha, \quad y = a + \beta, \quad z = a + \gamma;$$

on tirerait a en fonction des trois auxiliaires α, β, γ et, en prenant les inconnues proportionnelles, on aurait

$$\begin{aligned} x &= 6(79\beta^2 + 101\gamma^2 + 5\alpha^2) - 2\alpha(79\beta + 101\gamma),\\ y &= 79\beta^2 - 101\gamma^2 + 5\alpha^2 + 2\beta(101\gamma - 30\alpha),\\ z &= -79\beta^2 + 101\gamma^2 + 5\alpha^2 + 2\gamma(79\beta - 30\alpha). \end{aligned}$$

Mais pour le problème actuel, n'ayant pas de solution immédiate, nous appellerons une des solutions (a, b, c), par exemple (254, 23, 15).

Nous poserons

$$x = am + \alpha, \quad y = bm + \beta, \quad z = cm + \gamma,$$

d'où nous tirerons m, et les formules suivantes :

$$\begin{aligned} x &= a(79\beta^2 + 101\gamma^2 + \alpha^2) - 2\alpha(79b\beta + 101c\gamma),\\ y &= b(-79\beta^2 + 101\gamma^2 - \alpha^2) - 2\beta(101c\gamma - a\alpha),\\ z &= c(79\beta^2 - 101\gamma^2 - \alpha^2) + 2\gamma(a\alpha - 79\beta). \end{aligned}$$

Ces formules ont une certaine généralité, mais ne doivent pas représenter toutes les solutions du problème, sauf démonstration, car elles partent d'une solution particulière; elles doivent donc être comprises dans les formules indiquées dans la note de Plana.

A. Gérardin.

2601. (**1903**, 152) (G. Ricalde). — *Trouver quatre nombres tels que leur somme, la somme des produits deux à deux, la somme des produits trois à trois et le produit des quatre soient des*

carrés (**1907**, 61). — Soient les quatre inconnues x, y, z, t. On aura

$$(1) \qquad x + y + z + t = a^2,$$

$$(2) \qquad x(y + z + t) + (yz + yt + zt) = b^2,$$

$$(3) \qquad x(yz + yt + zt) + yzt = c^2;$$

$$(4) \qquad xyzt = d^2.$$

On tire de (1) $y + z + t$, valeur que l'on porte en (2); on tirera $[yz + yt + zt]$ de (2) pour le mettre en (3), ainsi que yzt tiré de (4), et l'on aura ainsi

$$x^4 - a^2x^3 + b^2x^2 - c^2x + d^2 = 0,$$

ce qui est la condition donnée par Euler (*Comment. Arith. Coll.*, t. I, p. 450).

Voici quelques-unes de ses solutions :

$$420, \quad 525, \quad 1344, \quad 1680$$

forment une solution du problème, et l'on a

$$a = 63, \qquad b = 2310, \qquad c = 100\,800, \qquad d = 33\,600.$$

Voici d'autres réponses; on a

$$x = \mathrm{M}x', \quad y = \mathrm{M}y', \quad z = \mathrm{M}z', \quad t = \mathrm{M}t',$$

$\mathrm{M} = 1469$, $x' = 196$, $y' = 256$, $z' = 441$, $t' = 576$ tous carrés.
$\mathrm{M} = 4589$, $x' = 256$, $y' = 576$, $z' = 1156$, $t' = 2601$.

A. Gérardin.

2664. (**1903**, 256) (*Tellaw*). — *Carrés magiques en nombres discontinus* (**1904**, 63; **1906**, 18). — Consulter *A. F., Pau*, 1892, p. 136, l'article de M. Coccoz, *Des carrés de* 8 *et de* 9 *magiques aux deux premiers degrés; des carrés de mêmes bases en nombres triangulaires.*

Voir p. 147 (*loc. cit.*) un carré de côté 9 en nombres triangulaires, extrait de la collection de M. Pfeffermann. Un autre amateur, M. Feisthamel (*Amédée Festa*, du *Petit Journal*), a publié notamment dans le *Siècle* et la *France* différents carrés magiques à deux degrés.

Voir aussi *A.-F., Caen*, 1894, p. 163, l'article de M. Coccoz, *Construction des carrés magiques avec des nombres non consécutifs. Rappel de quelques méthodes de Frenicle, de Fermat, de Sauveur. Carrés composants des cubes magiques de* 7 *du*

Révérend Frost. Carrés impairement pairs, magiques aux deux premiers degrés. Égalités à cinq degrés.

Voici un extrait de cet article : « Ce fut seulement en faisant des applications de la méthode dite *générale* créée par Fermat et Frenicle, c'est-à-dire celle des enceintes... que l'on dut mettre en œuvre des suites de nombres interrompues quelque fois *très irrégulièrement.*

» Pour citer un exemple, il est impossible, avec 36 éléments consécutifs, d'obtenir un carré à quartiers égaux ou qui ait la propriété de ceux auxquels Ed. Lucas a donné le nom de *diaboliques,* et que possèdent 48 carrés marqués *x* dans la Table de Frenicle. »

En appendice (*loc. cit.*, p. 181), on trouve en nombres non consécutifs : 5 carrés de côté 4, 4 de côté 5, 2 de côté 9, 2 de côté 10 et 1 de côté 14.

La bibliothèque de M. Coccoz est entre les mains de M. Rilly. Si M. *Tellaw* désire d'autres renseignements, nous sommes à sa disposition.

Il est difficile, surtout pour les carrés magiques, de faire des réponses précises, et du reste d'autres collaborateurs de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* seraient plus qualifiés pourfaire une réponse complète; le sujet est si vaste.

Je puis encore indiquer : Violle, *Traité complet des carrés magiques simples et composés. Voir* p. 454, 459 et 460 du Tome I : *Progressions interrompues d'après les précédentes méthodes* (il peut y avoir, en général, autant de progressions qu'il y a d'unités dans la racine d'un carré); *Les Progressions ne suivant pas l'ordre naturel* et *Progressions interrompues* (2 vol., atlas et 400 fig.).

A. Gérardin.

2893. (**1905**, 52) (*Matito*). — *Écrits récents sur l'Aviation* (**1905**, 167; **1906**, 114; **1907**, 133; **1908**, 184). — Citons, parmi la foule des Ouvrages récents :

Ballons dirigeables et Aéroplanes, par Berget.

L'Homme s'envole, par le capitaine Sazerac de Forge.

Voir les catalogues *Flammarion* et *Virien* et la *Librairie aéronautique.*

L'Aéroplane pour tous; Comment l'oiseau vole, comment l'homme volera; Aérostation, aviation; Théorie des hélices aériennes; Aéronef dirigeable, plus lourd que l'air; Les pre-

miers hommes-oiseaux; Almanach des aviateurs pour 1909; etc. *Éléments d'aviation,* par TATIN. A. GÉRARDIN.

Il importe encore de mentionner particulièrement :

E.-L. BERTIN. — Sur la giration des aéroplanes (*Comptes rendus,* 16 novembre 1908, p. 895). Sur le danger de chavirement possible dans la giration des aéroplanes (*Comptes rendus,* 4 janvier 1909, p. 22).

L. LECORNU. — Sur la statique graphique de l'aéroplane (*Comptes rendus,* 22 février 1909, p. 460). Sur l'équilibre d'un système de plans soumis à l'action du vent (*Bulletin de la Société mathématique,* t. XXXVII, 1909, p. 11-31).

D'ESTOURNELLES DE CONSTANT, P. PAINLEVÉ, COMMANDANT BOUTTIEAUX, etc. — *Pour l'aviation,* Paris, Librairie aéronautique, 1909.

Cours lithographiés de Mécanique et Machines de l'École Polytechnique. E. MAILLET.

3015. (**1906**, 35) (*Crut*). — *Lieux géométriques* (**1906**, 176; **1909**, 35). — A la suite d'une observation de M. Gœdecke, M. *E.-A. Majol* adresse à la Rédaction la note suivante explicative de sa réponse précédente (**1906**, 176) :

Par une méthode extrêmement simple, je détermine la *classe* de l'enveloppe, qui est la *sixième,* et je ne dis *explicitement* rien de son degré. C'est la podaire de l'enveloppe, prise relativement à l'origine des coordonnées, dont je fixe l'ordre (ou le degré) au douzième. Mais, ayant énoncé que la courbe est unicursale, ou du genre zéro, il résulte *implicitement* de là et des formules de Plücker que le nombre de ses singularités, tangentes doubles ou stationnaires, est de *dix;* puis de nouveau, de l'expression de l'ordre en fonction de la classe et des singularités, il suit que l'ordre maximum, atteint dans le cas où il n'y a aucune tangente stationnaire, est le *dixième.* *E.-A. Majol.*

3037. (**1906**, 96) (PLAKHOWO). — *Algèbre d'Euler* (**1906**, 232). — J'ai la deuxième édition des *Eléments d'Algèbre,* d'EULER (an III de l'ère républicaine, à Lyon, chez Bruyset). Le Tome second contient (p. 375), dans son Avertissement aux additions à l'Analyse indéterminée, le passage indiqué par M. Plakhowo : « La théorie des fractions continues... doit être peu connue des géomètres; je serai

satisfait si je puis contribuer à la leur rendre un peu plus familière;... je détermine les *minima* qui peuvent avoir lieu dans les formules indéterminées à deux inconnues, surtout dans celles du second ordre. »

L'Avis de cette seconde édition donne les renseignements suivants : « La traduction française des *Éléments* sortie pour la première fois de nos presses en 1784... parut sous les auspices de d'Alembert.... La seconde partie... enrichie des additions du célèbre La Grange.... »

Une note de l'éditeur ajoute : « M. Bernoulli..., directeur de l'Observatoire de Berlin, s'est chargé de rendre en notre langue le texte de M. Euler et de l'enrichir de quelques notes historiques. M. de La Grange, dont le rare génie et les nombreux succès fixent depuis longtemps l'attention de toute l'Europe savante, a ajouté au mérite de l'Ouvrage en y joignant un morceau destiné à compléter le Traité de l'Analyse indéterminée. »

Enfin, dans l'Avertissement du traducteur (p. XIV), on lit : « Le Traité d'Algèbre que j'ai entrepris de traduire a été publié en allemand en 1770 par l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg (sous le titre : *Anleitung zur Algebra*).... On s'apercevra aisément, à la lecture de ces additions, qu'elles ne peuvent être que de M. de La Grange. »

D'autre part, F. Hœfer, dans son *Histoire des Mathématiques* (p. 534), dit : « *Éléments d'Algèbre*..., traduits... par Bernoulli, petit-fils du célèbre Jean Bernoulli, et réimprimés à Lyon en 1795 avec des notes et additions de Lagrange. Le premier volume... ne porte ni le nom du traducteur, ni celui de l'annotateur.... Le deuxième volume... contient (p. 371 à 662) les additions précieuses de Lagrange. »

Voir aussi 1969 (**1906**, 143). A. GÉRARDIN.

3380. (**1908**, 98) (G. QUIJANO). — *Point limite des pentagones successifs obtenus au moyen des diagonales en partant d'un pentagone donné* (**1908**, 257). — Cette question a sans doute été étudiée, mais je ne l'ai jamais rencontrée dans les recueils que je possède.

Voici une réponse qui donne, je crois, la principale propriété de ce point limite :

Soit Δ_1, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 le pentagone donné convexe; formons

au moyen des diagonales les deux pentagones successifs Δ_2, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2; Δ_3, A_3, B_3, C_3, D_3, E_3; les lettres se suivent aux sommets de chacun des pentagones dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre : A_2 est obtenu par l'intersection des diagonales B_1D_1 et C_1E_1 ; A_3 par l'intersection des diagonales B_2D_2 et C_2E_2; soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 les coniques; ici des ellipses, circonscrites à Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Prolongeons la diagonale A_2D_2 jusqu'à sa rencontre en M avec A_1D_1 et joignons ME_3; cette droite est la polaire de E_1 par rapport à la conique Γ_2; mais, si l'on considère le pentagone Δ_3 comme un hexagone inscrit à Γ_3 ayant en E_3 un côté infiniment petit, ME_3 est tangente en E_3 à Γ_3 par suite de la propriété de l'hexagramme de Pascal; il en résulte que Γ_3 est l'enveloppe des polaires des points de Γ_1 par rapport à Γ_2, c'est-à-dire la polaire réciproque de Γ_1 par rapport à Γ_2, Γ_4 la polaire réciproque de Γ_2 par rapport à Γ_3, etc.

Les quatre points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 étant imaginaires, l'un de leurs trois pôles doubles réels se trouve à l'intérieur de Γ_2; soit P ce point; on pourra projeter la figure de manière que la projection P' de P devienne le centre commun de Γ'_1 et Γ'_2, projections de Γ_1 et Γ_2; mais les polaires réciproques successives Γ'_3, Γ'_4, ... seront concentriques à Γ'_1 et Γ'_2; les pentagones successifs Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, ... se contracteront donc pour se réduire à la limite à un point au centre P'.

Revenant à la figure primitive, on voit que les Δ_1, Δ_2, Δ_3, ... successifs se contracteront pour se réduire à un point, au point P qui est ainsi un pôle double pour deux quelconques des ellipses Γ_1, Γ_2, Γ_3, ...

Lorsque les coniques Γ_n, Γ_{n+1}, Γ_{n+2}, ..., n étant très grand, deviennent très petites, la polaire double qui correspond au point P restant fixe, elles tendent à devenir concentriques et homothétiques, c'est-à-dire que la loi de décroissance des pentagones très petits Δ_n, Δ_{n+1}, Δ_{n+2}, ... se rapproche de plus en plus de la loi de décroissance des pentagones qu'on obtiendrait par projection orthogonale de pentagones réguliers successifs très petits obtenus comme plus haut au moyen des diagonales, leurs cercles circonscrits successifs reproduisant par cette projection les ellipses concentriques et homothétiques très petites de la figure. G. Espanet.

3385 (**1908**, 100) (E. Escott). — *Polynome* (**1908**, 208). — **La**

solution que j'ai donnée (1908, 208) doit être complétée, car deux des nombres x_0, x_1, x_2 peuvent être égaux.

Ils ne peuvent être égaux tous les trois. Pour que $x_0 = x_1$, par exemple, il faut et il suffit qu'on ait

$$b = aw. \tag{1}$$

Pour que le problème proposé soit résolu, il faut et il suffit, comme je l'ai montré, que x_0, x_1, x_2 soient racines de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$.

Mais si x_0, x_1, x_2 ne sont pas distincts, ce ne sont pas toutes les racines de cette équation, puisque cette dernière a ses racines distinctes.

Je traiterai le problème par une nouvelle méthode basée sur ce qne les racines de $x^3 - x - 1 = 0$ sont u, v, w.

A des permutations près, portant sur u, v, w, les seuls cas possibles sont :

1° $x_0 = u$, $x_1 = v$, $x_2 = w$. Alors

$$au^2 + (b-1)u + c = 0$$

admettant trois racines distinctes, u, v, w, on a

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad c = 0.$$

2° $x_0 = u$, $x_1 = w$, $x_2 = v$. On a alors

$$a = \frac{3u+3}{u(2u+3)}, \qquad b = \frac{u}{2u+3}, \qquad c = -\frac{2u^2}{2u+3}.$$

3° $x_0 = v$, $x_1 = w$, $x_2 = u$. Alors

$$\mathrm{D}a = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{D}b = \mathrm{B}, \qquad \mathrm{D}c = \mathrm{C},$$

en posant

$$\mathrm{D} = -(u-v)(v-w)(w-u), \qquad \mathrm{A} = \Sigma u^2 - \Sigma vw = 3,$$

$$\mathrm{B} = \begin{vmatrix} u^2 & v & 1 \\ v^2 & w & 1 \\ w^2 & u & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ v^2 & w & 1 \\ w^2 & u & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(w-u) + 3(v^2u - w^2) = v - u + 3uv^2 - 3,$$

$$\mathrm{C} = \begin{vmatrix} u^2 & u & v \\ v^2 & v & w \\ w^2 & w & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ v^2 & v & w \\ w^2 & w & u \end{vmatrix} = -2, \text{ après quelques calculs.}$$

4° $x_0 = x_1 = u$, $x_2 = v$. Dans ce cas et dans les suivants, on tient compte de (1) et l'on obtient

$$a = \frac{v-u}{2w^2+uv}, \qquad b = \frac{w(v-u)}{2w^2+uv}, \qquad c = \frac{u(2w^2+v^2)}{2w^2+uv}.$$

5° $x_0 = x_1 = u$, $x_2 = v$. On se sert de ce que u et w sont des racines d'une même équation du second degré. On trouve

$$a = \frac{1}{w-v}, \qquad b = \frac{w}{w-v}, \qquad c = \frac{1}{v(w-v)}.$$

6° $x_0 = x_1 = w$, $x_2 = u$,

$$a = \frac{1}{v-w}, \qquad b = \frac{w}{v-w}, \qquad c = \frac{u(u+3v)}{v-w}.$$

E. Dubouis.

3426 (**1908**, 193) (U. Bini et G. Lemaire). — *Systèmes d'équations indéterminées* (**1909**, 43). — Pour résoudre en entiers positifs le système

$$x^3+y^3+z^3 = u^3+v^3+w^3,$$
$$x+y+z = u+v+w,$$

nous pouvons citer les solutions suivantes (*S. Œ.*, oct. 1906, p. 120) :

(1, 24, 32, 2, 22, 33), (1, 65, 90, 2, 63, 91),
(2, 10, 12, 3, 8, 13), (2, 17, 22, 3, 15, 23),
(2, 53, 73, 3, 51, 74), (3, 15, 19, 4, 13, 20),
(3, 22, 29, 4, 20, 30), (4, 20, 26, 5, 18, 27),
(5, 10, 11, 6, 8, 12), (5, 16, 20, 6, 14, 21),
(5, 25, 33, 6, 23, 34), (5, 32, 43, 6, 30, 44),
(1, 10, 14, 3, 7, 15), (1, 10, 15, 4, 6, 16),
(3, 15, 17, 5, 11, 19), (1, 19, 23, 3, 15, 25),
(5, 10, 11, 6, 8, 12), ...

A. Gérardin.

3456. (1908, 222) (J. Hadamard, La Rédaction). — *Démonstration complète du théorème de Cauchy sur l'égalité des polyèdres convexes.* — Il s'agit de prouver que *deux polyèdres fermés convexes dont les faces sont égales et disposées de la même manière sont égaux ou symétriques*. Par faces disposées de la même manière on entend qu'il existe entre les deux surfaces polyédriques une correspondance ponctuelle univoque et continue faisant correspondre : à chaque sommet, un sommet ; à chaque arête, une arête ; à chaque face, une face.

Pour démontrer cette propriété, il suffira de prouver l'égalité des dièdres homologues. C'est ce que je vais faire en complétant, sur un point de détail, le raisonnement classique de Cauchy que je vais d'abord rappeler ([1]).

Considérons deux angles polyèdres convexes A et A′ ayant les faces égales et disposées de la même manière. Soient une arête a de A, a' son homologue dans A′ ; si le dièdre suivant a' est plus grand que le dièdre suivant a, on met le signe $+$ sur a et a' ; si le dièdre suivant a' est plus petit que celui suivant a, on met le signe $-$; enfin, si les deux dièdres sont égaux, on n'affecte a et a' d'aucun signe. Cauchy démontre que, s'il y a des arêtes affectées de signe, en tournant autour du sommet de A′, on trouvera au moins quatre changements de signes.

Soient maintenant P et P′ deux polyèdres convexes à faces égales et disposées de la même manière ; opérons sur chaque angle polyèdre comme il vient d'être dit et supposons d'abord qu'il y ait modification des dièdres suivant chaque arête, c'est-à-dire que chaque arête soit affectée d'un signe. Deux arêtes ne pouvant avoir plus d'une extrémité commune, deux arêtes ayant une extrémité commune et qui sont consécutives, quand on tourne autour de leur extrémité commune, étant aussi consécutives quand on parcourt le périmètre d'une face bien déterminée et inversement, le nombre total des changements de signes qu'on obtiendra en tournant successivement autour de chacun des sommets est le même que celui qu'on obtiendra en parcourant successivement le périmètre de chaque face.

([1]) Le travail de Cauchy intitulé : *Deuxième Mémoire sur les polygones et les polyèdres* a été publié dans le XVI° Cahier (t. IX) du *Journal de l'École Polytechnique* (mai 1813). *Voir* aussi *Œuvres,* Tome I, 2° série. Le raisonnement de Cauchy est reproduit dans le Tome II du *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse ; on le trouve aussi exposé dans certaines éditions des *Éléments de Géométrie* de Legendre.



Ce nombre, d'après la première méthode d'évaluation, est au moins égal à 4S, S étant le nombre des sommets de P ou de P'; d'après la seconde méthode il est au plus égal au nombre

$$(1) \qquad N = 2t + 4q + 4p + 6h + 6h_1 + 8o + \ldots,$$

$t, q, p, h, \ldots$ désignant le nombre des faces triangulaires, quadrilatères, pentagonales, hexagonales, etc., sur P ou P'. Il est bien évident, en effet, que le nombre maximum des changements de signes qu'on obtient en parcourant le tour d'une face est égal au plus grand nombre pair non supérieur au nombre des côtés de cette face.

Or, si l'on désigne par F et A le nombre des faces et des arêtes de P, on a

$$(2) \qquad F = t + q + p + h + h_1 + o + \ldots,$$

$$(3) \qquad 2A = 3t + 4q + 5p + 6\lambda + 7h_1 + 8o + \ldots,$$

et la relation d'Euler

$$(4) \qquad F + S = A + 2$$

nous donne

$$(5) \qquad 4S = 8 + 2t + 4q + 6p + 8h + 10h_1 + 12o + \ldots;$$

donc

$$(6) \qquad N \leqq 4S - 8,$$

et cela prouve que nos hypothèses sont inadmissibles.

Tout ce raisonnement de Cauchy est irréprochable; pour le cas général, le raisonnement de Cauchy peut se résumer ainsi. Reprenons les deux polyèdres P et P' qui sont à faces égales. Nous ne supposerons plus que toutes les arêtes sont affectées de signes; mais nous ne nous occuperons que des A' arêtes affectées de signes, des S' sommets extrémités de ces arêtes et des F' parties, que j'appellerai *facettes*, en lesquelles les A' arêtes divisent chaque polyèdre. En raisonnant sur ces facettes comme précédemment sur les faces, nous établirons les relations (1) à (6) dans lesquelles les lettres, maintenant affectées d'accents, seront relatives à la division des polyèdres en facettes. Nous serons donc encore conduit à une contradiction et le théorème sera démontré.

Il est bien évident que ce raisonnement est insuffisant, car, par

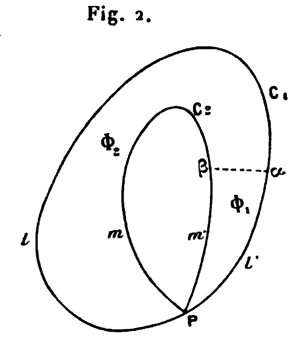
exemple, la relation d'Euler n'est pas vraie quand on considère une division d'un polyèdre convexe en parties quelconques, mais il est facile de le compléter.

Les A' arêtes conservées ne sont pas des traits tracés au hasard sur une surface convexe; nous savons que, s'il en passe une par un sommet, il en passe au moins quatre par le même sommet, de sorte que toute arête conservée fait partie d'un contour fermé formé de telles arêtes et que sur tout contour de cette espèce il y a au moins trois sommets. De plus, comme une arête n'est conservée que si les deux dièdres homologues correspondants sont inégaux, il n'y a pas d'arête conservée séparant deux parties de la même facette, comme serait (*fig.* 1) le trait $\alpha\beta$ dans une facette limitée par les contours C_1, C_2 et le trait $\alpha\beta$.

Les A' arêtes sont donc les frontières des F' facettes, considérées comme ensembles parfaits; chaque facette est une partie de surface convexe dont la frontière est formée d'un nombre fini d'arêtes et par suite d'un nombre fini d'ensembles d'un seul tenant formés d'arêtes, et sans points communs deux à deux. J'appellerai chacun de ces ensembles *un contour limitant la facette;* ces contours

Fig. 1.

Fig. 2.



pourront d'ailleurs avoir des points multiples. Une *calotte* est une facette limitée par un seul contour sans point multiple; une telle facette est équivalente à un polygone au point de vue de l'*Analysis situs.* Si toutes les facettes étaient des calottes, la relation d'Euler serait vraie.

Considérons (*fig.* 2) un des contours d'une facette Φ ayant un point multiple P. Ce contour Γ peut être considéré comme formé par la réunion d'autres contours C_1, C_2, ... ayant chacun le point P

pour point simple, car il est évident qu'il y a un nombre pair d'arêtes de Γ aboutissant en P. Soient α un sommet sur C_1, β un sommet sur C_2: traçons un trait $\alpha\beta$ tout entier, sauf les points α et β, intérieur à Φ; cela divise Φ en deux parties Φ_1, Φ_2.

Si l'on compte $\alpha\beta$ parmi les arêtes conservées, si l'on remplace Φ par Φ_1 et Φ_2, on change F', S', A' en

$$f = F' + 1, \qquad s = S', \qquad a = A' + 1;$$

donc on remplace $F' + S' - A'$ par le nombre égal $f + s - a$.

Or, après cette opération, la somme des ordres de multiplicité de P sur les contours de Φ_1 et de Φ_2 est évidemment l'ordre de multiplicité primitif de P sur le contour Γ de Φ. C'est dire qu'en répétant suffisamment de fois l'opération indiquée, on remplacera les facettes par des parties dont les contours n'ont pas de points multiples et cela sans modifier la valeur du nombre des parties, augmenté du nombre des sommets, diminué du nombre des arêtes.

Considérons (*fig.* 1) une facette Φ à p contours. Soient C_1 et C_2 deux de ses contours, α et γ deux sommets de C_1, β et δ deux sommets de C_2. Traçons sur la surface des traits $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ intérieurs à Φ (sauf α, β, γ, δ) et ne se coupant pas. Cela divise Φ en deux parties Φ_1, Φ_2, ayant respectivement p_1, p_2 contours, et il est évident qu'on a

$$p = p_1 + p_2.$$

Or, en remplaçant Φ par ses deux parties Φ_1, Φ_2, en comptant $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ parmi les arêtes, on remplace

$$F' \text{ par } f = F' + 1, \qquad S' \text{ par } s = S', \qquad A' \text{ par } a = A' + 2,$$

c'est-à-dire

$$F' + S' - A' \text{ par } f + s - a < F' + S' - A'.$$

En combinant les deux opérations précédentes on arrivera donc à remplacer les facettes par f' calottes, et cela en employant a' traits jouant le rôle d'arêtes et le même nombre S' de sommets; donc on a les relations

$$F' + S' - A' \geqq f' + S' - a' = 2.$$

Ainsi, dans le cas général, la relation (4) doit être remplacée par

$$(4') \qquad F' + S' - A' \geqq 2.$$

Si t', q', p', ... désignent les nombres de facettes dont la frontière totale est formée de 3, 4, 5, ... arêtes, les relations (2) et (3) subsistent entre les lettres accentuées, d'où la relation

$$(5') \qquad 4S' \geqq 8 + 2t' + 4q' + 6p' + 8h' + \ldots.$$

Dans le cas général, il est encore vrai qu'on obtiendra le même nombre de changements de signes en tournant successivement autour de chaque sommet et en parcourant successivement chacun des contours de chaque facette, mais à condition de préciser ce qu'on fera quand on arrivera en un point multiple d'un contour.

S'il s'agit par exemple du contour Γ, formé de C_1 et C_2, de la figure 2 et si l'on suppose que ce contour limite la face $\Phi_1 + \Phi_2$, si l'on arrive en P suivant αlP, il faudra repartir suivant P$m\beta$. Toute autre convention ferait que la variation de signe qui peut exister entre les arêtes consécutives autour du sommet P des deux lignes αlP, βmP ne serait pas comptée, tandis qu'on compterait plus de fois qu'on ne doit la variation de signe qui peut exister en P sur αlP$l'\alpha$ ou sur αlP$m'\beta$. Au contraire, on comptera comme on le doit les variations de signes si l'on convient qu'on parcourra successivement chacun des contours des facettes de telle façon qu'un observateur, suivant le mobile et placé debout sur la surface à l'extérieur de cette surface, voie constamment la facette autour de laquelle il tourne à sa gauche; de sorte que, lorsqu'il arrive en un sommet, il en repart suivant l'arête placée, pour l'observateur, immédiatement à la droite de celle d'arrivée. Et cela prouve bien que toutes les variations de signes entre arêtes consécutives en un sommet sont comptées une fois et une seule.

Or, si l'on désigne par $p(x)$ le plus grand entier pair non supérieur à x, le nombre total de variations de signes, obtenu en parcourant successivement les contours d'une facette, sera, si ces contours ont x_1, x_2, ... côtés,

$$p(x_1) + p(x_2) + \ldots.$$

Mais il est évident qu'on a

$$p(x_1) + p(x_2) + \ldots \leqq p(x_1 + x_2 + \ldots),$$

et, par suite, le nombre N' défini par l'égalité (1) entre lettres accentuées fournit une limite supérieure, peut-être inutilement élevée, du nombre des variations de signes. 4S' en est une limite inférieure;

nous avons *a fortiori* l'inégalité (6) entre lettres accentuées; le théorème est donc démontré et, en somme, par la méthode même de Cauchy.

On voit qu'on peut même dire que le cas examiné par Cauchy, où toutes les facettes sont des calottes, est le cas le plus défavorable pour l'emploi de sa méthode, puisque c'est celui dans lequel on trouve la plus petite limite inférieure pour $4S' - N'$. Cependant, comme l'emploi de cette méthode exige dans le cas général quelques explications, on préférera peut-être pour ce cas le raisonnement géométrique suivant :

Toute facette est un ensemble connexe de faces, de sorte que les points n'appartenant pas à une facette constituent une ou plusieurs calottes qui seront dites *complémentaires de la facette.* Les facettes $\Phi_1 + \Phi_2$ des deux figures 1 et 2 donnent lieu à deux calottes. Une calotte n'a qu'une calotte complémentaire.

Ceci posé, reprenons nos deux polyèdres P et P′ divisés en facettes homologues égales. Soit sur P une facette Φ ayant plusieurs calottes complémentaires; soient X l'une d'elles, Y la calotte complémentaire de X, C la frontière commune de X et de Y; Φ', X′, Y′, C′ les éléments homologues sur P′.

Φ étant une facette est superposable à Φ'; si l'on réalise cette superposition C vient en C′, et, si l'on suppose Y entraînée avec Φ, Y vient en Y_1. Soit P'_1 le polyèdre $X' + Y_1$; c'est un polyèdre convexe formé de faces égales à celles de P et disposées de la même manière; or, si l'on compare P et P'_1 par le procédé qui a été employé pour comparer P et P′, on est conduit à diviser P en facettes qui sont les mêmes que précédemment; seulement la facette Φ et toutes celles contenues primitivement dans Y sont remplacées par la seule facette Y. On a donc dans la comparaison de P et P'_1 au moins une facette non calotte de moins que dans la comparaison de P et P′. Si P'_1 a des facettes qui ne sont pas des calottes, on formera pareillement un polyèdre P'_2, et ainsi de suite.

On sera conduit ainsi à comparer deux polyèdres P et P'_ν à faces égales disposées de la même manière et tels que leur comparaison n'introduisent que des calottes comme facettes. Le raisonnement de Cauchy permet alors d'achever la démonstration.

On peut encore remarquer que P'_ν n'est autre que P'_1 si les facettes contenues dans X sont toutes des calottes; or je dis qu'on peut supposer qu'il en est bien ainsi.

Soient en effet m une facette quelconque, x l'une de ses calottes complémentaires; ou bien x peut être prise pour la calotte X cherchée, ou bien dans x il y a des faces qui ne sont pas des calottes. Soit n une de ces facettes; une au moins des calottes complémentaires de n est entièrement intérieure à x; si y est une telle calotte, ou bien elle peut être prise pour la calotte X, ou bien on raisonnera sur y comme sur x. Et l'on arrive finalement à trouver la calotte X jouissant de la propriété indiquée.

Du théorème démontré on pourra conclure, avec Cauchy, que *deux polyèdres convexes fermés, dont les faces sont semblables et disposées de la même manière, sont semblables* (à condition toutefois d'admettre un rapport de similitude négatif pour le cas où l'un des polyèdres serait égal à un homothétique inverse de l'autre).

Du théorème de Cauchy il résulte en particulier qu'un polyèdre convexe est indéformable. On sait depuis les recherches de M. Bricard (*Journal de Mathématiques,* 1897) que cela n'est plus vrai en général pour les polyèdres quelconques, mais le raisonnement de Cauchy permet de démontrer l'indéformabilité de certains polyèdres non convexes. Voici comment :

Considérons un polyèdre P; si on le déforme infiniment peu, il devient P_1. Dans le passage de P à P_1 les dièdres ont varié de grandeur, mais le sens de leur concavité est resté le même. Se basant là-dessus on pourra, dans certains cas, affecter de signes les arêtes des dièdres qui ont varié, et cela suivant une loi telle qu'on puisse affirmer qu'en tournant autour de chaque sommet on trouvera ou o ou au moins 4 changements de signes. Toutes les fois qu'on pourra faire cela et que P sera simplement connexe, le raisonnement de Cauchy prouvera l'égalité de P et de P_1.

Il me paraît inutile de donner un exemple particulier qui ne présenterait aucun intérêt, mais peut-être pourrait-on délimiter de cette manière des classes assez étendues de polyèdres indéformables.

— Dans la quatorzième édition de ses *Éléments de Géométrie,* que j'ai sous les yeux, Legendre dit en note, p. 326 : « La démonstration que nous donnons ici est, à quelques développements près, la même que M. Cauchy a présentée à l'Institut en 1812, et qu'il a découverte en partant de quelques idées qui avaient été proposées pour le même objet dans la première édition de ces *Éléments,* p. 327 et suivantes. »

Cette affirmation est d'accord avec ce que dit Cauchy au début de son Mémoire.

Il y aurait quelque intérêt à se reporter au passage cité par Legendre; la première édition ([1]) des *Éléments de Legendre* doit se trouver facilement dans les grandes bibliothèques parisiennes, peut-être même sur les quais.

Legendre donne les renseignements suivants sur l'origine du problème. On trouve en tête du XIe Livre d'Euclide la définition 10, ainsi conçue :

« 10. Deux solides sont égaux et semblables, lorsqu'ils sont compris dans un même nombre de plans égaux et semblables chacun à chacun. »

Dans son Ouvrage : *Euclidis Elementorum libri sex*, etc., Glasguæ, 1756, p. 388 et suiv., Robert Simson examine cette définition. Tout d'abord il remarque qu'il s'agit d'un véritable théorème à démontrer, mais il fait observer qu'Euclide n'a considéré que des polyèdres dont les angles polyèdres sont trièdres, auquel cas le théorème est évident. Robert Simson croit d'ailleurs que le théorème en question est faux dans le cas général, et il le prouve en construisant deux solides inégaux à faces égales, d'une part, en ajoutant à un polyèdre quelconque P une pyramide p ayant pour base l'une des faces du polyèdre P; d'autre part, en retranchant du polyèdre P la pyramide symétrique de p par rapport à la face considérée.

Legendre remarque avec raison que l'un au moins des deux solides ainsi formés a des « angles rentrants » et qu'il conviendrait d'exclure ces angles si l'on veut considérer seulement les corps qu'Euclide étudiait.

De là l'énoncé qui a été adopté ici.

Les remarques de Simson et de Legendre concernent aussi la définition des polyèdres semblables proposée par Euclide; dans le cas des polyèdres convexes cette définition constitue en réalité le théorème énoncé plus haut.

H. Lebesgue.

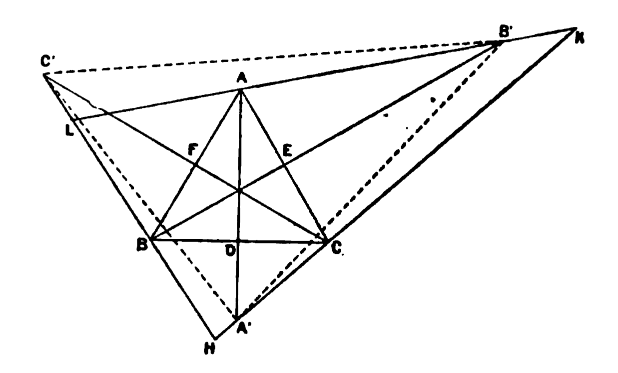
([1]) C'est, je crois, celle de 1794; on la trouve, à Paris, à la Bibliothèque de l'Université, par exemple. E. M.

QUESTIONS.

3557. [K 1] Sur les prolongements des hauteurs d'un triangle équilatéral de côté l, on prend des segments quelconques

$$DA' = a, \qquad EB' = b, \qquad FC' = c.$$

Les droites A'C, B'A, C'B déterminent le triangle HKL dont



on demande l'aire et le périmètre. Les triangles A'B'C' et HKL sont-ils semblables? *Sorus.*

[D'après l'italien. (La Réd.)]

3558 [O 5 b] Je désire connaître l'expression de l'aire d'un cône ayant pour base une circonférence et ayant une génératrice perpendiculaire au plan de la base.

Sorus.

[D'après l'italien. (La Réd.)]

3559 [J2e] En vue d'une application météorologique, je suis amené au problème suivant :

Soit un nombre très grand de boules portant des numéros 0, 1, 2, ... ; la probabilité de tirer une boule portant le numéro x est connue et égale à φ_x. On tire successivement p boules, marquées q_1, q_2, ..., q_p, en remettant chaque fois la boule tirée avec les autres ; quelle est la probabilité pour que

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_p \geqq \alpha,$$

α étant un nombre donné. Je désirerais une formule *aussi simple que possible,* permettant une application numérique, pour $\alpha = 100$ et $p = 30$ par exemple.

Ch. Goutereau.

Remarque. — Soit $P(\alpha, p)$ la probabilité cherchée; on aura la formule de récurrence :

$$P(\alpha, p) = \varphi_0 P(\alpha, p-1) + \varphi_1 P(\alpha-1, p-1) + \ldots$$
$$+ \varphi_{\alpha-1} P(1, p-1) + \varphi_\alpha + \varphi_{\alpha+1} + \ldots,$$

avec

$$P(0, p) = 1.$$

Il reste à trouver une expression aussi simple que possible de $P(\alpha, p)$ en fonction de α et p.

On peut également se poser le problème au point de vue de la théorie des erreurs d'observation, et obtenir la solution *théorique* par une intégrale définie multiple.

Voir encore Laplace, *Œuvres,* t. VII : *Théorie analytique des Probabilités,* Paris, Gauthier-Villars, 1886, p. 265 et 270, où il y a peut-être les éléments d'une réponse.

E. Maillet.

3560. [Σ] (**1907**, 2, 146, 268 ; **1908**, 4 ; **1909**, 25).

PRIX ACADÉMIQUES.

ACADÉMIE DES SCIENCES MORALES ET POLITIQUES (PARIS).

Philosophie. — Prix Bordin : 2500fr : Nicolas de Cusa. Manuscrits à faire parvenir avant le 31 décembre 1909.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Sujet I. — On demande un exposé systématique et didactique des recherches récentes sur les équations aux dérivées partielles du second ordre (Prix de 800^{fr}).

Sujet II. — Exposer et compléter les recherches faites sur le calcul des variations depuis 1850 (Prix de 800^{fr}).

Mémoires, en français ou en flamand, à adresser avant le 1er août 1910. (*Voir* **1907**, 268).

H. Brocard, La Rédaction.

3561. **[O2j]** Connaît-on quelque courbe, définie par sa génération géométrique ou mécanique, qui ait des points de rebroussement de la deuxième espèce réels et non situés sur la droite à l'infini du plan ?

G. Loria (Gênes).

3562. **[K8]** Soit un quadrilatère ABCD, dont les angles sont α, β, γ, δ; j'appelle δAB, par exemple, la distance d'un point quelconque du plan au côté AB ; démontrer géométriquement qu'on a pour tout point du plan deux relations qui rentrent l'une dans le groupe (1), l'autre dans le groupe (2) suivants :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\delta AC.\overline{AC}\sin\alpha\sin\gamma \pm \delta BD.\overline{BD}\sin\beta\sin\delta \\ &= \delta AB.\overline{CD}\sin\gamma\sin\delta + \delta CD.\overline{AB}\sin\alpha\sin\beta, \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\delta AC.\overline{AC}\sin\alpha\sin\gamma \pm \delta BD.\overline{BD}\sin\beta\sin\delta \\ &= \delta AD.\overline{BC}\sin\beta\sin\gamma + \delta BC.\overline{AD}\sin\alpha\sin\delta. \end{aligned}$$

Si la relation (1) relative au point du plan considéré a le signe + dans son premier membre, la relation (2) relative à ce même point a le signe — et inversement (AC et BD sont les diagonales).

G. Espanet.

3563. **[V7]** Je possède un exemplaire de l'Ouvrage suivant : Les *Éléments d'Euclide* expliquez d'une manière

nouvelle et très facile, avec l'usage de chaque proposition pour toutes les parties des Mathématiques, par le P. Claude-François Milliet Dechales, de la Compagnie de Jésus. A Paris, chez Estienne Michallet, rue Saint-Jacques, à l'Image S. Paul, proche la Fontaine Saint-Severin, 1677. Je désirerais une Notice biographique sur l'auteur; cet Ouvrage étant surtout intéressant pour ses applications, y aurait-il intérêt à en faire l'analyse au point de vue historique?

J. Rose (Chimay).

3564. [**V6, V7**] Daniel Schwenter indique, dans ses *Mathematische Erquikstunden* (Nüremberg, 1626, p. 79), que la question traitée par lui sous le nom de *Josephsspiel* se trouve déjà dans Christoff Rudolff Schulzen. Je voudrais savoir dans quelle œuvre de cet auteur. Si je ne me trompe, ce n'est ni dans le *Cos* de Christoff Rudolff (éditions de 1525 et 1553), ni dans le *Rechenbuch* de 1540 (2. Ausg.), ni dans la *Beispielsammlung* de 1530.

W. Ahrens (Magdebourg).
[D'après l'allemand. (La Réd.)]

3565 [**V7**] Indiquer où je puis trouver la biographie de *Beaugrand* (correspondant de Torricelli, etc.).

Armand Lerner (Bucarest).

3566. [**V7**] Je désire connaître la bibliographie de l'*Histoire de la Géométrie,* par *Montmort.*

Armand Lerner (Bucarest).

3567. [**V7**] Je désire connaître la bibliographie de *Geometria promota in septem de cycloïde libris,* par *Laloubère* (Montucla, *H. Math.,* 1758, t. II, p. 37) ou *Laloubère* (Œuvres de Pascal).

Armand Lerner (Bucarest).



RÉPONSES.

949. (**1896**, 273) (J. BOYER) (**1897**, 141, 275 ; **1898**, 154 ; **1901**, 313 ; **1904**, 76). — Les manuscrits, la bibliothèque et les papiers d'Arbogast sont bien devenus la propriété de Français, comme l'ont rapporté Férussac (*I. M.*, **1896**, 273) et Libri (*J. des Savants*, octobre 1839, *I. M.*, **1897**, 141), mais je dois appeler aussi l'attention sur un autre article de Libri intitulé *Fermat*, publié dans la *Revue des Deux Mondes* (15 mai 1845). H. BROCARD.

1193. (**1898**, 2 ; **1908**, 242) (H. BROCARD). — *Travaux scientifiques de Napoléon* (**1909**, 32).

CARL HERBST. — *Die Napoleonsaufgabe. Ein Beitrag zur Geometrie des Zirkels* (*Unterrichtsbl. für Math. u. Naturw.*, Berlin, O. Salle, t. XV, 1909, p. 27-30).

O. DEGEL (Bayreuth).

Solution de M. WELSCH, transmise à M. Brocard.

1237. (**1898**, 32 ; **1908**, 244) (E. DUPORCQ). — La question de réalisation matérielle et sans frais d'un système articulé gauche me paraît toute résolue par le cache-pot en baguettes assemblées en treillis affectant la forme d'un hyperboloïde réglé. Ce système a été étudié par A. MANNHEIM : *Théorie géométrique de l'hyperboloïde articulé* (*C. R.*, t. CII, 1886, p. 253-256) ; *Sur l'hyperboloïde articulé et l'application de ses propriétés à la démonstration du théorème de M. de Sparre* (*C. R.*, t. CII, 1886, p. 501-504).

Recta.

1275. (**1898**, 98 ; **1908**, 267) (BARBARIN). — *Équations des coniques déterminées par les intersections de cinq droites* **1, 2, 3, 4, 5** (**1909**, 32).

Si

$$\alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 = 0, \quad \mathbf{1},$$
$$\beta x + \beta_1 y + \beta_2 = 0, \quad \mathbf{2},$$
$$\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 = 0, \quad \mathbf{3},$$
$$\delta x + \delta_1 y + \delta_2 = 0, \quad \mathbf{4},$$
$$\varepsilon x + \varepsilon_1 y + \varepsilon_2 = 0, \quad \mathbf{5}$$

sont les équations des cinq droites, on représentera par (432), par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \delta & \gamma & \beta \\ \delta_1 & \gamma_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

La conique déterminée par les cinq intersections

$$(1,2),\quad (2,3),\quad (3,4),\quad (4,5),\quad (5,1)$$

aura pour équation

$$2[\mathbf{13}(245) + \mathbf{24}(351) + \mathbf{35}(412) + \mathbf{41}(523) + \mathbf{52}(134)]$$
$$- [\mathbf{51}(234) + \mathbf{12}(345) + \mathbf{23}(451) + \mathbf{34}(512) + \mathbf{45}(123)] = 0.$$

Les cinq droites déterminent onze autres coniques qu'il est facile d'obtenir à partir de la précédente; elles correspondent aux intersections successives des cinq droites prises dans les ordres suivants:

13524, 12435, 23541, 34152, 45213,
51324, 13254, 24315, 35421, 41532, 52143.

G. Espanet.

1278. (**1898**, 98 ; **1909**, 8) (*H. Braid*). — La forme de l'équation de la droite $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ est due au mathématicien allemand O. Hesse ; dans certains Ouvrages classiques elle est du reste connue sous le nom de *forme normale de Hesse*.

J. Rose (Chimay).

1295. (**1898**, 125) (V. Retali) (**1899**, 18 ; **1909**, 55). — *Articles sur les quartiques à un point double.*

(*M. A.*, t. IV, 1871) (F. Brioschi). — (*Les tangentes doubles à une courbe du quatrième degré avec un point double*) (4 p. fr.).

(Ibid.) (L. CREMONA). — *Observations géométriques à propos de la Note de M. Brioschi* (4 p. fr.).

(Ibid., t. V, 1872) (A. BRILL). — *Note sur les tangentes doubles d'une courbe de quatrième ordre à un point double* (6 p. fr.).

(*R. M. S., Vuibert,* t. XIV, mai 1904, p. 473-479) (LECOMTE). — *Sur certaines quartiques unicursales* (*à un seul point double*). Renvoi à une étude de M. P. Appell, parue au cahier de septembre 1898 et à un article de M. Andoyer sur la théorie des cycles (juin 1895).

(Ibid.) (septembre 1904, p. 569-571) (J. RICHARD). — *Sur les courbes unicursales du quatrième degré.*

Autres références, **1899**, 18. H. BROCARD.

2767. (**1904**, 94) (J. JAN). — *Cylindroïde* (**1904**, 207; **1905**, 47). — Dans une communication que j'ai faite au *Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences* en 1893 (Besançon), j'ai étudié la transformation du cylindroïde (conoïde de Plücker) par rayons vecteurs réciproques (voir *I. M.*, **1905**, 182), et j'ai établi géométriquement la propriété suivante :

Si une surface se déplace de façon qu'un de ses points décrive une droite fixe à laquelle elle reste normale, qu'elle admette comme plans principaux de courbure deux plans rectangulaires fixes passant par la droite considérée, et que sa courbure moyenne en ce point soit constante, les asymptotes de l'indicatrice engendrent un conoïde de Plücker.

Cette propriété est à rapprocher de celle signalée par M. Haag (**1905**, 47) :

Les asymptotes des indicatrices des surfaces parallèles aux points de ces surfaces situées sur une normale commune forment un conoïde de Plücker.

Voir également, en ce qui concerne le conoïde de Plücker, une Note de M. Mannheim (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1888) sur un mode de génération de cette surface, ainsi qu'une étude de M. Picquet (*Bulletin de la Société mathématique de France,* 1886) sur la construction du plan tangent et de la courbe d'ombre du conoïde. F. MICHEL.

2842. (**1904**, 260) (La Rédaction). — *Médaille Guccia* (**1909**, 13). — Au moment où nous mettions sous presse la réponse **2842** (**1909**, 13), paraissait le premier Volume du Congrès de Rome 1908, terminé aux pages 208-216 par le Rapport de M. Segre.

Nous y renvoyons le lecteur.

La Rédaction.

3026. (**1906**, 60) (G. Loria). — *Vie de Labatie* (**1906**, 224; **1907**, 86, 181; **1908**, 105). — A la demande de M. Laisant, M. le commandant Pinet, bibliothécaire de l'École Polytechnique, m'a fait parvenir la liste des services militaires, campagnes et décorations de Labatie (A.-G.-M.), tirée des Archives de l'École et du Ministère de la Guerre.

Labatie (Antide-Gabriel-Marguerite), né le 4 mars 1786 à Talissieu, canton de Champagne (Ain), admis dans l'artillerie le 1er octobre 1810, retraité comme chef d'escadron en 1843, décédé à Bourg (Ain), le 16 décembre 1866, etc., etc.

Si la mention *de Douai* (**1908**, 105) se rapporte au même personnage, elle peut signifier que Labatie, sans être né à Douai, y aurait terminé ses études. C'est ce qu'on pourra sans doute aisément vérifier; mais si, au contraire, le mathématicien Labatie, auteur du théorème cité, est réellement originaire de Douai, il n'aura plus rien de commun avec Labatie, officier d'artillerie, et alors toute la démonstration faite sur le nom de celui-ci deviendra sans objet.

En fait, l'indication *de Douai* laisse une incertitude : il faudrait entreprendre de nouvelles recherches pour dissiper l'équivoque.

C'est aussi le motif pour lequel je m'abstiens de publier le détail des services militaires. J'y relèverai cependant que Labatie, à son entrée à l'École Polytechnique le 1er octobre 1807, était déjà lié au service comme engagé volontaire au 4e régiment d'artillerie à pied, le 1er janvier 1806. Or, à ce moment, la portion principale du régiment, forte de 7 compagnies, était à Grenoble, tandis que 13 des 15 autres compagnies tenaient garnison hors de France et particulièrement en Italie, où celles de Grenoble rejoignirent en avril 1806.

Cette circonstance contrarie singulièrement la supposition que Labatie aurait achevé ses études à Grenoble, à l'École centrale de l'Isère, la plus rapprochée du foyer de sa famille, alors à Marlieu (Ain), selon toute probabilité.

L'impérieux appel *de Douai* reprend donc sa force et remet tout en question.

En résumé, ainsi que je l'ai observé (**1906**, 224, et **1907**, 86), il faudrait absolument savoir si les brochures de 1832 et 1835 portent l'indication ou les initiales de prénoms autres que ceux qui ont été transcrits ci-dessus. H. Brocard.

3029. (**1906**, 60) (T. Lemoyne). — *Démonstration élémentaire de la série de Leibniz donnant* π. — *Voir* le 3e cahier du *Zeitschrift f. math. und naturwiss. Unterricht* de Hoffmann, maintenant édité par Schotten, 1909, p. 148. N. Plakhowo (Russie).

3230. (**1907**, 126) (*Nester*). — *Facteur d'un nombre* (**1907**, 258; **1909**, 14). — M. G. Candido, qui avait aussi envoyé une réponse, mentionnée au Tome XIV (**1907**, p. 258), m'a obligeamment communiqué son étude citée de 1903, intitulée : *La formula di Waring e sue notevoli applicazioni* (Lecce, 1903, in-8°, 66 p.), où se trouvent diverses remarques, avec (p. 20-22) la démonstration désirée du théorème de Catalan.

Je tire de cette notice les indications bibliographiques nécessaires à une réponse plus précise.

Le *J. M.* de Bourget avait donné en 1880, sous le n° 273 (F. Fabre), la question de la condition de divisibilité de

$$(x+y)^m - x^m - y^m$$

par

$$x^2 + xy + y^2.$$

Il a été montré (1881, p. 282-283) qu'il fallait que m fût de la forme

$$6a \pm 1,$$

mais la solution n'a pas été poussée plus loin.

En 1883, Catalan proposa la question 80 (*J. S.*, p. 240), où il précisait l'unique solution du facteur 7.

La question 80 n'a pas été, à ma connaissance, résolue dans le *J. S.*, mais Catalan a jugé devoir la proposer en 1884 dans les *N. A.* sous le n° 1489 (p. 351) et la résoudre avec développement dans ce même recueil (1885, p. 520-524).

La formule de Waring a d'ailleurs donné le sujet de plusieurs études et contributions, exposées ou rappelées dans la notice précitée. H. Brocard.

3341. (**1908**, 31) (E. Maillet). — *Sur le travail mathématique.* — Il est hors de doute que la température influe beaucoup sur la faculté de penser. Quand la chaleur est de 30° et au-dessus, je suis porté à une somnolence qui empêche ou arrête tout effort d'attention. Il est impossible de coordonner les idées, et la plume cesse d'être commandée et tombe des doigts.

L'action du froid est moins marquée, mais elle se manifeste aussi par une torpeur. Je n'ai pas de mesure pour le degré de froid.

Quant à l'influence de la pression, elle s'exerce très directement sur les voies respiratoires et, au-dessus d'une certaine limite, elle favorise le jeu des poumons ou plutôt l'hématose, et agit par là même sur le cerveau.

Un temps sombre et voilé engourdit la pensée. Le retour du soleil accroît la faculté visuelle.

Comparer (*E. M.*, 1908, p. 158-160): *Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens,* réponses à la question **25** *b.*

Recta.

3371. (**1908**, 78) (W. Kapteyn). — *Équation différentielle* (**1908**, 255). — L'équation différentielle

$$\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy = 0,$$

où M et N sont des polynomes du second degré au plus, a été étudiée par Jacobi, Björling, Bendixon, Liapounoff, Darboux, Painlevé, Poincaré, Dulac, et il convient d'y ajouter C. Harkema (*N. A.*, 1874, p. 545-548); mais une référence particulièrement importante est due à M. A. Winckler, qui a traité ce sujet avec grand développement : *Sur l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients rationnels du second degré* (*Sitz. Akad. Wien.*, t. LXIII, 1871, 37 pages).

E. Liminon.

3373. (**1908**, 97) (G. Lemaire). — *Valeur du pas du roi.* — Que valait le pas du roi le 8 février 1674 ?

D'après Pedro Medina, traduction Nicolas de Nicolaï (1618), cinq pieds valaient un pas géométrique.

D'après le *Dictionnaire universel françois et latin* (dit de Trévoux), Nancy, 1734, au mot *Pas :* « Le pas commun de l'homme est de deux pieds et demi. Le pas des Allemands, qu'on appelle autrement *géométrique,* est de cinq pieds de roi. »

L'Ouvrage cité donne la réduction des pieds, tant anciens que modernes, au pied de roi du Châtelet de Paris, tirée de plusieurs Mémoires et de mesures originales, ainsi que de travaux de Snellius, Riccioli, Scamozzi, MM. Petit, Picard et autres géomètres et architectes, par Daviler.

Le pied de roi est de 12 pouces ou 144 lignes.

Le pas de roi, désignant aussi le pas géométrique, devait donc être de cinq fois $0^m,324$ ou de $1^m,62$. *Devignot.*

3374. (**1908**, 97) (G. Lemaire). — *Valeur du pas géométrique.* — Que valent 50 pas géométriques?

D'après la réponse **3373**, ils valent 250 pieds de roi, ou $250 \times 0^m,324$ ou 81^m. *Devignot.*

3448. (**1908**, 220) (T. Lemoyne). — *Courbes d'ordre m* (**1909**, 63). — Une importante propriété des courbes de degré m à $\frac{m(m-3)}{2}$ points doubles, c'est d'être quarrables par les fonctions elliptiques. En d'autres termes, si une courbe a son maximum de points doubles moins 1, ses coordonnées sont des fonctions rationnelles d'un même sinus amplitude et de sa dérivée, ou des fonctions doublement périodiques de même période d'une même variable. [H. Laurent, *Théorie élémentaire des fonctions elliptiques* (*N. A.*, 1879, p. 152-158).]

Je rappellerai que le principe de cette remarque est dû à Clebsch.

Pour la bibliographie des quartiques binodales, on en trouvera un résumé dans le cahier nouvellement paru (1909) de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition allemande), relatif aux courbes planes algébriques, par MM. G. Kohn et G. Loria.

Devignot.

La première réponse de M. *Devignot* ne correspond pas tout à fait à la question que j'avais posée. Je demandais des propriétés des courbes d'ordre n à $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles. En voici quelques-unes :

1. Les coordonnées x et y d'un point d'une courbe de degré n à $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'une variable z et de la racine carrée d'un polynome du quatrième degré en z (Clebsch).



2. Il résulte de **1** que la quadrature d'une courbe de genre *un* dépend des fonctions elliptiques au plus (Clebsch).

3. Étant donnée une courbe d'ordre n à $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles, toutes les courbes d'ordre $n-1$ qui passent par les $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles et par $2n-2$ points choisis arbitrairement sur la courbe forment un faisceau d'ordre $n-1$.

Ce faisceau ne contient que quatre courbes qui ont un contact simple avec la courbe donnée. Menons les tangentes en un des points fixes à ces quatre courbes. Le rapport anharmonique de ces quatre tangentes est indépendant de la position des $(2n-2)$ points choisis arbitrairement (Clebsch).

4. Les coordonnées d'une courbe de genre *un* et d'ordre n s'expriment par des fonctions doublement périodiques et d'ordre n d'un paramètre (G. Humbert).

Aux références que j'ai indiquées dans l'espoir de faciliter une réponse, j'ajouterai les suivantes :

G. Humbert, *Sur les courbes de genre un* (*C. R.*, t. XCVII, 1883 p. 989, 1136 et 1452).

O. Schlesinger, *Sur les courbes de genre un* (*C. R.*, t. CVII, 1888, p. 224).

M. Marie, *Sur deux théorèmes de Clebsch relatifs aux courbes quarrables par les fonctions elliptiques ou par les fonctions circulaires* (*C. R.*, t. LXXXIV, 1877, p. 227).

T. Lemoyne.

3461. (**1908**, 245) (E. Maillet). — Je ne puis affirmer que les remarques de l'auteur de l'énoncé aient été expressément formulées par E. Cesaro dans ses *Lezioni di Geometria intrinseca* (1896), mais je l'engagerai à parcourir les pages 13 à 19, où est exposée, accompagnée d'exemples, la théorie des points et cercles asymptotes.

L.-N. Machaut.

Il y a deux parties dans ma question :

1° Un théorème qui me sert de point de départ ; je ne crois pas que E. Cesaro l'indique ; je suppose pourtant qu'il doit être connu,

car on le déduit facilement de la considération de la développée; mais il est en tout cas bien peu connu ;

2° Des applications de ce théorème pour lesquelles j'utilise *en partie* des idées et des méthodes de E. Cesaro.

E. Maillet.

3472. (**1908**, 261) (G. Russo). — *Mouvement harmonique.* — Si mes souvenirs sont exacts, c'est le problème des cordes vibrantes qui a donné naissance à ce nom. Divers auteurs s'en sont successivement occupés : Taylor, Daniel Bernoulli, d'Alembert, Euler, Lagrange et particulièrement Fourier dans sa *Théorie de la chaleur*, Riemann, Cantor, du Bois-Reymond. J. Rose (Chimay).

L'indication suivante fournira peut-être la réponse désirée :

La dénomination de *mouvement harmonique* donnée à une onde sinusoïdale a été motivée par l'assimilation au mouvement vibratoire observé et étudié en Acoustique. D'autre part, les périodes mesurées dans les phénomènes physiques sont généralement la résultante de plusieurs ondes superposées, et représentées par la formule de Fourier

$$A \sin\theta + B \cos\theta + C \sin 2\theta + D \cos 2\theta \ldots.$$

On peut les étudier, soit graphiquement, soit numériquement, par les procédés de l'analyse harmonique dus à lord Kelvin.

Voir *Annuaire du Bureau des Longitudes :*

1904. P. Hatt, *Explication élémentaire des marées* (1re Partie);

1905. P. Hatt, *Explication élémentaire des marées* (2e Partie);

1909. G. Bigourdan, *Les étoiles variables ;*

1909. C. Lallemand, *Mouvements et déformations de la croûte terrestre*, etc. *Vieujeu.*

3476. (**1908**, 274) (W. Gaedecke). — *Surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* (**1909**, 67). — *Voir :* Moutard, *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (*N. A.*, 1864, p. 306) ; *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre* (*Même recueil*, 1864, p. 536) ; *Lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre* (*C. R.*, 1864, p. 243) ;



Darboux, *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Gauthier-Villars, 1873);

Demoulin, *Principes de Géométrie anallagmatique.*

J. Rose (Chimay).

Voir G. Loria, *Teorie geometriche,* 1896, p. 107-108, où sont mentionnés des travaux de G. Darboux, 1864; Moutard, 1864; Laguerre, 1868; J. Casey, 1871; G. Loria, 1884; Humbert, 1885; Lachlan, 1886; Wolseley, 1892), auxquels il convient d'ajouter A. Mannheim, 1860 (*N. A.* et *Soc. philomat.*); G. Fouret (*N. A.*, 1883, p. 259-262, et *N. A.,* 1888, p. 113-116) et J. Hadamard (*Recherches des surfaces anallagmatiques par rapport à une infinité de pôles d'inversion, B. D.,* 1888).

Dr Charbonier.

3477. (**1908**, 274) (W. Gaedecke). — *Équation aux dérivées partielles* (**1909**, 68). — Solution de M. J. Rose (Chimay) semblable aux réponses publiées.

La Rédaction.

3478. (**1908**, 274) (W. Gaedecke). — *Intégrale elliptique* (**1909**, 68). — Solution de M. J. Rose (Chimay) semblable aux réponses publiées.

La Rédaction.

3481. (**1908**, 275) (W. Gaedecke). — *Lieux géométriques* (**1909**, 70). — 1° La tangente et la normale en M à une ellipse coupent les axes en T, T'; N, N'. Cherchons le lieu de M', point d'intersection de TN' et T'N.

Le triangle T'TN' admet OMM' pour triangle orthique; donc OT bissecte $\widehat{MOM'}$. — Le cercle (T'MM'N') passe par les foyers de l'ellipse. Le produit OM.OM' est égal à la puissance du point O par rapport à ce cercle, donc $OM.OM' = OF^2 =$ const.; M' se déduit donc de M par une symétrie suivie d'une inversion. Le lieu γ de M' est donc une inverse d'ellipse par rapport à son centre.

2° Les propriétés angulaires de la symétrie et de l'inversion montrent que la courbe γ touche, en M', le cercle ONN'M'. C'est donc l'enveloppe de ce cercle.

Soit N_1 le centre de ce cercle, milieu de NN'. Le lieu ε de N_1 admet pour podaire, par rapport à O, une homothétique de γ. On

peut en conclure que ε est une ellipse ; on peut aussi le voir comme suit :

3° Soient μ, μ' les projections de M sur les axes. On peut aisément démontrer que $\frac{ON}{O\mu} = \text{const.}$, $\frac{ON'}{O\mu'} = \text{const.}$ (propriété de l'ellipse assez peu remarquée, quelquefois utile). Le segment NN' se déduit donc de $\mu\mu'$ par deux homographies successives (de ces homographies particulières, appelées *affinités*, et qui reviennent à des projections cylindriques). Or, le milieu de $\mu\mu'$ décrit une ellipse ; donc aussi le milieu de NN'. On retrouve ainsi l'enveloppe du cercle (ONN').

4° La tangente à ε au point N_1 est perpendiculaire à OM', donc elle coïncide avec N_1T_1 (considérer en effet le cercle des neuf points du triangle T'TN' : N_1T_1 en est un diamètre, et N_1 est le milieu de l'arc OM'). Donc N_1T_1 enveloppe l'ellipse ε, qu'elle touche en N_1.

A. Decerf.

3484. (**1908**, 275) (A. Werebrusow). — *Formules algébriques.* — Les formules de M. W. en A et en A_3 sont erronées ; elles ont dû être inexactement transcrites.

E. Catalan a rencontré plusieurs identités analogues, et il a signalé d'autres décompositions.

Dans des Notes ou Mémoires sur quelques décompositions en carrés (*Nuovi Lincei*, 1881 et 1883) il a donné les formules suivantes:

$$\begin{aligned} A_4 &= a(a^2 - 3b^2 - 3c^2), \\ B_4 &= b(3a^2 - b^2 - c^2), \\ C_4 &= c(3a^2 - b^2 - c^2); \\ A_5 &= a(3b^2 - c^2 - a^2), \\ B_5 &= b(b^2 - 3c^2 - 3a^2), \\ C_5 &= c(3b^2 - c^2 - a^2). \end{aligned}$$

Les formules A_1 et A_2 donnent ici

$$21^3 = 44^2 + 10^2 + 85^2 = 56^2 + 70^2 + 35^2,$$

et les formules A_4 et A_5 donnent

$$21^3 = 4^2 + 86^2 + 43^2 = 20^2 + 94^2 + 5^2.$$

E. Liminon.



3490. (**1909**, 2) (R. Ravasco). — *Équation* $x^2 = 4y^3 - 3$. — On pose

$$x = 2z + 1,$$

et l'on obtient

$$z^2 + z + 1 = y^3,$$

équation proposée par M. Boutin, 1253 (**1898**, 75; **1908**, 244).

Dubouis.

Réponse analogue de M. Gleizes, qui renvoie à la question 3185 (**1907**, 53, 168, 192, 213, 283; **1908**, 234). La Rédaction.

L'équation donnée

$$(1) \qquad x^2 = 4y^3 - 3$$

devient, en multipliant par 16,

$$(4x)^2 = (4y)^3 - 48,$$

variante de l'équation

$$y^3 - x^2 = \pm a$$

étudiée ici à diverses reprises, et dont l'origine remonte à Fermat.

Cette équation paraît généralement n'admettre qu'un nombre fini de solutions.

Pour l'équation (1), je ne rencontre que les solutions

$$x = 1 \quad \text{et} \quad 37, \qquad y = 1 \quad \text{et} \quad 7;$$

j'ignore si elle peut en avoir d'autres.

Une intéressante bibliographie du sujet se trouve dans un article de Realis, *Sur une équation indéterminée* $x^3 + k = y^2$ (*N. A.*, 1883, p. 289-297).

Voir aussi *I. M.*, question 2512 (**1903**, 34, 283, 316; **1904**, 152; **1905**, 49, 79, 156). *Vieujeu.*

L'équation s'écrit

$$x^2 - 1 = 4(y^3 - 1);$$

x est donc impair et de la forme $2z + 1$,

$$(2z + 1)^2 - 1 = 4(y^3 - 1),$$

ou après réductions

$$(A) \qquad z^2 + z = y^3 - 1,$$

et nous retombons sur la question 1253.

Les solutions de (A)

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 18$$

et

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = 7$$

donnent pour la proposée

$$x_1 = 1, \qquad y_1 = 1,$$
$$x_2 = 37, \qquad y_2 = 7.$$

Stenacensis.

3496. (**1909**, 4) (G. Charpentier). — ***Prix d'une obligation de chemin de fer d'après un taux d'intérêt donné.*** — Il n'y a pas de formules simples pour faire ce calcul, surtout si l'on veut, et cela est important, tenir compte des impôts qui frappent les titres. Mais, cependant, les calculs ne sont pas très laborieux, grâce aux Tables d'Arnaudeau (Gauthier-Villars), qui donnent la décomposition du prix réel d'un titre en distinguant la nue propriété de l'usufruit.

Le problème inverse (recherche du taux et parité de titres) est plus difficile, et il dépend essentiellement de l'approximation désirée.

On trouvera des méthodes de calcul et des exemples complètement traités sur des titres de chemin de fer dans *Théorie et pratique des opérations financières* (*Encyclopédie scientifique,* Doin).

Barriol.

Soient :

X la valeur cherchée ;
i le taux de l'intérêt servi aux obligations ;
i' le taux de l'intérêt qu'on veut retirer du placement ;
r le revenu net de l'obligation ;
R la somme nette qu'on recevra, au remboursement, pour l'obligation proprement dite ;
σ la valeur actuelle probable, au taux i', de 1[fr] payable au moment du remboursement ;
λ la valeur actuelle des espérances mathématiques relatives aux lots.

X est décomposable en trois parties, savoir :

1° Le capital $\frac{r}{i'}$ qui donnerait, à lui seul, au taux i', le revenu r;

2° La valeur actuelle probable $\sigma\left(R - \frac{r}{i'}\right)$ de la somme $\left(R - \frac{r}{i'}\right)$ qui complétera le capital R au moment du remboursement ;

3° La valeur λ, définie ci-dessus.

Les autres quantités étant des données, on n'a à déterminer que σ et λ.

Commençons par σ et désignons par :

N le nombre des obligations restant à rembourser, le premier des remboursements, supposés annuels, devant avoir lieu dans 1 an;

n le nombre des tirages restant à faire ;

t_n le taux d'amortissement en n années, au taux d'intérêt i ;

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ les probabilités *actuelles* de sortie d'une obligation aux 1er, 2e, ..., $n^{\text{ième}}$ tirages.

L'espérance mathématique actuelle, escomptée au taux i', de toucher 1fr si l'obligation sort au $m^{\text{ième}}$ tirage, vaut

$$\frac{\varpi_m}{(1+i')^m},$$

et σ n'est autre chose que

$$\sum_{m=1}^{m=n} \frac{\varpi_m}{(1+i')^m}.$$

ϖ_1, ϖ_2, etc. et par conséquent σ dépendent de la loi qui régit les tirages.

Si, comme cela a lieu en général pour les obligations de chemins de fer, le service de l'emprunt (intérêt et amortissement) est fait au moyen d'une annuité constante, la loi suivant laquelle ϖ_m varie avec m est très simple. On démontre facilement, en effet, que le nombre des obligations sortantes sera, dans ce cas, au $k^{\text{ième}}$ tirage,

$$\mathrm{N}t_n(1+i)^{k-1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Les N obligations ayant toutes actuellement la même chance de sortir à l'un quelconque des n tirages, on aura

$$\varpi_1 = t_n, \qquad \varpi_2 = t_n(1+i), \qquad \ldots, \qquad \varpi_n = t_n(1+i)^{n-1},$$

et comme vérification

$$\sum \varpi = t_n\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = 1.$$

Il résulte de là que

$$\sigma = \frac{t_n}{1+i'}\left[1 + \frac{1+i}{1+i'} + \left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^{n-1}\right]$$
$$= \frac{t_n}{i'-i}\left[1 - \left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^n\right].$$



Selon qu'on voudra se servir, pour le calcul numérique, des Tables de logarithmes ou des Tables d'amortissement, on pourra donner à σ une des deux formes suivantes :

$$\sigma_1 = \frac{i}{i'-i}\left[\frac{1-\left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^n}{(1+i)^n-1}\right],$$

$$\sigma_2 = \frac{i}{i'-i}\left(i'\,\frac{1+t_n}{1+t'_n}-i\right),$$

t'_n étant le taux d'amortissement en n années au taux d'intérêt i'.

Dans le cas où il n'y a pas de lots, X se réduit à

$$\frac{r}{i'}+\sigma\left(\mathrm{R}-\frac{r}{i'}\right)=\mathrm{X}'_n.$$

Si l'on donne à σ, dans cette formule, la forme σ_2 et qu'on pose

$$\alpha=\frac{\mathrm{R}i'-r}{i'-i}, \qquad \beta=\frac{\mathrm{R}i-r}{i'-i}=\alpha-\mathrm{R},$$

on trouve, en somme,

$$\mathrm{X}'_n=\alpha\,\frac{i+t_n}{i'+t'_n}-\beta$$

ou

$$\mathrm{X}'_n=\mathrm{R}-\alpha\left(1-\frac{i+t_n}{i'+t_n}\right),$$

α et β ne variant pas d'une année à l'autre, si R reste constant.

Supposons maintenant qu'il y ait, à chaque tirage, des lots dont le total s'élève à L_m pour le $m^{\text{ième}}$ tirage, et soit T_m le nombre des obligations sortantes à ce tirage. L'espérance mathématique correspondante vaudra actuellement, quel que soit le nombre des lots entre lesquels la somme L_m est répartie,

$$\frac{\mathrm{T}_m}{\mathrm{N}}\,\frac{1}{\mathrm{T}_m}\,\frac{\mathrm{L}_m}{(1+i')^m}=\frac{\mathrm{L}_m}{\mathrm{N}(1+i')^m},$$

d'où

$$\lambda=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{m=1}^{m=n}\frac{\mathrm{L}_m}{(1+i')^m}.$$

Si la somme attribuée annuellement aux lots est constante et égale à L, on a

$$\lambda=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}i'}\left[1-\frac{1}{(1+i')^n}\right]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}(i'+t'_n)}.$$

et l'obligation aura alors pour valeur

$$X_n = X'_n + \lambda = \frac{1}{i' + t'_n}\left[\alpha(i + t_n) + \frac{L}{N}\right] - \beta.$$

BONNEAU DU MARTRAY.

3533. (1909, 73) (BARISIEN, MAILLET). — *Constantes arithmétiques*. — Il est clair que le nombre $N_2 = \pm(N - N_1)$ peut s'écrire symboliquement, en acceptant des chiffres négatifs,

$$N_2 = \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \ldots \quad \alpha_{n-2} \quad \alpha_{n-1} \quad \alpha_n$$

avec la condition

$$\alpha_i + \alpha_{n+1-i} = 0$$

et le premier chiffre non nul étant positif.

Considérons le groupe initial $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k$ formé de chiffres nuls ou positifs et tel que $\alpha_{k+1} < 0$; on voit facilement que, m étant la base du système de numération, ce groupe donnera dans N_4

$$(\text{A}) \qquad \overline{0}^{\lambda}, \quad m-1, \quad \overline{2(m-1)}^{k-\lambda-1}$$

ou

$$(\text{B}) \qquad \overline{0}^{\lambda}, \quad m, \quad \overline{(m-1)}^{\mu-1}, \quad m-2, \quad \overline{2(m-1)}^{k-\lambda-\mu-1},$$

la notation $\overline{\alpha}^{\lambda}$ représentant λ chiffres consécutifs α vrais ou symboliques.

D'ailleurs, cette dernière expression (B) se ramène identiquement à la précédente (A).

On voit de même que le groupe symétrique $\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{n-k+1}$ sera

$$(\text{C}) \qquad \overline{2(m-1)}^{k-\lambda-1}, \quad m-1, \quad \overline{0}^{\lambda}$$

ou

$$(\text{D}) \qquad \overline{2(m-1)}^{k-\lambda-\mu-1}, \quad m-2, \quad \overline{m-1}^{\mu-1}, \quad m, \quad \overline{0}^{\lambda},$$

et que cette dernière expression (D) se ramène identiquement à

$$(\text{E}) \qquad \overline{2(m-1)}^{k-\lambda-\mu-1}, \quad m-1, \quad \overline{0}^{\lambda+\mu}.$$

Considérons le groupe suivant de chiffres $\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_{k+j}$ tous négatifs ou nuls et tel que $\alpha_{k+j+1} > 0$; on voit aisément que ce groupe

donnera dans N_k

(F) $$m - 1, \quad \overline{0}^{\,j-1}$$

ou

(G) $$m - 2, \quad \overline{m - 1}^{\,\nu-1}, \quad m, \quad \overline{0}^{\,j-\nu-1}.$$

D'ailleurs cette dernière expression (G) se ramène identiquement à la précédente (F).

Le groupe symétrique $\alpha_{n-k}\alpha_{n-k-1}\ldots\alpha_{n+1-k-j}$ donnera

(H) $$\overline{0}^{\,j-1}, \quad m - 1$$

ou

(I) $$\overline{0}^{\,j-\nu-1}, \quad m, \quad \overline{m - 1}^{\,\nu-1}, \quad m - 2,$$

et cette dernière expression (I) se ramène identiquement à

(J) $$\overline{0}^{\,j-\nu-1}, \quad m - 1, \quad \overline{2(m-1)}^{\,\nu}.$$

En continuant on verra qu'en posant

$$\alpha = 0, \qquad \beta = m - 1, \qquad \gamma = 2(m - 1),$$

N_k s'écrira comme il suit,

$$N_k = \overline{\alpha}^{\lambda_0}\beta\overline{\gamma}^{\lambda_1}\beta\overline{\alpha}^{\lambda_2}\beta\overline{\gamma}^{\lambda_3}\ldots\beta\overline{\alpha}^{\lambda_q}\,{}^{2}\beta\overline{\gamma}^{\lambda_{q-1}}\beta\overline{\alpha}^{\lambda_q+\lambda_0},$$

dont la loi de formation est évidente ; le chiffre du milieu, s'il en existe un, étant nécessairement α ou γ, jamais β.

Pour déterminer le nombre des N_k, nous considérerons la première moitié d'un N_k et nous voyons qu'au groupe $\beta\overline{\gamma}^{\lambda_i}$ correspondent $(\lambda_i + 1)$ groupes symétriques $\overline{\gamma}^{\lambda_i - k}\,\beta\overline{\alpha}^{k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \lambda_i)$; de même à $\beta\overline{\alpha}^{\lambda_j}$ correspondent λ_{j+1} groupes symétriques

$$\overline{\alpha}^{\lambda_j - k}\,\beta\overline{\gamma}^{k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \lambda_j);$$

donc à une première moitié donnée correspondent

$$(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\ldots(\lambda_r + 1) = \Pi(\lambda_i + 1)$$

secondes moitiés.

D'ailleurs, si σ est le nombre de chiffres de cette première moitié, il est clair qu'on aura

$$(\lambda_1+1)+(\lambda_2+1)+\ldots+(\lambda_r+1)=\Sigma(\lambda_i+1)=\sigma-1-\lambda_0$$

ou

$$=\sigma-\lambda_0,$$

selon que le dernier chiffre est ou n'est pas β.

En d'autres termes, comme λ_0 peut être choisi arbitrairement, on a l'inéquation

$$(1)\qquad (\lambda_1+1)+(\lambda_2+1)+\ldots+(\lambda_r+1)\leqq\sigma \qquad (\lambda_i\geqq 0).$$

Parmi les nombres (λ_i+1) admettons qu'il en existe μ_1 égaux à 1, μ_2 égaux à 2, μ_3 égaux à 3, etc.; on aura

$$(1)\qquad \mu_1+2\mu_2+3\mu_3+\ldots+\sigma\mu_\sigma\leqq\sigma \qquad (\mu_i\geqq 0),$$

et, en posant

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots+\mu_\sigma=\tau,$$

le nombre des premières moitiés des N_4 pour une solution déterminée de l'inéquation (1) sera

$$\frac{\tau!}{\mu_1!\,\mu_2!\ldots\mu_\sigma!}.$$

Le nombre des N_4 correspondants sera

$$\frac{1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots\sigma^{\mu_\sigma}\tau!}{\mu_1!\,\mu_2!\ldots\mu_\sigma!},$$

et le nombre total de ces nombres N_4 sera

$$\sum\frac{1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots\sigma^{\mu_\sigma}\tau!}{\mu_1!\,\mu_2!\ldots\mu_\sigma!},$$

la sommation étant appliquée à l'ensemble des solutions distinctes de l'inéquation (1).

Voici d'ailleurs le nombre exact y de valeurs de N_4 pour les nombres de x chiffres ($x\leqq 13$) :

x....	0 ou 1	2 ou 3	4 ou 5	6 ou 7	8 ou 9	10 ou 11	12 ou 13
y....	1	2	5	13	34	89	233

A. Auric.

Autre réponse de M. E. Malo.

3541 (**1909**, 75) (L.-G. du Pasquier). — A la page 4 de **1908**, il est conseillé de se référer à divers articles des cinq Volumes précédents, parmi lesquels on trouvera (**1907**, 146) les indications suivantes : Mémoires en castillan ou en latin (exclusivement), avec devise, le nom de l'auteur sous pli cacheté spécial, à adresser au Secrétariat de l'Académie, calle de Valverde, n° 26, à Madrid.

Le prix à décerner sera de 1500 pesetas, avec médaille d'or. L'étude couronnée sera publiée aux *Mémoires de l'Académie* et l'auteur en recevra cent exemplaires.

Pour tous détails, *voir* le programme rédigé par le Secrétariat. H. Brocard, La Rédaction.

3554. (**1909**, 99) (Gleizes). — *Résistance de l'air aux projectiles de petit calibre.* — M. Gleizes a bien voulu m'adresser sur ma demande les renseignements complémentaires ci-après au sujet de sa question. Le lecteur pourra au besoin se reporter au *Traité de Balistique extérieure* de M. le commandant Charbonnier, Paris, Béranger, 1904, 2e édition, p. 52, et, pour les fonctions $f(v)$ et $F(v)$ relatives aux projectiles d'artillerie, au même *Traité*, p. 23 et Table I, ou encore à un article de M. Chapel, *Revue d'Artillerie*, novembre 1894, p. 131 et 133. E. Maillet.

J'ai l'honneur de vous adresser ci-joint le tracé des courbes balistiques que vous me demandez.

Ces courbes ont été construites pour des valeurs de v comprises entre $145^{m},87$ et $638^{m},25$, vitesses correspondant aux limites expérimentales.

1° La courbe I représente la fonction

$$\varphi(v) = \frac{2c\,F(v)}{g} = -\frac{y''}{y'^2 \cos\theta},$$

$y = F_1(x)$ étant l'équation de la trajectoire étudiée, θ l'inclinaison de la tangente, c coefficient balistique, qu'il n'est pas possible de déterminer, et qui varie probablement avec la vitesse v.

$$\text{Pour } v = 638^{m},25, \qquad \varphi(v) = 128,736;$$
$$\text{Pour } v = 145^{m},87, \qquad \varphi(v) = 7,996.$$

2° La courbe II représente la fonction $\frac{\varphi(v)}{v^2}$:

$$\text{Pour } v = 638^m,25, \qquad \frac{\varphi(v)}{v^2} = 0,000\,316;$$

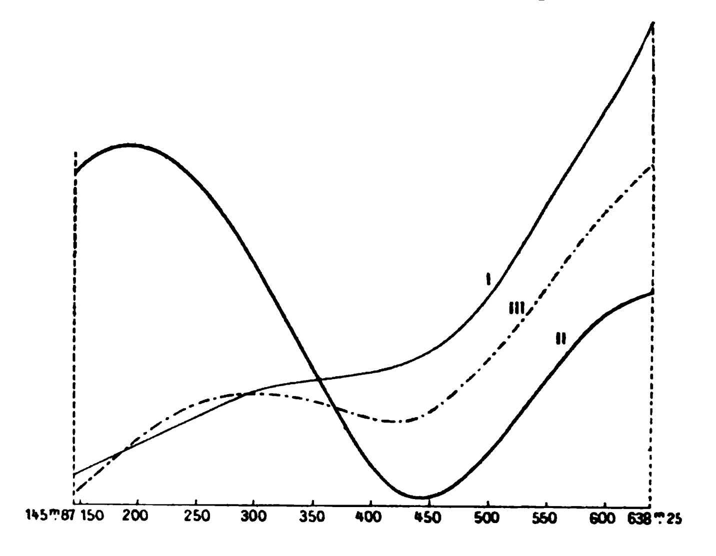
$$\text{Pour } v = 145^m,87, \qquad \frac{\varphi(v)}{v^2} = 0,000\,376.$$

3° La courbe III (pour mémoire) représente la fonction $\frac{\varphi(v)}{v}$:

$$\text{Pour } v = 638^m,25, \qquad \frac{\varphi(v)}{v} = 0,201\,695;$$

$$\text{Pour } v = 145^m,87, \qquad \frac{\varphi(v)}{v} = 0,054\,814.$$

Cette courbe III présente, dans les limites expérimentales, un



maximum, une inflexion et un minimum, pour des valeurs de v que je n'ai pas eu le temps de déterminer.

4° Je n'ai pas encore établi de formule empirique satisfaisante pour $f(v)$ et $F(v)$; mais je m'en occuperai dès que je le pourrai.

GLEIZES.



QUESTIONS.

3568. [V9] Y a-t-il des *Annales mathématiques* autres que les *Nouvelles Annales* après 1865, et quels sont ces recueils ? Armand LERNER (Bucarest).

3569. [A1b] Peut-on trouver des polynomes A, B, X, Y et Z, tels qu'on ait

1° $$A^2 + A = 2B^2,$$
2° $$3(X^2 + 2X) = (Y^2 + Z^2)^2.$$

Forte.

3570. [A1c, I1 et I19c] Le problème suivant a-t-il été résolu? Pour quelles valeurs de *n* la somme des cinquièmes puissances des *n* premiers nombres impairs est-elle un carré parfait? (Ed. LUCAS, *N. C.*, n° 88, 1876, p. 95.)

Forte.

3571. [O2j] Je désire connaître des exemples de courbes ayant des points à la fois point double et point de rebroussement. E.-N. BARISIEN.

3572. [O2e et f] Comment démontrer rigoureusement que, pour une courbe quelconque, l'enveloppe des cercles de courbure ne se compose *que de la courbe elle-même?*

E.-N. BARISIEN.

3573. [A1c et J1] Peut-on démontrer, d'une manière simple, que l'expression

$$C_{4n}^{2n} + 2[-C_{4n}^{2n-2} + C_{4n}^{2n-4} - C_{4n}^{2n-6} + \ldots + (-1)^n],$$

qui a $(n+1)$ termes alternativement positifs et négatifs, est toujours un carré parfait ? PAULMIER.

3574. [I19c] On a un nombre premier impair n et une infinité de systèmes de six nombres entiers positifs ou négatifs satisfaisant à

$$(x-y)(y-z)(z-x)x'y'z' \equiv \pm(x'-y')(y'-z')(z'-x')xyz \pmod{n}.$$

x, y, z, n sont premiers entre eux deux à deux, ainsi que x', y', z' et n'. Peut-on en tirer quelque conséquence ?

E. DUBOUIS.

3575. [I19c] J'ai trouvé deux solutions de

$$x^4 + y^4 + z^8 + t^8 = 3u^4,$$

où les valeurs de x, y, z, t sont les mêmes. On a, en effet,

$$(2, 5, 1, 3; 7) \quad \text{et} \quad (1, 3, 2, 5; 19).$$

Résoudre de même

$$x^n + y^n + z^{2n} + t^{2n} = pu^n,$$

avec un double système de solutions.

A. GÉRARDIN.

3576. [I19c] Je trouve

$$1^4 + 11^4 + 12^4 = 4^4 + 9^4 + 13^4,$$

qu'on peut écrire

$$2^8 + 3^8 + 13^4 = 11^4 + 12^4 + 1^8,$$

solution de

$$x^8 + (x+1)^8 + (y+1)^4 = (y-1)^4 + y^4 + (x-1)^8.$$

Donner des solutions de

$$x^{2n} + (x+1)^{2n} + (y+1)^n = (y-1)^n + y^n + (x-1)^{2n}.$$

A. GÉRARDIN.

3577 [V] Il est pour ainsi dire impossible de se procurer des tirés à part de travaux très intéressants publiés en Angleterre et en Amérique, principalement sur la théorie des nombres. Ce n'est qu'aux bibliothèques de Paris qu'on pourrait en avoir communication. Nous venons donc faire appel aux bonnes volontés et demander à nos collègues de nous adresser une ou deux collections de leurs articles sur les nombres, en les priant pour les articles rares de nous en envoyer copie ou de nous les confier pour quelques jours. J'offre de même en communication les Ouvrages de ma Bibliothèque.

Avec l'autorisation des auteurs je compte publier, dans *S. Œ.*, la traduction de certaines parties des Mémoires qui me seront adressés, et je serais reconnaissant des traductions faites par les auteurs eux-mêmes et jointes à leurs envois.

Voici une liste d'articles, à titre d'indication : Plana, (*Mém. Acad. Turin*, 1860, p. 130); Lawrence (*M. M.*, 1894-1895, vol. XXIV, p. 100; *Q. J.*, 1896, vol. XXVIII, p. 285 et 310; *Transact. L. M. S.*, 1897, vol. XXVIII, p. 465); Bickmore (*M. M.*, 1895, vol. XXV, p. 1; vol. XXVI, p. 1; *Tr. Brit. Ass. A. S.*, 1895, p. 614); Escott (*M. M.*, 1903, 1904, vol. XXXIII, p. 49); Birch (*M. M.*, 1902, vol. XXII, p. 52); Cole (*S. M. Am.*, décembre 1903, p. 134); Cunningham (*P. R. S. L.*, vol. XXVI, p. 261 et vol. XXVII, p. 54 et 85; *A. J. M.*, vol. I, p. 236; *Tr. L. M. S.*, 1903, vol. I, p. 175); P. Seelhoff (*Archiv. Math. Phys.*, 1, 70, 1884, p. 75); Werebrusow (*Math. Sbornik*, 1908, p. 497, 599, 622), etc.; puis, *en communication* si possible, Landry (*Décomposition des nombres* $2^n \pm 1$...).

A. Gérardin.

Observation importante. — Nous insérons les questions **3577** à **3580** de M. A. Gérardin; mais il est bien entendu que les réponses devront lui être envoyées directement par leurs auteurs à l'adresse suivante :

M. A. Gérardin, directeur du *Sphinx-Œdipe*, quai

Claude-le-Lorrain, 32, Nancy (Meurthe-et-Moselle, France).

LA RÉDACTION.

3578. [V] Où pourrais-je me procurer les Ouvrages suivants: LANDRY (*Décomposition des nombres* $2^n \pm 1, \ldots$); DASE (*Factorentafeln*); KULIK (*Tafeln der Quadrat und Kubik-Zahlen*, Leipzig, 1848) (voir *N. A.*, 1857, p. 81 du *Bulletin*), et les brochures suivantes d'ED. LUCAS, *Application de l'Arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers*, Paris, 1869; *Sur la théorie des nombres premiers* (*Atti Acad. Turin*, 1876) et *Théorèmes d'Arithmétique* (*Atti Acad. Turin*, 1876), *Géométrie du tissage* (1873).

J'ai une brochure intitulée : *Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (*N. C.*, Bruxelles, 1878). Cet article est-il le même que celui paru dans *A. J. M.*, 1878? Je voudrais aussi un Ouvrage sur les *fonctions numériques doublement périodiques*.

A. GÉRARDIN.

3579. [V] Je désirerais des détails sur la vie des Mathématiciens qui se sont occupés spécialement de la théorie des nombres : LE LASSEUR, LANDRY, AURIFEUILLE, PÉPIN, Ed. LUCAS et autres (biographies à consulter ou renseignements inédits).

Cette enquête, dans le genre de celle faite par l'*Enseignement mathématique*, semble aussi intéressante.

A. GÉRARDIN.

3580. [V] Je désirerais d'abord une liste de prêtres qui se sont occupés de la théorie des nombres (les PP. Pépin, Prestet, Malebranche, Reyneau, Jacquemet, etc.), puis la bibliographie de leurs Mémoires sur cette branche, et quelques renseignements (endroit où l'on pourrait consulter certains articles rares; cotes du fonds français, etc.).

A. GÉRARDIN.

RÉPONSES.

1275. (**1898**, 98; **1908**, 267) (Barbarin). — *Pentagone* (**1908**, 257; **1909**, 32, 125). — S'il est impossible, en général, comme je l'ai montré, d'obtenir l'équation de la conique circonscrite à un pentagone, sous la forme

$$A\Sigma\alpha^2 + B\Sigma\alpha\beta + C\Sigma\alpha\gamma = 0,$$

on peut, en revanche, et cela (qu'on veuille bien me permettre l'expression) sans *disséquer* les équations des côtés et tout en respectant la *symétrie*, l'écrire sous celle-ci :

$$\Sigma\lambda\alpha\beta + \Sigma\mu\alpha\gamma = 0,$$

les valeurs des λ et des μ ne dépendant que des coefficients des deux relations linéaires

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + E\varepsilon = 0,$$
$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\gamma + e\varepsilon = 0,$$

qui lient les trinomes α, β, γ, δ, ε.

Il est facile, en effet, de voir qu'en conséquence de ces relations la conique circonscrite peut être représentée par l'équation

$$(Ac - Ca)\alpha\gamma + (Ab - Ba)\alpha\beta + (Eb - Be)\beta\varepsilon = 0,$$

ou par chacune des quatre équations qui s'en déduisent par permutation tournante, et aussi par la suivante qui résulte des précédentes par addition :

$$\Sigma(Ab - Ba)\alpha\beta + 2\Sigma(Ac - Ca)\alpha\gamma = 0.$$

Du même coup, nous avons les équations des diagonales sous les deux types

$$(Ab - Ba)\alpha + (Eb - Be)\varepsilon = 0$$

et

$$(Bd - Db)\delta + (Bc - Cb)\gamma = 0,$$

et nous pourrion en tirer sans difficulté celles de la conique cir-

conscrite au premier pentagone dérivé, au deuxième et ainsi de suite.

WELSCH.

1277. (**1898**, 98; **1909**, 8) (T. CARONNET). — *Figures planes dont les centres de gravité de surface et de périmètre coïncident.* — De telles figures existent; soit FMF′ un contour quelconque fermé par le segment de ligne droite $FF' = 2c$; je prends cette droite comme axe des x, le milieu O de FF′ comme origine et une perpendiculaire élevée en O à FF′, du côté du contour FMF′, comme axe des y.

Soient :

P le périmètre FMF′, $FF' = 2c$ n'y étant pas compris;

η, ξ les coordonnées de π, centre de gravité de ce périmètre;

$K^2 = ch$ l'aire d'un triangle de base $2c$ et de hauteur h équivalente à l'aire déterminée par le contour FMF′ et la droite FF′;

β, α les coordonnées du centre de gravité Γ de cette surface.

Je trace du côté des y négatifs, pour fixer les idées, une demi-ellipse de foyers F et F′, de grand axe $2a$, et je cherche à déterminer sur cette ellipse un point M′, de manière à fermer le contour FMF′ par les deux segments FM′ et F′M′ et à produire la coïncidence des centres de gravité de l'aire totale FMF′M′ et du périmètre total $2a + P$; dans ce qui suit, l'angle φ est compté positivement au-dessous de l'axe des x, en partant de OF.

On établit sans peine les deux relations

$$(1)\qquad \frac{3\beta h - b^2 \sin^2\varphi}{3(h + b\sin\varphi)} = \frac{\eta P - ab\sin\varphi}{2a + P},$$

$$(2)\qquad \frac{3\alpha h + ab\sin\varphi\cos\varphi}{3(h + b\sin\varphi)} = \frac{\xi P + b^2\cos\varphi}{2a + P},\qquad \text{où}\qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

En éliminant φ entre elles, on aura une équation en a; une racine de cette équation donnera une solution de la question, s'il en résulte, pour le sinus de l'angle φ correspondant, une valeur plus petite que l'unité.

Le résultant est d'un degré fort élevé; l'élimination de φ étant faite, il faudra encore élever au carré pour faire disparaître le radical $\sqrt{a^2 - c^2}$.

Supposons, pour simplifier, que

$$\xi = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 0.$$

Les deux équations entre lesquelles il faut éliminer φ s'écriront alors

$$(3)\qquad (a-\mathrm{P})b^2\sin^2\varphi + 3b(\eta\mathrm{P} - ah)\sin\varphi + 3h[\beta(2a+\mathrm{P}) - \eta_1\mathrm{P}] = 0,$$

$$(4)\qquad (\sin^2\varphi - 1)\{[a(2a+\mathrm{P}) - 3b^2]\sin\varphi - 3hb\}^2 = 0;$$

l'hypothèse $\sin^2\varphi = 1$ conduit à l'équation du sixième degré en a,

$$\begin{aligned}(5)\qquad a^6 - 2\mathrm{P}a^5 &+ [\mathrm{P}^2 - 2(c^2 - 6h\beta + 9h^2)]a^4 \\ &+ 2\mathrm{P}[2c^2 - 3h(\beta - 2\eta)]a^3 \\ &+ \{(c^2 - 6h\beta)^2 - 2\mathrm{P}^2[c^2 + 3h(\beta - \eta_1)] \\ &\qquad\qquad + 9(c^2h^2 - \eta_1^2\mathrm{P}^2)\}a^2 \\ &- 2\mathrm{P}\{(c^2 - 6h\beta)[c^2 + 3h(\beta - \eta_1)] + 9c^2h\eta_1\}a \\ &\qquad + \mathrm{P}^2\{[c^2 + 3h(\beta - \eta_1)]^2 + 9c^2\eta_1^2\} = 0:\end{aligned}$$

l'hypothèse

$$(6)\qquad [a(2a+\mathrm{P}) - 3b^2]\sin\varphi - 3bh = 0$$

conduit à l'équation du cinquième degré en a

$$\begin{aligned}(7)\qquad (6h + 2\beta)a^5 &- \mathrm{P}(6h + 3\beta + 4\eta)a^4 \\ &- [12c^2(h + \beta) - \mathrm{P}\eta(3h + 2\mathrm{P})]a^3 \\ &+ [3c^2\mathrm{P}(3h + 3\eta_1 + 2\beta) + 9c^2h\eta_1 + \mathrm{P}^2(\beta - \eta_1)]a^2 \\ &+ \{6c^4(2h + 3\beta) - 3c^2\mathrm{P}[h\eta - 2\mathrm{P}(\beta - \eta_1)]\}a \\ &\qquad - 3c^4[h\mathrm{P} + 3h\eta - 3\mathrm{P}(\beta - \eta_1)] = 0.\end{aligned}$$

Je suppose que le contour FMF′ soit formé par les deux côtés du triangle équilatéral de base FF′ ; je pose $c = 1$, alors

$$h = \sqrt{3}, \qquad \mathrm{P} = 4, \qquad \eta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

L'équation (5) se réduit à

$$(a+2)^2(a-1)(a-2)^2(a-7) = 0.$$

Les trois premières racines sont faciles à interpréter ; l'hypothèse $a = 7$, avec $\sin\varphi = -1$, conduit au quadrangle non convexe ayant pour côtés de l'angle rentrant les côtés FM, F′M du triangle équilatéral, et pour côtés de l'angle opposé $\mathrm{FM'} = \mathrm{F'M'} = 7$; on vérifie bien simplement sur cette figure que les deux centres de gravité coïncident en un point de Oy situé à la distance $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ de O ; mais elle a encore un axe de symétrie.

L'équation (7) devient

$$(7') \qquad \sqrt{3}(40a^5 - 216a^4 + 308a^3 + 12a - 108) + 108a^3 + 81a^2 - 108a - 81 = 0.$$

La condition (6) doit donner

$$\frac{3bh}{a(2a+P) - 3b^2} < 1,$$

ou, pour le cas de l'exemple numérique choisi,

$$(6') \qquad a^4 - 8a^3 - 17a^2 + 24a + 36 > 0.$$

L'équation (7') admet une racine très voisine de 1,4 qui satisfait à la condition (6') : c'est une solution à laquelle correspondent à très peu près

$$b \sin\varphi = 0,74, \qquad a \cos\varphi = 0,89$$

et une figure n'ayant plus d'éléments de symétrie dans son ensemble.

Espanet.

Peut-être y a-t-il intérêt à faire remarquer que, au point de vue de l'Analyse, le problème revient à la résolution d'un système de deux équations intégrales, qui se réduisent à une seule, si l'on suppose que la figure possède un axe de symétrie.

E. Maillet.

3181. (**1907**, 52) (*Ygrec*). — *Travaux relatifs à l'itération* (**1907**, suppl., p. x, juillet, et p. xiii, octobre; **1908**, suppl., p. iv, mars; **1909**, 13).

O. Nicoletti, *Sulla teoria dell'iterazione* (*M. S. It.*, 3[e] série, t. XIV, 1907, p. 181-257).

O. Nicoletti, *Sulla teoria della convergenza degli algoritmi di iterazione* (*A. D. M.*, 3[e] série, t. XIV, 1907, p. 1-32).

R. Mattson, *Note sur le problème de l'itération* (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Stockholm, t. IV, Häfte 1-2, 17, p. 1-5).

L. v. David, *Zur Theorie der Schapiraschen Iteration* (*Cr.*, t. CXXXV, p. 62-74).

O. Degel (Bayreuth).

3246. (**1907**, 150) (K. HAGGE). — *Propriété projective du quadrangle.* — (**1907**, 263). — Il existe une transformation rationnelle quadratique dans laquelle les sommets du quadrangle ABCP se correspondent à eux-mêmes et dont, par conséquent, A_0, B_0, C_0 sont les pôles.

Cette transformation jouit de la propriété suivante :

Toute conique (C) *circonscrite au triangle* $A_0B_0C_0$ *a pour transformée une droite* (D), *et réciproquement : la conique* (C) *et la droite* (D) *divisent harmoniquement les six côtés du quadrangle.*

Les coniques $A_0B_0C_0$ $(a'a'', b'b'', c'c'')$ transformées des droites $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ coupent chacune la droite (D) en ses points de rencontre avec deux côtés opposés du quadrangle, c'est-à-dire en des points en involution ; elles appartiennent donc à un même faisceau ponctuel comprenant les coniques circonscrites à $A_0B_0C_0$ et tangentes à (D) aux points d'intersection de cette droite avec (C).

Ces dernières ayant pour transformées les tangentes à (C) aux mêmes points, les droites $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ passent toutes trois par le pôle de (D) par rapport à (C), quatrième pivot du faisceau.

WELSCH.

3261. (**1907**, 174) (NAZAREWSKY). — *Nombres premiers admettant le nombre* 10 *comme résidu biquadratique* (**1908**, 85). — Pour résoudre

$$x^4 \equiv 10 \pmod{p}$$

ou encore

$$10 \equiv g^4 \pmod{p},$$

Jacobi (*Canon arithmeticus*) indique

$$p = 53,\quad 173,\quad 769,\quad 809,\quad 1009,\quad 1721,\quad 2129,\quad \ldots,$$
$$x = 26,\quad 91,\quad 78,\quad 703,\quad \ldots.$$

La valeur 173 répond à la troisième condition de M. Bickmore (**1908**, 88), tandis que 769 et 809 répondent à la deuxième.

L'Ouvrage donne des solutions intéressantes pour $\pm 10 \equiv g^m \pmod{p}$.

A. GÉRARDIN.

3322. (**1908**, 5) (*Rudis*). — *Série récurrente* 1, 5, 29, 169, 985, ...

1908, 248; **1909**, 17). — Ed. Lucas, dans ses *Recherches sur l'analyse indéterminée* (Moulins, 1873, p. 91), donne le théorème suivant: la somme des cubes des x premiers nombres impairs n'est jamais égale à un cube, à un bicarré, ou à une cinquième puissance; *elle est égale à un carré pour les valeurs de x (série récurrente)* 1, 5, 29, 169, 985, ...

A. Gérardin.

3347 (**1908**, 52) (A. Werebrusow). — *Équation indéterminée*

$$x^4 + mx^2y^2 + y^4 = z^2$$

(**1908**, 158, 282).

Le théorème démontré (*Math. Sbornik*, t. XXVI) par la méthode de la question 3338 (**1908**, 30) semble en défaut pour $m = 99$.

En effet on trouve, pour $m = 99$,

$$a = 12, \quad b = 13, \quad c = 5, \quad d = 43,$$
$$\delta = 1, \quad \omega = 3, \quad M = 101, \quad N = 1,$$
$$x = 312, \quad y = 215, \quad z = 676\,081,$$

valeurs d'ailleurs indiquées par Euler (*Comment. Arith. Coll.*, t. II, p. 496).

A. Gérardin.

3362. (**1908**, 74) (E.-N. Barisien). — *Équation indéterminée.* — Posons

$$(1) \qquad x + y = m(z + t);$$

on aura

$$(2) \qquad (m^3 - 2)(z + t)^2 - (m^2 - 2)(z + t) = 3[mx(y + 3) - 2z(t + 3)].$$

Pour $m = 1$ et $\frac{6}{5}$ avec $z = \frac{2t}{3}$ et $9t$, puis $m = \frac{5}{3}$ et 2 avec $z = 2t$ ou $5t$, on retrouve toutes les solutions données par l'auteur. Voici quelques lois : *Si nous avons une solution* a, b, $2c$, c, *nous aurons aussi* a, b, $2c$, $3c$; *de même, si nous avons* a, b, 5, 1 *nous aurons* a, b, 9, 1.

Le problème admet des solutions négatives, ou bien supérieures à 10, mais qui, traduites en nombres, cessent d'être justifiées; ainsi

$$x = 151, \quad y = 149, \quad z = 150, \quad t = 3,$$

ou encore

$$x = 152, \qquad y = 148, \qquad z = 150, \qquad t = 30 :$$

de même

$$x = 9, \qquad y = -12, \qquad z = 8, \qquad t = -11,$$

qui se ramènent à un cas où le coefficient 2 du problème est remplacé par λ ; ces derniers nombres deviennent alors 78 et 69, et l'on a

$$2\lambda = 7.$$

La manière la plus simple et la plus complète de résolution, pour (2), est de se donner y et t, ou encore t et m.

Exemple : Soient $t = 1$, $m = 2$; on aura l'équation

$$(3) \qquad 3z^2 - (6x - 17)z + (3x^2 - 15x + 2) = 0,$$

dont le déterminant doit être carré :

$$(4) \qquad 265 - 24x = Z^2,$$

donnant

$$\begin{array}{lccccc} x = & 4, & 6, & 9, & 10, & 11, \\ Z = & 13, & 11, & 7, & 5, & 1, \\ z = - & 1, & 5, & 5, & 8, & 8. \end{array}$$

Les solutions (6, 6, 5, 1) et (9, 3, 5, 1) sont connues ; mais nous trouvons encore 10, 8 ou 11, 7 avec 8, 1.

Autre exemple : Soient

$$y = 3 \quad \text{et} \quad t = 1 ;$$

on a l'équation

$$(5) \quad (m^3 - 2)z^2 + (2m^3 - 19m^2 + 22)z + (m^3 - 19m^2 + 54m) = 0,$$

dont le déterminant donne

$$(6) \qquad 145m^4 + 96m^3 - 988m^2 + 432m + 484 = Z^2,$$

qu'on peut résoudre par les méthodes de Fermat. Signalons simplement les solutions

$$m = 0, \quad 1, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{5}{3}, \quad 2,$$

$$Z = 22, \quad 13, \quad \frac{34}{5}, \quad \frac{43}{9}, \quad 22.$$

On pourrait proposer l'énoncé suivant, qui admettrait des solutions plus générales : *Trouver deux nombres*

$$N = x + y \qquad \textit{et} \qquad P = t + z$$

tels que

$$N = mP$$

et

$$g[(x^2 + y^2) - (10x + y)N] = h[(z^2 + t^2) - (10z + t)P],$$

et donner des formules générales.

Exemple :

$$g = 1, \qquad h = 2, \qquad m = 2, \qquad N = 60l^2 + 18l,$$

$$x = 30l^2 + 19l + 3, \qquad y = 30l^2 - l - 3, \qquad z = 0, \qquad t = 30l^2 + 9l.$$

A. GÉRARDIN.

3390. (**1908**, 102) (TAFELMACHER). — *Équation indéterminée* $x^2 + y^2 = 2z^2$ (**1908**, 259 ; **1909**, 19). — La formule indiquée par M. Welsch est la même que celle de MM. Boutin, Plakhowo, Tafelmacher, et que je donnais aussi (**1908**, 260). C'est une formule historique qui figure dans l'étude des nombres congruents, depuis Fibonacci.

Ed. Lucas l'avait déjà trouvée en 1873 (*Recherches sur l'analyse indéterminée*, p. 33, et *B. Bon.*, 1876, p. 591 ; 1877, p. 187) ; elle est aussi indiquée page 40 de la *Notice sur la vie et les travaux de V.-A. Le Besgue*, par MM. Abria et Hoüel, et par Legendre (*Th. des N.*, t. II, p. 126) et Ed. Lucas (*N. A.*, 1878, p. 446).

A. GÉRARDIN.

3393. (**1908**, 121) (E.-B. ESCOTT). — *Diviseurs de certains nombres.* — Lorsque p est un nombre premier de la forme $y^2 + y - 1$, ce qui est le cas des sept solutions indiquées, le nombre $(p^2 - 1)^2$ admet toujours, en général, *trois* diviseurs de la forme $px + 1$ avec $x < p$.

Ces trois valeurs de x sont : 1, $y + 1$ et $y^2 + y - 3$.

A. GÉRARDIN.

3399. (**1908**, 123) (G. LEMAIRE). — *Calcul de lignes trigonométriques.* — Pour la vérification demandée, il me semble que

l'auteur de la question ferait bien de dire de quelles formules il s'était servi.

Les nombres indiqués dans l'énoncé ont été depuis longtemps déterminés par plusieurs calculateurs ; cela n'encourage pas à reprendre une pareille recherche, à moins d'avoir connaissance des formules nécessaires. *E. Liminon.*

3410. (**1908**, 126) (A. Gérardin). — *Nombres premiers.* — Les huit nombres demandés, décomposés en facteurs premiers, sont

$$\begin{aligned}10^8 + 13 &= 827.120919,\\ + 391 &= 2153.46447,\\ + 657 &= 2711.36887,\\ + 723 &= 1447.69109,\\ + 1221 &= 2689.37189,\\ + 1353 &= 7247.13799,\\ + 1549 &= 2447.40867,\\ + 1647 &= 5737.17431.\end{aligned}$$

Ces résultats sont extraits de la Table VIII (a, b, c, d) des pages 86 à 89 de la Note *Determination of successive high primes* (*second paper*), de MM. Lt.-Col. Allan Cunningham et H.-J. Woodall, contenue dans le *Messenger of Mathematics*, t. XXXIV, 1904-1905, p. 72-89.

J'ajoute que toutes les divisions ainsi indiquées dans cette Note et dans l'autre Note analogue ont été vérifiées indépendamment par les deux calculateurs. Les résultats donnés ci-dessus sont cités d'après mon propre manuscrit. H.-J. Woodall (Stockport, Angleterre).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3413. (**1908**, 148) (G. Lemaire). — *Point lié au quadrilatère* (**1908**, 285; **1909**, 81). — O est le centre de la conique circonscrite au quadrilatère et admettant comme directions conjuguées celles des diagonales.

De même, les parallèles menées à deux côtés opposés par les milieux de ces côtés se coupent au centre de la conique circonscrite conjuguée à leurs directions.

On a ainsi, sur la conique lieu des centres des coniques circon-

scrites, trois points diamétralement opposés aux points de rencontre, tant des diagonales que des côtés opposés. WELSCH.

Autre réponse de M. *Vieujeu.*

3421. (**1908**, 172) (E. DUBOUIS). — *Équation indéterminée* (**1909**, 41). — Extrait d'une réponse de M. A. Gérardin, communiquée à M. Dubouis :

Voir l'article de M. Artemas Martin (**1909**, 41) dans les *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens,* Paris, 1900.

Voir encore : ED. LUCAS, *Théorie des Nombres,* p. 128.

FITZ-PATRICK et CHEVREL, *Exercices d'Arithmétique* (question 315, p. 252).
CATALAN (*M.*, 1905, p. 8). A. GÉRARDIN.

3424. (**1908**, 193) (U. BINI) (**1909**, 41) et 3425 (**1908**, 193) (U. BINI) (**1909**, 42). — *Systèmes d'équations indéterminées.* — *Voir* un article de M. Desboves (*N. A.*, 1879, p. 487).
(Extrait d'une réponse de M. A. Gérardin.)

3446. (**1908**, 219) (G. LORIA). — *Transformation géométrique.* — Dans le cours de certaines recherches tout à fait différentes de celles qui m'amenèrent à poser cette question (*Intermédiaire,* t. XV, **1908**, p. 219), je viens de trouver la réponse que je cherchais.

Ampère avait réellement raison ; le géomètre qui, le premier, a considéré la transformation dont il s'agit est Newton ; c'est dans l'opuscule *Methodus fluxionum* (composé en 1671, mais publié par Colson seulement en 1734) que le grand géomètre a défini et appliqué cette transformation ; son importance se reconnaît aisément si l'on observe que des équations de définition

$$x = \rho\omega, \qquad y = \rho$$

il résulte

$$x\,dy = \rho\omega\,d\rho \qquad \text{et} \qquad \int x\,dy = \frac{\rho^2\omega}{2} - \frac{1}{2}\int \rho^2\,d\omega.$$

Or, $x\,dy$ est la différentielle de l'aire en coordonnées cartésiennes, tandis que $\frac{1}{2}\rho^2\,d\omega$ est la quantité analogue en coordonnées polaires ;

de manière que par cette transformation on change une courbe quarrable en une autre jouissant de la même propriété.

G. LORIA (Gênes).

3458 (1908, 222) (J. ROSE). — *Complexes et congruences* (1909, 64). — *Voir :*

J. PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes,* gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement (Leipzig, 1868-1869, B.-G. Teubner).

K. ZINDLER, *Liniengeometrie mit Anwendungen,* Leipzig, G.-J. Göschen, Sammlung Schubert, I. Teil (Bd. XXXIV), II. Teil (Bd. LI). (Une troisième Partie est en préparation.)

O. DEGEL (Bayreuth).

3491. (1909, 2) (NAZAREVSKY). — Le procédé le plus expéditif pour résoudre l'équation

$$10^m \log x = x \tag{1}$$

(m entier) est, sans contredit, de parcourir attentivement les Tables de logarithmes (de Callet, par exemple).

En comparant les premiers résultats numériques, j'ai été immédiatement amené à les classer en trois séries infinies.

1° Les solutions entières, données par la loi de récurrence,

$$\begin{aligned} 10^1 \log 10^1 &= 10^1, \\ 10^9 \log 10^{10} &= 10^{10}, \\ 10^{98} \log 10^{100} &= 10^{100}, \\ 10^{997} \log 10^{1000} &= 10^{1000}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite,

$$10^{10^m - m} \operatorname{Log} 10^{10^m} = 10^{10^m}.$$

Toutes les autres solutions, non entières, forment deux séries infinies.

2° Les solutions qui sont $< 1,034$ et asymptotiques à 1.

Pour les séparer et les évaluer avec plus d'approximation, le mieux est de se donner $m = 2$, 3, etc.

Soit $m = 2$. Le tracé de la courbe $y = 100 \log x$ s'éloigne peu d'une droite entre $x = 1$ et $x = 2$. On a, pour $x = 1$, $y = 0$; pour $x = 2$, $y = 30,103$. Donc la racine est, par excès, l'abscisse du point de



rencontre des droites

$$y = x, \qquad y = (x-1)30{,}103, \qquad \ldots,$$

d'où

$$x = 1{,}034 - \varepsilon.$$

Et, en effet,

$$\log 1{,}034 = 0{,}0145,$$
$$100 \log 1{,}034 = 1{,}45.$$

Mais une incursion plus attentive montre que

$$100 \log 1{,}0237 \;= 1{,}02727,$$
$$100 \log 1{,}02385 = 1{,}02363.$$

On achèvera aisément de préciser l'accord.

On trouvera aussi bien, pour $m = 3$,

$$y = x, \qquad y = (x-1)301{,}03,$$

d'où

$$x = 1{,}0033 - \varepsilon,$$

et, en effet, on vérifie que

$$1000 \log 1{,}00231 = 1{,}00206,$$

valeur déjà très approchée.

On aura donc, en définitive, assez rapidement, les autres valeurs de x voisines de 1 pour $x = 4, 5$, etc.

3° Les solutions qui sont > 1 ne peuvent s'obtenir par approximation graphique; mais, en feuilletant les Tables, on réunit, en quelques minutes et par de simples transcriptions, plus de quarante solutions de l'équation (1).

Exemples :

$$10^{6} \log 6\,834\,700 = 6{,}8347195,$$
$$10^{15} \log 15\,181 = 15{,}1813004,$$
$$10^{20} \log 20\,307 = 20{,}3076458,$$
$$10^{28} \log 28\,454 = 28{,}4541433,$$
$$10^{90} \log 90\,949 = 90{,}9491411.$$

Bien entendu, les nombres ici transcrits ne sont que les noyaux des solutions définitives. Il faudrait également les écrire avec les nombres de chiffres voulus, mais ils sont trop grands pour trouver place dans ce résumé.

L'essentiel était de prouver la possibilité de parvenir *promptement* à des solutions approchées.

On en aura au moins les chiffres initiaux, mais il sera bien difficile, voire impossible, d'obtenir les autres avec précision, et surtout les chiffres terminaux, qu'il faudra se contenter de représenter par des zéros. *L.-N. Machaut.*

Le procédé le plus expéditif me paraît être de se servir d'une Table de logarithmes. On obtient ainsi très rapidement :

Pour

$m = 1,$	$x_1 = 1,37129$	$x_2 = 10$
$m = 2,$	$x_1 = 1,02385$	$x_2 = 237,581$
$m = 3,$	$x_1 = 1,00231$	$x_2 = 3550,26$

En posant $10^{\frac{1}{10^m}} = a$, l'équation proposée se ramène à la forme connue

$$a^x - x = 0,$$

qui montre que x doit être égal à son logarithme dans le système de base a.

Il y a toujours deux solutions pour chaque valeur de m (sauf $m = 0$), car la condition $a > e^{\frac{1}{e}}$ est toujours remplie si $m > 0,79651$.

Entre chacune des valeurs x_1 et x_2, la courbe

$$y = a^x - x$$

passe par un minimum dont les coordonnées sont

$$X = 10^m(m - 0,36222), \qquad Y = 10^m(0,79651 - m),$$

m variant de 1 à ∞ par valeurs entières, x_1 décroît très rapidement de 1,37129 à 1 ; il est facile, lorsque les Tables ne donnent pas une approximation convenable, d'obtenir x_1 en développant y en série, après avoir posé

$$x = 1 + \theta.$$

Les deux ou trois premiers termes suffisent dès que $m > 3$.

X croît indéfiniment avec m, et, comme $x_2 > X$, il en est de même de x_2.

Le développement de y, suivant les puissances de x, donne des résultats illusoires pour le calcul de x_2. Gleizes.

Réponse analogue de M. *Stenacensis,* transmise à M. Nazarevsky.

3497. (1909, 4) (S. Prieto). — *Podaires.* — La proposition en question a été donnée par E. Habich dans un article intitulé *Sur les roulettes* (*M.*, t. II, 1882, p. 145-148). Le cas particulier, relevé par M. Prieto, n'est pas mentionné chez Habich. Il se trouve (je ne sais si c'est pour la première fois) dans les *Lezioni di geometria intrinseca* de E. Cesaro (Napoli, 1896; traduction allemande par G. Kowalewski, Leipzig, 1901, p. 91). H. Wielkitner (Spire).

Le Tome II, nouvellement paru, du *Traité des courbes spéciales remarquables*, de M. G. Teixeira (Coïmbre, 1909), contient la réponse complète aux diverses questions proposées dans l'énoncé 3497.

Voir, dans *Mathesis*, deux articles de M. E. Habich :

1° *Sur les roulettes*, 1882, p. 145-148;
2° *Sur une question de roulettes*, 1886, p. 103-106;

avec des références bibliographiques d'après lesquelles :

I. Steiner a indiqué la relation entre les arcs et les aires d'une courbe et de sa podaire (*C. R.*, t. XXI, 1840, p. 33 et 101).

II. La proposition sur la roulette rectiligne tracée par le point d'une certaine podaire paraît avoir été formulée pour la première fois par M. Habich (*loc. cit.*, 1882, p. 145, et 1886, p. 105).

III. La propriété de la courbe méridienne de la surface minima de révolution a été rencontrée par M. Habich, car cette méridienne n'est autre que la courbe de Delauney, c'est-à-dire la courbe du foyer d'une conique roulant sur une droite (*J. M.*, t. VI, 1841, p. 309, et *M.*, *loc. cit.*, p. 104).

Au surplus, se reporter aux autres études mentionnées (*Ibid.*).

Recta.

3501. (1909, 5) (G. Lemaire). — *Polygonométrie.*

R. Baltzer. — *Die Elemente der Mathematik*, II. Band, § 6, p. 333-353. Leipzig, S. Hirzel, 1870.

J.-H. van Swinden. — *Elemente der Geometrie*, übersetzt von C.-F.-A. Jacobi, p. 343. Iéna, F. Frommann, 1834.

O. Degel (Bayreuth).

3502. (1909, 5) (G. Lemaire). — *Polygones.* — Voir *N. A.*, 1848,

p. 348-352 : *Théorème de Mascheroni sur l'aire d'un polygone rectiligne plan.*

Dans cet article, Terquem, sans viser la question de priorité, attribue le théorème à Mascheroni et spécifie que Lhuilier ne l'aurait exposé que 2 ans plus tard.

Il ne resterait ainsi qu'à vérifier ce qui a trait à Lexell, mais des documents anciens de 150 ans deviennent difficiles à retrouver.

Recta.

3304. (**1909**, 6) (*Nester*). — *Cercle des neuf points.* — Réponse de M. N. Plakhowo (Russie), communiquée à M. *Nester.*

M. Plakhowo renvoie au *programme de Stuttgart* où Reuschle, en 1853, démontre que le cercle de Feuerbach touche 32 cercles, et à la figure 433 des *Exercices de Géométrie* de *F. G. M.* (4e édition, 1907, p. 312), d'où M. Plakhowo déduit 48 cercles tangents, et même une infinité, d'après un théorème de P. Serret (*N. A.*, **1866**, p. 170).

La Rédaction.

3305. (**1909**, 6) (*Nester*). — *Aire d'une courbe.* — En multipliant les abscisses seules par *a*, puis les ordonnées seules par *b*, on multiplie l'aire par *ab*.

Or la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2 \qquad \text{ou} \qquad \rho^2 = \cos 2\omega$$

a pour aire

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2\, d\omega}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\, d\varphi = 1.$$

L'aire cherchée est donc *ab*.

E. Dubouis.

En posant $y = \frac{b}{a}tx$, les coordonnées d'un point de la courbe s'expriment comme suit :

$$x = \frac{a\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}, \qquad y = \frac{bt\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},$$

et l'aire de la courbe a pour valeur

$$S = 4\int_0^a y\, dx = 4ab\int_1^0 \frac{t^2(t^2-3)}{(1+t^2)^3} = \left[\frac{-4abt^3}{(1+t^2)^2}\right]_1^0 = ab.$$

Ce résultat pouvait être prévu ; en effet, si l'on considère la lemniscate

$$(x^2 + Y^2)^2 = a^2(x^2 - Y^2),$$

dont l'aire est égale à a^2, on peut remarquer qu'à abscisse égale x les ordonnées Y et y de cette lemniscate et de la courbe proposée sont liées par la relation

$$y = \frac{b}{a} Y.$$

On en déduit

$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a Y\,dx = \frac{b}{a} \times a^2 = ab.$$

F. MICHEL.

Réponse analogue de M. E.-N. BARISIEN, qui ajoute :

L'expression $U = ab$ de l'aire en question est d'autant plus remarquable qu'elle est plus simple que celle de l'aire de la podaire centrale de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; cette podaire a pour équation

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Pour $a = b$, c'est-à-dire si l'hyperbole est équilatère, cette courbe devient aussi la lemniscate de Bernoulli. L'aire de cette podaire s'obtient très facilement en coordonnées polaires. On trouve pour cette aire

$$U_1 = (a^2 - b^2) \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{b} + ab.$$

E.-N. BARISIEN.

Autre solution de M. O. DEGEL (Bayreuth).

3506. (1909, 6) (T. HAYASHI). — *Équation indéterminée.* — L'équation peut s'écrire

$$\frac{x + y - z + P}{2x} = \frac{2y}{x + y - z - P} = \frac{a}{b} \text{ irréductible ;}$$

d'où

$$x + y - z + P = pa, \quad x + y - z - P = qb, \quad 2x = pb, \quad 2y = qa,$$

d'où

$$(1) \qquad pa - qb = 2P, \qquad 2z = (q - p)(a - b);$$

a et b ne peuvent être pairs simultanément. Soit a impair. Alors, la valeur de y montre que q est pair, puis (1) montre que p est pair. Même conclusion si b est impair. Donc on prendra P arbitrairement, ainsi que a et b qui seront premiers entre eux. On résoudra

$$ua - vb = \mathrm{P},$$

et l'on aura

$$x = ub, \qquad y = va, \qquad z = (v - u)(a - b).$$

E. Dubouis.

Autre réponse de M. Werebrusow (Russie).

La question revient à mettre un carré donné P^2 sous la forme $\Sigma x^2 - 2\Sigma yz$. Or, on a

$$\Sigma x^2 - 2\Sigma yz = x^2 - 2x(y+z) + (y-z)^2 = \mathrm{P}^2;$$

on en tire

$$x = y + z \pm \sqrt{4yz + \mathrm{P}^2}.$$

Pour que le discriminant soit un carré, il suffira de prendre

$$y - z = \mathrm{P},$$

ce qui sera toujours possible.

On aura donc

$$x = 2(y+z) \qquad \text{et} \qquad x = 0.$$

Comme on exige trois nombres x, y, z, le résultat $x = 0$ est à rejeter, et il reste la solution immédiate

$$\mathrm{P} = b - c, \qquad y = b, \qquad z = c, \qquad x = 2(b + c).$$

Note. — On pourrait supposer aussi P^2 négatif, mais alors la condition $4yz - \mathrm{P}^2$ carré ne se présentera que par exception et seulement pour certains multiples de 4. *Vieujeu.*

L'équation proposée peut être mise sous la forme

$$(x - y - z)^2 - 4yz = \mathrm{P}^2,$$

qui peut être ramenée à

$$(x - y - z - \mathrm{P})(x - y - z + \mathrm{P}) = 4yz.$$

Cette égalité montre qu'on peut trouver autant de solutions

entières qu'on voudra, en donnant à P et à l'une quelconque des inconnues des valeurs entières arbitraires.

Si nous nous en tenons aux valeurs positives de x, y et z, on obtient facilement le système

$$x = 9 + 3P, \qquad y = 1, \qquad z = 4 + 2P,$$

et d'autres analogues. GLEIZES.

La proposée s'écrit

$$(x - y - z)^2 - 4yz = P^2,$$

ou

$$(x - y - z + P)(x - y - z - P) = 4yz.$$

Posons

$$x - y - z + P = 2my,$$

$$x - y - z - P = \frac{2z}{m},$$

m étant une indéterminée.

Éliminant P et faisant les réductions, il vient

$$(1) \qquad mx = m(m + 1)y + (m + 1)z,$$

$$(2) \qquad P = -x + (2m + 1)y + z.$$

Toutes les valeurs (et l'on peut en trouver une infinité) qui satisfont à l'équation (1) substituées dans (2) donnent des solutions de la proposée.

Par une marche bien différente, j'ai trouvé les identités suivantes :

$$(A) \quad (2m + 1)^2 - 4[2m + (2m - 1)n - n^2] = [(2m - 1) - 2n]^2,$$

$$(B) \quad (2m)^2 - 4[(2m - 1) + (2m - 2)n - n^2] = [(2m - 2) - 2n]^2.$$

Pour avoir une infinité de solutions (même je suis fondé à croire qu'on les a toutes), il suffit de décomposer de toutes les manières possibles le produit yz en deux facteurs, et l'on en déduit très facilement la valeur de toutes les inconnues.

Voici encore deux identités qui satisfont à la proposée

$$m \geq n:$$

$$(2m + 1)^2 - 4[(m^2 + m) - (n^2 + n)] = (2n + 1)^2,$$

$$(2m)^2 - 4(m^2 - n^2) = (2n)^2.$$

On opère comme ci-dessus.

Ces formules permettent de choisir pour P les valeurs qu'on veut.

Stenacensis.

Dans le cahier de juillet 1908 (p. 151) de ce Journal, j'ai donné une solution de l'équation

$$(1)\qquad x^2 + my^2 + nz^2 + 2ayz + 2bxy + 2cxz = s^2,$$

proposée par M. U. Bini (question **3305**, **1907**, **246**), sous la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho x = -(-p^2 + mq^2 + n + 2aq), \\ \rho y = 2q(p + bq + c), \\ \rho z = 2(p + bq + c), \\ \rho s = -(p^2 + mq^2 + n + 2aq + 2bpq + 2cp), \end{cases}$$

où ρ est un facteur de proportionnalité.

On obtient l'équation de M. F. Hayashi

$$(3)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = P^2,$$

en faisant $m = n = 1$, $a = b = c = -1$, $s = P$; donc

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho x = -(-p^2 + q^2 + 1 - 2q), \qquad \rho y = 2q(p - q - 1), \\ \rho z = 2(p - q - 1), \quad \rho P = -(p^2 + q^2 + 1 - 2q - 2pq - 2p). \end{cases}$$

Ces formules se simplifient si l'on pose $u = p - q - 1$, $v = 2q$; on trouve

$$(5)\qquad \rho x = (u + 2)(u + v), \quad \rho y = uv, \quad \rho z = 2u, \quad \rho P = 2v - u^2.$$

O. Degel (Bayreuth).

[D'après l'allemand. (La Réd.)]

3511. (**1909**, 7) (Ansermet). — *Construire un triangle* ABC, *connaissant* a, B — C, bc. — Soit $bc = al$; si l'on prend pour inconnue l'angle A, on a l'équation du second degré

$$2l\cos^2 A + a\cos A + a\cos(B - C) - 2l = 0,$$

qui fournit toujours une solution et une seule,

$$\cos A = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 16l^2 - 8al\cos(B - C)}}{4l}.$$

Soit d'abord le triangle auxiliaire où deux côtés sont a et $4l$,

l'angle compris étant B — C ; appelant m le côté opposé à cet angle, nous avons

$$\cos A = \frac{m - a}{4l},$$

ce qui permet de construire l'angle A.

Ceci posé, traçons une ligne BC égale à a, ainsi que le segment capable de l'angle A ; la médiatrice de BC coupant en D le segment opposé capable de $\pi - A$, menons par D une droite DA faisant avec cette médiatrice l'angle $\frac{B - C}{2}$; le point de rencontre A avec le premier segment est le troisième sommet du triangle demandé.

P. Barbarin.

Autres réponses de MM. Jipé et G. Lemaire (Cochinchine), transmises à M. Ansermet.

3514 (**1909**, 25) (J. Mascart). — *Formule d'annuités.* — La formule de l'actuaire anglais Francis Baily (et non Bailly) est démontrée par A. Barriol dans *Théorie et pratique des opérations financières,* p. 155 (Doin, éditeur, 8, place de l'Odéon, Paris).

Une démonstration plus étendue se trouve dans Marie, *Traité d'opérations financières,* p. 542.

La formule donne des résultats très approchés pour n inférieur à 20 ou 25 (*voir* Barriol, p. 157), mais l'emploi de machines à calculer rend son application complètement inutile dans la pratique; on la traîne bien inutilement, à mon avis, dans les cours et dans les Ouvrages, comme (hélas !) beaucoup d'autres formules qui ont pu avoir quelque intérêt à une époque donnée.

Le développement de r en séries a été fait, mais les séries ne sont jamais très convergentes, et même, dans les cas où il est nécessaire d'avoir le taux pour 100 avec 8 décimales exactes (j'ai fait et je fais faire ce calcul tous les ans), on emploie toujours la méthode d'approximations successives qui, appliquée soigneusement, conduit en cinq essais au résultat cherché.

Barriol.

QUESTIONS.

3581. [O4hβ] Une droite se déplace en restant parallèle au plan des zx et en s'appuyant sur l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

et la droite

$$x = 0, \qquad z = \gamma;$$

je désirerais quelques renseignements sur le conoïde ainsi décrit; a-t-il été rencontré et étudié?

G. Espanet.

3582. [R3] Soit un pentagone que pour plus de clarté je suppose convexe, circonscrit à une circonférence; je désigne par A, B, C, D, E ses sommets et leurs angles, par A', B', C', D', E' les pointes de l'étoile obtenue en prolongeant les côtés et les angles de ces pointes; A' est opposé à A, B' à B, etc.; aucun des points A', B', C', D', E' n'est supposé à l'infini.

Suivant $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$ et dans le sens indiqué par les flèches on applique des forces proportionnelles à $\overline{AA'}\sin A \sin A'$, $\overline{BB'}\sin B \sin B'$, etc.; démontrer géométriquement que la somme de leurs moments par rapport au centre de la circonférence est nulle.

G. Espanet.

3583. [O3j] A. Mannheim a étudié les courbes gauches dont la somme des carrés de la courbure et de la torsion est constante.

Ces courbes ont-elles fait l'objet d'autres recherches que les siennes?

T. Lemoyne.

3584. [**M'8**] On ne cite guère que deux ou trois modes de description différents du folium de Descartes qui sont d'ailleurs bien connus (*voir* H. Brocard, *Répertoire bibliographique des courbes,* t. I, p. 142 et xv, et t. II, p. 102, ou Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables,* t. I, p. 86 et suivantes). Je désirerais connaître un plus grand nombre de cas où l'on obtient comme lieu géométrique un folium de Descartes.

T. Lemoyne.

3585. [**M'5**] Quelles sont les propriétés particulières des cubiques à trois axes de symétrie?

On sait que leurs asymptotes sont les côtés d'un triangle équilatéral; on en déduit que le produit des distances d'un point d'une telle cubique aux trois côtés d'un triangle équilatéral est constant.

Ces courbes ont été étudiées par Euler, *Introductio in Analysin infinitorum,* t. II, n° 351.

M. Cazamian (*N. A.*, 1894), et G. de Longchamps (*M.*, 1888, p. 5) en ont envisagé un cas particulier auquel M. Cazamian a donné le nom de *trèfle équilatère* et que G. de Longchamps a montré être une polaire réciproque d'hypocycloïde à trois rebroussements.

T. Lemoyne.

3586. [**K8**] J'ai une solution un peu compliquée du théorème suivant; j'en désirerais une plus simple.

Dans un quadrilatère convexe ABCD, *les côtés* AB, CD *se coupent en* F *et les côtés* AD, CB *en* E. *Si les segments* EB, DF *sont égaux et que de plus la relation*

$$90° > \widehat{AEB} > \widehat{BFD}$$

soit vérifiée, on a AB > AD.

Dralla.

3587. [I3] Connaît-on ce théorème :

Si a et $a-1$ $(a \neq 2)$ *sont deux nombres premiers au nombre* $2^{2^k}+1=p$, *premier, il y a toujours un nombre* $a^{2^n}+1$ $(a=0, 1, \ldots)$ *divisible par* p ?

G. Candido (Italie).
[D'après l'italien. (La Réd.)]

3588. [I3] A-t-on publié des Tables d'indices pour des nombres premiers p supérieurs à 1000? Le *Canon arithmeticus* de Jacobi se borne au cas où p est < 1000.

A-t-on publié des Tables donnant une racine primitive pour des nombres premiers supérieurs à 5000? Les Tables de G. Wertheim (*Acta math.*, t. XVII, XX, XXII) se bornent au cas où p est < 5000.

L'intérêt de ma question est que j'ai entre les mains des Tables manuscrites des deux natures dressées par M. Chabanel, de Reims, décédé récemment, et qui m'ont été transmises, après examen sommaire, par M. G. Maillet, au nom de Mme veuve Chabanel. Ces Tables vont jusqu'à $p = 10000$; j'en reparlerai plus en détail.

E. Maillet.

3589. [Σ] Comme complément à mon Mémoire *Sur les séries divergentes et les équations différentielles* (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. XX, novembre 1903), on pourrait chercher (¹) des exemples d'équations différentielles ayant pour solutions formelles les séries divergentes étudiées dans ce Mémoire, par suite aussi les intégrales définies correspondantes. Cela permettrait peut-être de déterminer avec plus de précision la nature du point singulier que ces intégrales possèdent à l'origine.

J'indique comme exemple (*A. E. N.*, 1903, p. 507) la

(¹) L'emploi de formules de récurrence semble permettre d'aborder la question.



série $\sum_0^\infty \frac{(2n)!}{n!} x^n$ à laquelle on peut attribuer un sens et une valeur pour chaque valeur *positive* de x. Elle satisfait à l'équation différentielle

$$4x^2y' = y(1-2x) - 1.$$

E. Maillet.

3590. [J5] Dans les *Comptes rendus* du 3 mai 1909, p. 1157, M. P. Painlevé fait une remarque sur les ensembles E des singularités d'une fonction analytique uniforme $F(x)$ et dit « qu'il y a bien des années qu'il a distingué les ensembles E en plusieurs classes », notamment en 4 classes.

Je désire savoir où il a publié cette intéressante classification. N. Ghiulea (Constanta).

3591. [V6] On lit dans G. Maupin (*Opinions et curiosités*, etc., Paris, t. I, 1898, p. 184) : « L'Université fut en guerre avec les moines de Saint-Germain, de 1548 à 1551, à propos du partage du Pré-aux-Clercs. Le célèbre Oronce Fine fut chargé de mesurer le pré et d'y trouver les vestiges d'un ancien chemin. »

Où pourrais-je trouver des renseignements sur ce litige, qui m'intéresse à plusieurs titres? G. Lemaire.

3592. [O5j] Il est possible que, par l'inversion, une surface de courbure négative se transforme dans une surface de courbure positive. Quelles sont les courbes sur cette dernière surface qui correspondent aux lignes asymptotiques de la première surface? W. Gaedecke (Berlin).

3593. [O5l] A-t-on déjà étudié les courbes inverses des lignes géodésiques d'une surface?

W. Gaedecke (Berlin).

3594. [O6] Je serais heureux de posséder une liste complète sur les travaux qui ont été faits sur la surface d'élasticité en Mathématiques et en Physique.

W. GAEDECKE (Berlin).

3595. [O6] Tortolini a effectué dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XXXI, la détermination des volumes et des surfaces des surfaces podaires des deux hyperboloïdes par rapport au centre en employant les intégrales elliptiques de Legendre. A-t-on déjà fait ces calculs au moyen des fonctions de Weierstrass?

W. GAEDECKE (Berlin).

3596. [O6] Quelles relations existent entre les surfaces podaires successives d'une surface et cette surface?

W. GAEDECKE (Berlin).

3597. [O6] Hutt trouve, dans son Traité intitulé : *Quadratur der parallelen Oberfläche der Elasticitätsoberfläche* (*Programm*, Tilsitt, 1876, p. 11-15), pour la courbure moyenne de la surface d'élasticité

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$

l'expression

$$(1) \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{r_1^4(a^2 + b^2 + c^2 - 4r^2) - (c^6z^2 + b^6y^2 + a^6x^2)}{r_1^6},$$

en posant

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad r_1^4 = a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2.$$

Il obtient cette valeur par l'emploi de la formule bien connue

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(p^2 + q^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Je désire avoir une démonstration de l'équation (1) au

moyen de la formule due à Borchardt

$$H = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

X, Y, Z désignant les cosinus directeurs de la normale de la surface.

W. Gaedecke (Berlin).

3598. **[E5]** Démontrer, au moyen de la théorie des résidus, que

$$\int_0^{2\pi} \frac{(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)}{(a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta)^2}\,d\theta = \frac{2\pi}{a^2 + b^2}.$$

Radeaux.

3599. **[L¹15]** Je trouve par le calcul analytique que le lieu des points M tels qu'en menant à une ellipse de centre O les tangentes en A et B, le cercle circonscrit au triangle MAB soit tangent à l'ellipse, est une courbe qui est la transformée par rayons vecteurs réciproques de cette ellipse, O étant le pôle et $a^2 - b^2$ le paramètre de transformation. Comment le démontrer géométriquement?

Radeaux.

3600. **[O5]** Connaît-on des surfaces dont la courbure moyenne $\left(\text{mittlere Krummung } \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ est une constante? Renseignements bibliographiques.

Radeaux.

RÉPONSES.

776. (**1896**, 56) (DE LONGRAIRE). — *Arpentage ancien* (**1896**, 209; **1899**, 179). — Les Tables du *B. Bon.* (t. XX, p. 719) donnent les indications suivantes : Article bibliographique (t. IX, p. 165 à 182) de M. A. Favaro sur une monographie de M. M. Cantor, indiquée par M. Brocard dans sa réponse (**1896**, 209) :

Die römischen Agrimensoren, und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine historisch-matematische Untersuchung von Dr. Moritz Cantor. Mit 5 *lithographirten Tafeln. Leipzig, Druck und Verlag von B.-G. Teubner,* 1877, *in*-8° *di* 240 *pagine e* 5 *tavole.*

Le catalogue 1908 (Teubner) dit (p. 49) : mit 6 lithogr. Tafeln, 237 S., gr. in-8, 1875, geh. n. 6 marcks.

Diese Monographie beabsichtigt nachzuweisen, wie Inhalt und Form des mathematischen Wissens der Römer genau mit dem übereinstimmen, was ihnen um Beginn der christlichen Zeitrechnung aus Alexandrien zugeführt wurde. A. GÉRARDIN.

784. (**1896**, 58) (PAUL TANNERY). — *Équation indéterminée* (**1897**, 70). — L'équation

$$4x^4 + 2x^2y^2 - 2y^4 = 4z^2$$

est aussi résolue par

$$(1) \qquad x = 3f, \qquad y = 4f, \qquad z = 5f^2$$

ou encore

$$x = \frac{h}{2}, \qquad y = \frac{2h}{3}, \qquad z = \frac{5h^2}{18}.$$

Si l'on connaît une solution (a, b, c), il sera facile d'en obtenir d'autres.

On aura, par exemple,

$$x = 3f + t, \qquad y = 4f + u, \qquad z = 5f^2 + w.$$

d'où une équation du troisième degré

$$Af^3 + Bf^2 + Cf + D = 0.$$

On pourra continuer en annulant A ou D.

A. GÉRARDIN.

925. (**1896**, 246) (P.-F. TEILHET). — *Équation* $x^3 + y^3 = z^2$ (**1897**, 110, 273; **1898**, 95). — Les formules données par M. E. Fauquembergue (**1897**, 111) avaient été indiquées par EULER (*Comment. Arith. Coll.*, t. I, p. 207, 208).

Voici les valeurs de z correspondantes :

(α) $\quad z = (3p^2 - q^2)(9p^4 - 18p^3q + 18p^2q^2 - 6pq^3 + q^4),$

(β) $\quad z = 3(p^2 - q^2)(p^4 - 2p^3q + 6p^2q^2 - 2pq^3 + q^4),$

(γ) $\quad z = 6pq(3p^4 + q^4).$

Euler indique aussi (p. 207)

$$[p(p^3 + q^3)]^3 + [q(p^3 + q^3)]^3 = (p^3 + q^3)^4.$$

A. GÉRARDIN.

1133. (**1897**, 196) (H. TARRY). — *Formules d'Euler* $x^2 + x + 41$ *et formules analogues* (**1898**, 114, 184; **1899**, 10). — *Voir* **1669** (**1899**, 247; **1905**, 77). — Comme contribution au remarquable travail de M. E.-B. Escott, je signale $x^2 + 5x + 47$ qui donne 38 nombres premiers; cette formule se ramène à la forme d'Euler en posant $x = y - 2$.

Je trouve aussi

$$4x^2 - 152x + 1607$$

qui donne 38 nombres premiers.

Il serait à désirer de connaître la méthode de M. Escott, et de nouvelles formules qu'il serait facile de vérifier avec les Tables des 6 premiers millions.

La forme $x^2 + x + A$ a été étudiée pour A inférieur à 54000, je crois, par Le Lasseur. Quelle forme semblerait la meilleure?

N'a-t-on pas encore étudié

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = P$$

donnant un nombre premier P pour les n premières valeurs attribuées à x ?

Citons, en passant, LEGENDRE, *Théorie des Nombres* (2[e] Partie, p. 329).

Il indique les formes suivantes de nombres premiers :

$x^2 + 2xy + 14y^2$,	$x^2 + xy + 3y^2$,	$5x^2 + 5xy + 13y^2$,
$x^2 + 2xy + 38y^2$,	$x^2 + xy + 5y^2$,	$x^2 + 10y^2$,
$3x^2 + 6xy + 22y^2$,	$x^2 + xy + 11y^2$,	$x^2 + 22y^2$,
$3x^2 + 6xy + 34y^2$,	$x^2 + xy + 17y^2$,	$x^2 + 58y^2$,
$15x^2 + 6xy + 10y^2$,	$3x^2 + 3xy + 11y^2$,	$5x^2 + 14y^2$,
$11x^2 + 14xy + 22y^2$,	$x^2 + xy + 41y^2$,	$3x^2 + 34y^2$,
$5x^2 + 38y^2$.		

A. GÉRARDIN.

1214. (**1898**, 6) (*Novus*). — *Équation* $x^2 + p^2 = y^3$ (*p premier*) (**1898**, 157). — Soit un nombre p premier de la forme $4m^2 + 1$; on aura immédiatement

$$(2m)^2 + 1^2 = p$$

ou encore

$$(2mp)^2 + p^2 = p^3.$$

Nous pouvons encore poser

$$(1) \qquad (p\xi \pm 2m)^2 + 1 = pu^2,$$

et, si nous obtenons une solution, nous trouverons aussi

$$[p(p\xi \pm 2m)]^2 + p^2 = (pu)^3,$$

deuxième solution cherchée du problème.

La condition (1) peut s'écrire

$$p^2\xi^2 \pm 4m\xi p + (4m^2 + 1) = pu^2$$

ou encore

$$(2) \qquad p\xi^2 \pm 4m\xi + 1 = u^2 = (2m\xi \pm 1)^2 + \xi^2.$$

On pourrait résoudre ce problème par les formules d'Euler ou par les systèmes de M. A. Boutin (**1898**, 157).

Remarquons aussi que le système (2) peut s'écrire

$$(4m^2 + 1)\xi^2 \pm 4m\xi + 1 = u^2.$$

La solution de M. Fauquembergue, indiquée d'ailleurs par Euler dans ses Tables des facteurs de $x^2 + 1$, s'obtient en faisant $m = 3$,

d'où $p = 37$, et

$$37\xi^2 \pm 12\xi + 1 = u^3$$

admet la solution $\xi = 2$, d'où

$$u = 5 \quad \text{et} \quad p\xi - 2m = 68.$$

Si l'on part de la solution double donnée par Fermat, on aura $p = 2$. Posons

$$(2w + 1)^2 + 8^2 = k^3 = (2z + 1)^3.$$

On verra que $z = 2g$, et l'on posera $g = 1 + s$, d'où

$$(2w + 1)^2 = 64s^3 + 240s^2 + 300s + 121.$$

La solution minima est évidemment $s = 0$, ce qui donne

$$11^2 + 2^2 = 5^3.$$

Si l'on fait $m = \frac{1}{2}$, on aura $p = 2$, et l'on devra résoudre le problème suivant : *Trouver deux entiers tels que la somme de leurs carrés soit un cube, les deux entiers étant consécutifs.*

Voir aussi, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, les questions $x^3 - y^2 = a$.

A. Gérardin.

3497. (**1909**, 4) (S. Prieto). — *Podaires* (**1909**, 162). — Le théorème énoncé par M. S. Prieto a été démontré par M. Habich dans *Mathesis* (1882, p. 145). Ce géomètre a considéré aussi, dans le même recueil (1886, p. 103), le cas où la courbe roulante est une circonférence. La courbe sur laquelle doit rouler la circonférence pour qu'un point de son plan décrive une droite est une *courbe de Delaunay;* la dernière proposition énoncée par M. Prieto est une conséquence d'une propriété de cette ligne. On peut voir quelques indications sur ce sujet dans le Tome II, p. 228-229, de notre *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches* (Coimbre, 1909).

F.-Gomes Teixeira (Porto).

3504. (**1909**, 6) (Nester). — *Cercle des neuf points* (**1909**, 163). — Consulter *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire,* par E. Catalan, p. 181, théorème CXII, et la remarque au bas de la page, 10[e] édition, Paris, Dunod, 1879, où l'on peut voir qu'il y a une infinité de cercles tangents au cercle de Feuerbach.

N. Plakhowo (Russie).

3508. (**1909**, 6) (T. Lemoyne). — *Bibliographie de la surface cubique de Ribaucour.* — *Voir :*

A. Ribaucour. — Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 1881).

A. Demoulin. — Sur les surfaces minima réglées et les surfaces minima à lignes de courbure planes (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, 1899).

Ce dernier Mémoire renferme une foule de résultats intéressants sur la surface de Ribaucour. J. Rose (Chimay).

3511 (**1909**, 7) (Ansermet). — *Construction de triangle* (**1909**, 167). — Il s'agit, étant donnés le produit de deux côtés : $bc = m^2$, la différence des angles opposés : $B - C = \delta$, le troisième côté a, de déterminer l'angle A opposé à celui-ci.

Des relations

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sqrt{\cos A + \cos(B - C)}}{\sqrt{2bc}}$$

on déduit l'équation

$$(1) \qquad 2m^2 \cos^2 A + a^2 \cos A + a^2 \cos\delta - 2m^2 = 0.$$

Posons

$$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{4m^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4m^2}};$$

il vient

$$\beta \cos^2 A + 2\alpha \cos A + 2\alpha \cos\delta - \beta = 0,$$

ou

$$(2) \qquad (\beta \cos A + \alpha)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta \cos\delta + \beta^2.$$

Construisons un triangle rectangle sur a et $2m$ comme côtés de l'angle droit, puis un autre triangle ayant un angle égal à δ, compris entre deux côtés respectivement égaux aux segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur correspondante, c'est-à-dire à α et β.

Le troisième côté Δ de ce second triangle a son carré égal au second membre de l'équation (2), et l'angle A défini par la valeur de son cosinus

$$\cos A = \frac{\Delta - \alpha}{\beta}$$

appartient à un triangle rectangle ayant β pour hypoténuse et $\Delta - \alpha$

(en valeur absolue) pour côté de l'angle droit; $\Delta > \pm(\alpha - \beta)$ et $< \alpha + \beta$ doit être pris avec le signe $+$. Il y a toujours une solution et une seule. WELSCH.

3522 (**1909**, 28) (E.-N. BARISIEN). — *Lieu du centre d'une ellipse de grandeur constante s'appuyant sur deux droites rectangulaires.* — Simple question d'examen.

La circonférence de rayon $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ correspond, non seulement à l'ellipse de demi-axes a et b, mais à toutes les ellipses pour lesquelles les demi-axes a' et b' satisfont à la relation

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 = d^2.$$

Les demi-axes de ces coniques sont les côtés de triangles rectangles ayant pour hypoténuse d.

Dans chaque angle xOy, un seul point du cercle correspond à

$$a' = b' = \frac{d}{\sqrt{2}},$$

et tout le quadrant de cercle à $a' = d$, $b' = 0$.

Note. — Pour la glissette rectangulaire du centre et des foyers de l'ellipse et du foyer de la parabole, voir *R. M. S.* (Vuibert), t. XVII, juillet 1907. *Devignot.*

Autres réponses de MM. O. DEGEL (Bayreuth) et WELSCH, transmises à M. Barisien.

Le cercle orthoptique de Monge a certaines propriétés relatives aux cordes rectangulaires réelles ou imaginaires de l'ellipse, propriétés non signalées encore, à ma connaissance, et qui répondent à la question de E.-N. Barisien.

Soient PM et PM' deux tangentes rectangulaires quelconques, OI et OI' leurs distances au centre, QUV et QU'V' deux cordes rectangulaires parallèles aux tangentes, OH et OH' leurs distances au centre; on a facilement

$$\overline{UV}^2 = \frac{4a^2b^2(\overline{OI}^2 - \overline{OK}^2)}{\overline{OI}^4},$$

$$\overline{U'V'}^2 = \frac{4a^2b^2(\overline{OI'}^2 - \overline{OK'}^2)}{\overline{OI'}^4},$$

donc

$$\overline{OI}^4\,\overline{UV}^2 + \overline{OI'}^4\,\overline{U'V'}^2 = 4a^2b^2(\overline{OP} - \overline{OQ}^2).$$

Le lieu des points Q pour lesquels

$$\frac{UV}{U'V'} = i\frac{\overline{OI'}^2}{\overline{OI}^2}$$

est donc le cercle de Monge. En particulier, si PM et PM' sont à 45° sur les axes de la courbe, $OI = OI' = \frac{OP}{\sqrt{2}}$; donc le lieu du centre d'une ellipse constante dont les axes sont à 45° sur Ox et Oy et qui coupe ces derniers selon deux cordes UV et U'V' dont la somme des carrés est nulle, est le cercle de Monge *tout entier*.

P. Barbarin.

3524. (**1909**, 49) (E.-N. Barisien). — *Équations et aires de courbes*. — Le lieu du pôle P de la droite Δ par rapport à l'ellipse est la polaire réciproque de l'antipodaire de l'ellipse par rapport à son centre O (courbe de Talbot), et, comme cette dernière courbe est du sixième ordre, de la quatrième classe et a les côtés du triangle isotrope OIJ pour tangentes doubles (*voir* ma réponse à 3296, **1909**, p. 57 de ce Recueil), on conclut que la courbe (P) est unicursale du quatrième ordre, de la sixième classe, avec un point double isolé en O et deux points doubles imaginaires conjugués à l'infini. Prenant pour équations paramétriques de l'ellipse

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi,$$

l'équation de la droite Δ est

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

et les coordonnées du point P sont données par

$$x = \frac{a^3\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \qquad y = \frac{b^3\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

qui sont aussi les équations paramétriques de la courbe (P).

L'élimination de φ est immédiate et l'on obtient pour équation cartésienne

$$(b^4x^2 + a^4y^2)^2 = a^2b^2(a^6y^2 + b^6x^2)$$

et pour équation polaire

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2 (a^6 \sin^2\theta + b^6 \cos^2\theta)}{(b^4 \cos^2\theta + a^4 \sin^2\theta)^2}.$$

Si OA est le demi-diamètre de l'ellipse conjugué à la direction de la droite Δ, et R le milieu de la corde interceptée, nous avons

$$\overline{OA}^2 = OP.OR = \rho.OR = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)},$$

et par suite l'équation polaire de la courbe (R) est

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2 (a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta)^2}{(a^6 \sin^2\theta + b^6 \cos^2\theta)(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^2},$$

et l'équation cartésienne

$$(b^6 x^2 + a^6 y^2)(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 = a^2 b^2 (b^4 x^2 + a^4 y^2)^2.$$

Les courbes (P) et (R) se correspondent par l'inversion quadratique ayant l'ellipse pour conique des points unis et O pour pôle d'inversion. Les formules de la transformation, analogues à celles de l'inversion circulaire, sont

$$x' : y' : 1 = a^2 b^2 x : a^2 b^2 y : b^2 x^2 + a^2 y^2\,;$$

le triangle des éléments fondamentaux a pour côtés la droite à l'infini et les asymptotes de l'ellipse. On peut déduire les caractéristiques de la courbe (R) de celles de (P) par les règles valables pour les podaires, en substituant aux points cycliques les points impropres de l'ellipse. On trouve qu'elle est du sixième ordre et de la huitième classe, avec deux points doubles ordinaires aux points à l'infini de l'ellipse et un point quadruple spécial (avec deux coïncidences) à l'origine. En dehors de la détermination de la classe, ces indications résultent immédiatement aussi de l'équation de la courbe.

V. Retali (Milan).

Soient $x = a \cos u$, $y = b \sin u$ les coordonnées du point M de l'ellipse et α, β les coordonnées du pôle P de la corde Δ perpendiculaire à OM au point M. Δ a pour équation

$$y - b \sin u = -\frac{a}{b} \cot u (x - a \cos u),$$

et la polaire du point P

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2 b^2.$$

L'identité aura lieu sous les conditions

$$a^2\beta = \frac{b^3\alpha}{a}\operatorname{tang} u = \frac{a^3 b^3 \sin u}{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u},$$

dont on tire

$$\alpha = \frac{a^3\cos u}{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}, \qquad \beta = \frac{b^3\sin u}{a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u}.$$

L'élimination de u donne

$$(a^4\beta^2 + b^4\alpha^2)^2 = a^2 b^2 (a^6\beta^2 + b^6\alpha^2).$$

Le lieu du pôle P est donc une quartique extérieure et tangente à l'ellipse en ses quatre sommets.

Le milieu I de la corde Δ est à l'intersection de Δ avec la droite OP. Or, celle-ci a pour équation

$$y = \frac{b^3\operatorname{tang} u}{a^3}x;$$

donc le lieu du point I aura pour équation

$$(a^2y^2 + b^2x^2)^2(a^6y^2 + b^6x^2) = a^2b^2(a^4y^2 + b^4x^2)^2,$$

qui représente une sextique intérieure et tangente à l'ellipse en ses quatre sommets.

M. Barisien, ayant reçu communication de ces résultats, les a aussitôt complétés par les remarques suivantes :

Transformant les équations (P) et (I) en coordonnées polaires, on a pour quadrature de la courbe (P)

$$U_1 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2),$$

qui est identique à l'aire de la podaire centrale de l'ellipse et aussi, plus généralement, à l'aire de la courbe

$$(a^{2n}y^2 + b^{2n}x^2)^2 = (ab)^n (a^{2n+2}y^2 + b^{2n+2}x^2),$$

dont la courbe (P) est un cas particulier, correspondant à $n = 2$.

Ensuite, la courbe (I) a pour aire

$$U_2 = \frac{\pi ab}{2} + \frac{2\pi a^2 b^2}{(a^2+b^2)^2},$$

ou mieux

$$U_2 = \pi ab - \frac{\pi abc^4}{2(a^2+b^2)^2},$$

qui montre que la portion d'aire comprise entre la sextique et l'ellipse donnée est équivalente à la moitié de l'aire de l'ellipse de Frégier.

En outre, par une analogie singulière avec la courbe (P), l'aire U_2 est aussi celle de la courbe

$$\begin{aligned}(b^{2n+4}x^2 + a^{2n+4}y^2)(b^{2n}x^2 + a^{2n}y^2) \\ = (ab)^{n+1}(b^{2n+2}x^2 + a^{2n+2}y^2)^2\end{aligned}$$

dont la courbe (I) est un cas particulier correspondant à $n = 2$. Cette aire peut s'écrire

$$U_2 = \frac{\pi ab(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)}{2(a^2+b^2)^2}.$$

Note. — L'enveloppe de Δ est la courbe de Talbot, ou l'antipodaire de l'ellipse par rapport à son centre.

L.-N. Machaut.

L'équation du lieu du pôle de Δ est

$$\rho^2 = a^2 \frac{(1+\operatorname{tang}^2\omega)\left(1+\frac{a^6}{b^6}\operatorname{tang}^2\omega\right)}{\left(1+\frac{a^4}{b^4}\operatorname{tang}^2\omega\right)^2},$$

ou

$$(b^4x^2 + a^4y^2)^2 - a^2b^2(b^6x^2 + a^6y^2) = 0,$$

et son aire

$$\pi\frac{a^2+b^2}{2}.$$

L'équation du lieu du milieu de la corde interceptée sur Δ par l'ellipse est

$$\rho^2 = a^2 \frac{(1+\operatorname{tang}^2\omega)\left(1+\frac{a^4}{b^4}\operatorname{tang}^2\omega\right)^2}{\left(1+\frac{a^6}{b^6}\operatorname{tang}^2\omega\right)\left(1+\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tang}^2\omega\right)^2},$$

ou

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2(b^6x^2 + a^6y^2) - a^2b^2(b^4x^2 + a^4y^2)^2 = 0,$$

et son aire

$$\pi ab\left[\frac{1}{2} + \frac{2a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right].$$

O. Degel (Bayreuth), E. Dubouis, G. Espanet, *E.-A. Majol*, F. Michel, V. Retali (Milan).

Des réponses plus détaillées de MM. O. Degel, E. Dubouis, F. Michel, V. Retali (Milan), Welsch, ont été transmises à M. Barisien.

3526 (**1909**, 50) (E.-B. Escott). — *Congruence.* — On sait qu'une racine d'une équation cubique $X = x^3 + px + qx + r = 0$ étant supposée connue, les deux autres s'expriment rationnellement en fonction de la première, des coefficients p, q, r, enfin de la racine carrée $\sqrt{\Delta}$ du discriminant

$$\Delta = -(4q^3 + 27r^2) + 18pqr + p^2q^2 - 4p^3r.$$

Les valeurs explicites de x_2 et x_3 en fonction de x_1 sont données, par exemple, dans l'*Algèbre* de Serret (5e éd., 2e vol., p. 466-468). De là résulte immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence $X \equiv 0 \pmod{p}$ ait trois racines, quand elle en possède une, est que Δ soit résidu quadratique de p. Si l'on veut que cette condition soit satisfaite quel que soit p, il faut alors que Δ soit carré parfait.

Dans les cas cités par M. Escott, les polynomes $x^3 - 3x + 1$ et $x^3 + x^2 - 2x - 1$ ont respectivement pour racines

$$x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

et

$$x = 2\cos\frac{2k\pi}{7},$$

et comme discriminants les carrés 81 et 49. L'expression de leurs racines en fonction d'une d'entre elles est donnée par Serret (*loc. cit.*, p. 550-551). Les polynômes précédents sont les premiers exemples des polynomes cubiques admettant pour racines les périodes à $\frac{p-1}{3}$ termes des nombres premiers $p = 3m + 1$, tels qu'on les

considère dans la théorie de la division du cercle. Le plus simple après ceux-ci se trouve en résolvant l'équation binome $x^{13} = 1$; les périodes à 4 termes sont alors

$$x + x^5 + x^8 + x^{12}, \qquad x^2 + x^3 + x^{10} + x^{11}$$

et

$$x^4 + x^6 + x^7 + x^9.$$

Chacune vérifie l'équation

$$y^3 + y^2 - 4y + 1 = 0$$

dont le discriminant est 13^2 et dont les racines s'expriment rationnellement les unes par les autres.

Sans insister sur ces points qui sont bien connus, terminons par une remarque plus intéressante concernant les deux polynomes

$$x^3 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

Ils admettent comme diviseurs : le premier, tous les nombres premiers des formes $9m \pm 1$, et ceux-là seulement, en y ajoutant cependant le diviseur 3 ; le second, tous les nombres premiers de formes $7m \pm 1$, et ceux-là seulement, en y ajoutant cependant le diviseur 7.

En effet, j'ai démontré dans l'*Enseignement mathématique* (novembre 1908) que la congruence $x^3 - 3abx + ab(a+b) \equiv 0$ suivant le module $p = 3k \pm 1$ a trois racines, seulement si le terme y_k de la récurrence

$$y_0 = 0, \qquad y_1 = 1, \qquad \ldots, \qquad y_n = (a+b)y_{n-1} - ab\,y_{n-1}$$

est divisible par p. Dans le cas du polynome $x^3 - 3x + 1$ on a : $a + b = 1$, $ab = +1$, et la récurrence précédente se réduit à la répétition indéfinie de la période $0, 1, 1, 0, -1, -1$ dont les termes sont nuls de trois en trois. Il faut donc que $k = 3m$ et $p = 9m \pm 1$. Réciproquement, cette condition est suffisante dans le cas d'un discriminant carré parfait. Le module $p = 3$ est exclu de ce raisonnement et la congruence $X \equiv 0$ possède alors une seule racine $x \equiv 2$.

Passons au cas de $X = x^3 + x^2 - 2x - 1$. Si x est une des racines de la congruence $X \equiv 0$, considérons la congruence, peut-être irréductible,

$$\alpha^2 - \alpha x + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p).$$

Si α était égal à 1, x vaudrait $2 \pmod p$, et $X \equiv 7$; on voit que le module serait alors égal à 7, cas réservé. Dans tous les autres, α est différent de l'unité et vérifie la congruence $X\left(\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\right) \equiv 0$ $(\text{mod } p)$; or, calcul fait, $\frac{\alpha^7-1}{\alpha-1} \equiv 0 \pmod p$, ou enfin $\alpha^7 \equiv 1$ $(\text{mod } p)$. Mais, comme on a certainement $\alpha^{p^2-1} \equiv 1$, on voit que p^2-1 est divisible par 7; ainsi $p = 7m \pm 1$.

Réciproquement, quand $p = 7m + 1$, la congruence $\alpha^7 \equiv 1$ a ses racines réelles; et alors en désignant par α l'une d'elles, différente de l'unité, les trois racines de la congruence $X \equiv 0$ sont

$$x = \alpha + \alpha^{-1}, \qquad \alpha^2 + \alpha^{-2}, \qquad \alpha^{+3} + \alpha^{-3}.$$

Si $p = 7m - 1$, la congruence $\alpha^7 \equiv 1$ admet des racines dans le domaine $a + b\sqrt{N}$, où N est un non-résidu de p : or si α est un nombre imaginaire de ce domaine $\alpha^p \equiv \beta$, β désignant le nombre conjugué; d'où résulte

$$\alpha\beta \equiv \alpha^{p+1} \equiv \alpha^{7m} \equiv 1.$$

Ainsi la somme $\alpha + \alpha^{-1}$ est de nouveau réelle, et la congruence $X \equiv 0$ admet trois racines réelles dont les expressions littérales sont les mêmes que ci-dessus.

Enfin le cas $p = 7$ se traite à part et l'on reconnaît que, pour ce module diviseur du discriminant, la congruence $X \equiv 0$ a une seule racine, savoir $x \equiv 2$. C. Cailler (Genève).

Les racines de l'équation du troisième degré

$$(ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d) = 0$$

peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une d'elles et de $\sqrt{\Delta}$, Δ étant le discriminant

$$-27[(cb-da)^2 - 4(db-c^2)(ac-b^2)].$$

Si a, b, c, d et $\sqrt{\Delta}$ sont des nombres entiers, les trois racines de la congruence

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d \equiv 0 \pmod p$$

sont en même temps des nombres entiers, ou des imaginaires au sens de Galois. Pellet.

Les deux congruences signalées sont les seules qui jouissent des propriétés énoncées.

D'une manière générale, pour qu'une congruence cubique irréductible,

$$x^3 + ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p,\ p \text{ premier}},$$

soit telle qu'à toute racine α soient associées la racine

$$\beta \equiv \alpha^2 + k$$

et par suite aussi

$$\gamma \equiv \beta^2 + k,$$

il faut et il suffit que, dans le résultat de la substitution de $\alpha^2 + k$ à x, les coefficients de α^2, α^1, α^0 soient identiquement nuls, ce qui exige qu'on ait

$$\begin{aligned} k &= -a^2 + a - 2, \\ b &= -a^2 + 2a - 3, \\ c &= -a^3 + 2a^2 - 3a + 1. \end{aligned}$$

Il y a lieu de rejeter la solution

$$\begin{aligned} k &= -a^2 + a - 1, \\ b &= -a^2 + 2a - 1, \\ c &= -a^3 + 2a^2 - a, \end{aligned}$$

qui donnerait la congruence réductible (indépendante de p)

$$(x + a)[x^2 - (a - 1)^2] \equiv 0.$$

WELSCH.

Autre réponse de M. E. MALO, transmise à M. ESCOTT.

3527 (1909, 51) (E.-B. ESCOTT). — *Sur* $X^3 - X - 1$. — Nous supposerons que les deux facteurs soient complémentaires. Alors $X^3 - X - 1$ développé aura ses coefficients rationnels.

a est différent de o parce que $X^3 - X - 1$ est irréductible.

On a

$$X^3 - X - 1 = a^3x^6 + 3a^2bx^5 + 3(ab^2 + a^2c)x^4 + \ldots$$
$$+ (3ac^2 + 3b^2c - a)x^2 + \ldots.$$

Les nombres suivants devant être rationnels,

$$a^3, \qquad \frac{a^2b}{a^3} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{ab^2 + a^2c}{a^3} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a},$$

$$3ac^2 + 3b^2c - a = 3a^3\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\,\frac{c}{a}\right) - a,$$

il en résulte successivement que $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, a et par conséquent b et c sont rationnels.

Les racines de $X^3 - X - 1$ étant α, β, γ, nombres irrationnels, on a

$$X^3 - X - 1 = (ax^2 + bx + c - \alpha) \times (ax^2 + bx + c - \beta)(ax^2 + bx + c - \gamma) = f(x).$$

Posons

$$b^2 - 4ac = d, \quad d + 4a\alpha = A, \quad d + 4a\beta = B, \quad d + 4a\gamma = C.$$

Un facteur linéaire de $f(x)$ est de la forme

$$\lambda(2ax + b + \sqrt{A}),$$

$\sqrt{A}$ pouvant avoir deux déterminations.

$\sqrt{A}$ est irrationnel et par conséquent $2a\lambda$ et $\lambda(b + \sqrt{A})$ ne peuvent être tous les deux rationnels.

Un facteur du second degré à coefficients rationnels ne peut être que de la forme

$$\lambda(2ax + b + \sqrt{A})(2ax + b + \sqrt{B}),$$

λ serait rationnel et l'on aurait, en considérant le coefficient de x,

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = r, \qquad \text{rationnel.}$$

En chassant les radicaux on arrive à une équation du second degré en γ à coefficients rationnels et ne se réduisant pas à une identité. Cela est impossible puisque $X^3 - X - 1$ est irréductible.

On ne doit pas prendre non plus un facteur du troisième degré de la forme

$$\lambda(ax^2 + bx + c - \alpha)(2ax + b + \sqrt{B}),$$

comme on le voit en considérant les termes en x^2 et x^3.

On ne peut donc prendre qu'un facteur de la forme

$$\lambda(2ax + b + \sqrt{A})(2ax + b + \sqrt{B})(2ax + b + \sqrt{C}).$$

Il faut qu'on ait

$$(1) \qquad \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = r, \qquad \text{rationnel.}$$

Réciproquement, supposons que (1) soit vérifiée. On en conclut, en

élevant au carré, que

$$\sqrt{BC} + \sqrt{CA} + \sqrt{AB}$$

est rationnel. D'ailleurs, en chassant les radicaux, (1) donne

$$64 r^2 ABC = 64 r^2 (d^3 - 16 a^2 d + 64 a^3) = (r^4 - 6 d r^2 + 64 a^2 - 3 d^2)^2.$$

Alors $\sqrt{ABC}$ est carré et l'on voit facilement que le facteur considéré est à coefficients rationnels. Les conditions à remplir sont les suivantes :

$$d^3 - (4a)^2 d + (4a)^3 = \text{un carré}, \quad \text{soit } k^2,$$

et l'équation en r

$$r^4 - 6 d r^2 \pm 8 k r + 64 a^2 - 3 d^2 = 0$$

doit admettre une racine rationnelle. E. Dubouis.

Si $X^3 - X - 1$ pour $X = ax^2 + bx + c$ admet deux facteurs rationnels, chaque racine x de $X^3 - X - 1 = 0$ peut s'exprimer rationnellement en fonction d'une racine de $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$; et réciproquement.

Ainsi, soit

$$x = A\alpha^2 + B\alpha + C;$$

d'où

$$x^2 = (A^2 + B^2 + 2AC)\alpha^2 + (A^2 + 2AB + 2BC)\alpha + C^2 + 2AB;$$

si

$$A^2 + B^2 + 2AC = 0,$$

en prenant X égal à

$$\frac{x^2 - C^2 - 2AB}{A^2 + 2AB + 2BC},$$

$X^3 - X - 1$ se décompose en deux facteurs rationnels.

Ainsi

$$x = -\frac{\alpha^2}{5} + \frac{3\alpha}{5} + 1;$$

$$x^2 = \frac{19}{25} + \alpha, \qquad X = x^2 - \frac{19}{25};$$

$$x = -\alpha^2 + \alpha + 1, \qquad x^2 = -1 + \alpha, \qquad X = x^2 + 1;$$

$$x = -\frac{1}{\alpha}, \qquad x^2 - x = \alpha, \qquad X = x^2 - x;$$

$$x = \alpha^2 + \alpha - 1, \qquad x^2 = 3 + \alpha, \qquad X = x^2 - 3.$$

Pellet.

3531 (**1909**, 52) (L. Bloch). — *Équation différentielle.* — On trouve, dans

L. Schlesinger, *Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit* 1865 (*D. V. M.*, t. XVIII, 1909, p. 133-266,

à la page 251, l'indication suivante :

Ch.-M. Mason, *Sur l'équation différentielle* $y'' + \lambda A(x) y = 0$ (*C. R.*, t. CXL, 1905, p. 1086-1088).

Voir aussi :

I. M., t. XIV, **1907**, p. 215-216, p. 227-228; t. XV, **1908**, p. 7-9, p. 184-185.
O. Degel (Bayreuth).

3532 (**1909**, 52) (T. Lemoyne). — *Courbes anharmoniques.* — voir :

H. Wieleitner, *Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von* 1890-1904, Leipzig, 1905, G.-J. Göschen, p. 49.
O. Degel (Bayreuth).

Les principales propriétés des courbes

$$x^u y^v z^w = \lambda \qquad (u + v + w = 0)$$

se trouvent exposées dans l'Ouvrage de G. Loria, *Spezielle algebraische und transcendante ebene Kurven* (Leipzig, 1902; une nouvelle édition est actuellement en préparation), p. 552-559; le lecteur y trouvera citées les principales sources.

Original.

Les courbes anharmoniques ont effectivement été étudiées par Klein et Lie sous le nom de courbes W.

Voir G. Loria (traduct. Schütte), *Spezielle alg. u. trans. ebene Kurven,* 1896, p. 552-559, où sont mentionnés des travaux de Battaglini, Fouret, Halphen, Legoux, etc.

Au sujet des courbes qui admettent des transformations birationnelles en elles-mêmes, *voir* aussi questions **643** (**1895**, 315; **1896**, 112, 281); **743** (**1896**, 33, 191) et **3466** (**1908**, 269).



G. Loria (*loc. cit.*) rappelle que, parmi les courbes $x^u y^v z^w = \lambda$, se trouvent la potentielle triangulaire de G. de Longchamps, les courbes polytropiques de Zeuner et la spirale logarithmique.

E. Liminon.

J'ignore quelles sont les propriétés connues des courbes dont l'équation est

$$x^u y^v z^w = \lambda (u + v + w = 0),$$

en dehors de celles qui résultent immédiatement de ce que ces courbes sont autohomographiques, c'est-à-dire qu'elles se transforment en elles-mêmes en une infinité d'homographies dont le triangle de référence est le triangle invariant.

Deux sommets de ce triangle sont des points limites ou asymptotiques, l'un dans la transformation directe, l'autre dans la transformation inverse, et les tangentes en ces points sont les côtés du triangle autres que celui qui les joint.

J'ai mentionné à plusieurs reprises ce genre de courbe dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* en particulier à propos de la question 228 (**1895**, 59), et l'étude de la question 166 m'a amené à rapprocher la génération des surfaces autohomographiques de celle des cylindres et à trouver leur équation générale qui est, en coordonnées cartésiennes,

$$F\left(\frac{x}{z^A}, \frac{y}{z^B}\right) = 0$$

(**1895**, 339), ou, en coordonnées normales par rapport au tétraèdre invariant de l'homographie,

$$F(x^u y^v z^w, x^{u'} y^{v'} \rho^\omega) = 0$$
$$(u + v + w = 0, u' + v' + \omega = 0).$$

Ces équations impliquent que le triangle (ou le tétraèdre) invariant est complètement réel; dans le cas contraire, les équations sont beaucoup plus compliquées, comme je l'ai montré dans une communication sur l'homographie faite à l'A. F. A. S. (Congrès de Clermont, 1908).

Welsch.

QUESTIONS.

3601. [**V**] D'un manuscrit de Christiaan Huygens il résulte qu'il était en possession des deux théorèmes suivants :

1° *Les triangles maxima inscrits dans des segments équivalents* d'une même hyperbole *sont équivalents, et réciproquement.*

2° *Soient* O *le centre de l'hyperbole,* A *le sommet d'un triangle maximum, inscrit dans un segment,* B *le milieu de la base de ce triangle; alors, pour des segments équivalents, les rapports* OB : OA *sont égaux, et réciproquement.*

Sans doute ces théorèmes auront été retrouvés depuis; qui peut me dire quand, par qui et à quelle occasion?

D. J. Korteweg (Amsterdam).

3602. [**J2b**] I. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les tire toutes successivement.

On demande le nombre N_n^m des tirages différents possibles, pour lesquels m boules sortiraient au rang correspondant à leur numéro, et le nombre N_n des tirages différents possibles pour lesquels un nombre quelconque de boules, mais au moins égal à 1, sortiraient au rang correspondant à leur numéro.

II. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire des boules une à une; on s'arrête au $p^{\text{ième}}$ coup si la boule sortie à ce coup porte le numéro p. On demande combien il existe de combinaisons possibles pour les $p-1$ boules antérieurement sorties, pour aucune desquelles il n'y a par conséquent coïncidence entre son numéro et son rang de sortie. Si l'on désigne le nombre de ces combinaisons

par M_n^p, on a

$$M_n^1 = 1, \qquad M_n^2 = n-2, \qquad M_n^3 = (n-2)(n-3)+1;$$

M_n^o correspond au cas où l'on tire les n numéros sans avoir aucune coïncidence. WORMS.

3603. [O2k] Étant données une famille de courbes planes et la famille orthogonale, il existe le long des courbes de la première famille une relation

$$f(\rho_1, \rho_2) = 0$$

entre les rayons de courbure des deux courbes.

1° Peut-on démontrer que la relation $f(\rho_2, \rho_1) = 0$ est satisfaite pour la famille orthogonale?

2° La relation $f(\rho_1, \rho_2) = 0$ est-elle satisfaite pour une infinité de familles non superposables? A. ALAYRAC.

3604. [J2e] Par hypothèse, les formules $ax^2 + bx + c$ et $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ donnent satisfaction ([1]):

la première, pour $x = 0, -1, \ldots, -m$;
la deuxième, pour $x = 0, +1, \ldots, +n$.

Est-il possible de les fusionner en une formule unique $Ax^2 + Bx + C$ donnant satisfaction pour

$$x = -m, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +n?$$

G. LEMAIRE.

3605. [I9] Les progressions arithmétiques de 6 ou 7 termes premiers (surtout celles de désinence 7) ne sont

(1) Le sens mathématique de ce mot reste évidemment à préciser.

pas rares. Exemples :

7, 37, 67, 97, 127, 157

107, 137, 167, 197, 227, 257.

7, 157, 307, 457, 607, 757, 907

47, 257, 467, 677, 887, 1097, 1307.

En connaît-on de plus étendues? G. LEMAIRE.

3606. **[K11]** *Sur les lunules d'Hippocrate.* — 1° Qui a observé le premier que les diamètres des cercles maxima inscrits dans les lunules sont égaux au rayon du cercle inscrit dans le triangle générateur?

2° Qui a résolu le premier la quadrature des lunules au moyen du carré construit sur leur tangente commune?

G. LEMAIRE.

3607. **[K9]** Le rayon du cercle circonscrit à un quadrilatère inscriptible de côtés a, b, c, d est donné par la formule symétrique

$$r^2 = \frac{abcd(a^2+b^2+c^2+d^2)+(abc)^2+(abd)^2+(acd)^2+(bcd)^2}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+d+c-b)(d+c+b-a)}.$$

Quelque correspondant pourrait-il m'indiquer quelle est la valeur du rayon du cercle circonscrit à un pentagone inscriptible en fonction de ses côtés a, b, c, d, e de manière qu'en annulant un quelconque des cinq côtés on en déduise la formule analogue relative au quadrilatère, de la même manière qu'on déduit de la formule ci-dessus le rayon du cercle circonscrit au triangle. J'ai obtenu le rayon à l'aide d'équations, mais je désire obtenir une formule bien claire et symétrique. Federico VILLAREAL (Lima, Pérou).

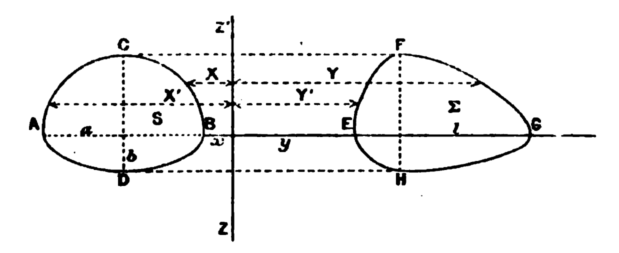
[D'après l'espagnol. (LA RÉD.)]

3608. **[P6]** On donne un demi-cercle ACB de rayon a et une demi-ellipse accolée d'axes $2a$ et $2b$. On cherche une

courbe transformée, de surface Σ, telle que ses points soient donnés par l'égalité suivante :

$$x(y+l) = K = (x+2a)y = XY = X'Y'.$$

Connaissant la surface S, peut-on imposer la surface Σ?



exemple : si $S = 6\pi$, peut-on avoir $\Sigma = 6m^2$, les inconnues principales étant peu différentes de nombres entiers?

Je désirerais savoir, ayant $a = 3$ et $b = 1$, avec $K = 34$, si l'on peut avoir $l = 6$ et $\Sigma = 22^{m^2}$, avec une approximation au centimètre carré, si possible.

Cette question m'intéressant personnellement, je serais reconnaissant, à ceux de nos collègues qui voudront bien donner une réponse détaillée, de me l'adresser directement.

A. Gérardin.

3609. [O6j] Le lieu géométrique des axes de suspension parallèles autour desquels la durée d'oscillation d'un corps solide invariable est minimum, est évidemment un cylindre de révolution dont l'axe passe au centre de gravité de ce corps. Si l'on fait varier la direction de ces axes par rapport au solide, quelle sera la surface enveloppe de ces cylindres?

Paulmier.



RÉPONSES.

---

13. (**1894**, 4) (*Lerusse*). — *Ouvrages sur l'enseignement de la Géométrie* (**1894**, 12, 62, 135, 237, **1895**, 135). — Il vient de paraître dans ces dernières années deux Livres excellents, en anglais, sur l'enseignement (teaching) des Mathématiques :

David-Eugène Smith, *The teaching of elementary Mathematics* (1904; Macmillan Co., N. Y.).

J.-W.-A. Young, *The teaching of Mathematics in the elementary and secondary schools* (Longmans, Grenn and Co., N. Y.).

E.-B. Escott (Ann Arbor).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

1133. (**1897**, 196) (H. Tarry). — *Formule* x^2+x+41 (**1898**, 114, 184; **1899**, 10; **1909**, 176).

Qu'on fasse

$$x = 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad 38, \quad 39$$

ou

$$x = -1, \quad -2, \quad \ldots, \quad -39, \quad -40,$$

la formule d'Euler ne donne que 40 nombres premiers :

$$41, \quad 43, \quad \ldots, \quad 1523, \quad 1601.$$

La modification proposée par M. Escott (**1899**, 10) est donc illusoire.

G. Lemaire.

1161. (**1897**, 241) (E.-B. Escott). — *Un problème de Legendre* (**1898**, 120). — Il faut consulter : Legendre, *Théorie des Nombres*, 4e Partie, p. 144; Euler, *Comment. Arith. Coll.*, t. I, p. 440; Lebesgue, *Sur un théorème des Nombres* (*N. A.*, 1856, p. 403);

M.-C.-O. Bouk af Gennäs, *Sur un problème d'Euler mentionné par Legendre dans sa Théorie des Nombres, et quelques notes sur les carrés magiques de* 3 *et de* 4 (Stockholm, 1898 : *Bihang Till K. Svenska Vet.-Acad. Handlingar,* Band XXIV, Afd. 1, n° 2).

Si l'on avait

$$\begin{matrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ d^2 & f^2 & g^2 \end{matrix}$$

on verrait immédiatement que

$$2x^2 = c^2 + f^2;$$

de même pour les symétriques.

Le problème pour 16 nombres est possible par les formes suivantes, admettant beaucoup de nombres communs :

$$\begin{matrix} -2a & b & b & 3a, \\ 3a & b & -b & 2a, \\ b & 2a & 3a & -b, \\ b & -3a & 2a & b, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -2h & 3h & l & l, \\ l & l & 2h & -3h, \\ l & -l & 3h & 2h, \\ 3h & 2h & -l & l. \end{matrix}$$

Ces deux solutions ont été obtenues de la manière suivante : Le signe —, étant placé une fois dans chaque *ligne, colonne* ou diagonale, donne *deux* types de solutions.

D'autre part, la solution connue d'Euler donne pour les carrés les terminaisons suivantes :

4	1	1	9
9	1	1	4
1	4	9	1
1	9	4	1

d'où l'on a extrait les racines et combiné avec le signe négatif.

Euler pose en général

$$A = \pm ap \pm bq \pm cr \pm ds.$$

La somme des carrés d'une ligne est alors

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2).$$

En écrivant la même condition pour les diagonales, on obtient

$$pr + qs = 0,$$
$$\frac{a}{c} = \frac{-d(pq + rs) - b(ps + qr)}{b(pq + rs) + d(ps + qr)}.$$

Soient $p = 6$, $q = 3$, $r = 1$, $s = -2$, d'où

$$\frac{a}{c} = \frac{9b - 16d}{16b - 9d}.$$

Pour trouver une nouvelle solution de ce problème, faisons $b = 0$. Nous aurons ainsi

$$\begin{array}{cccc}
105 - 2d & 3d - 38 & 6d + 59 & 30 - d, \\
-(d + 66) & 6d - 5 & 70 - 3d & 2d + 87, \\
-(3d + 38) & -(2d + 105) & d + 30 & 6d - 59, \\
6d + 5 & d - 66 & 2d - 87 & 3d + 70.
\end{array}$$

On remarquera d'abord que les coefficients de d forment à eux seuls une solution de la question, en acceptant plusieurs nombres communs. Soit $d = 2$; nous aurons

$$\begin{array}{rrrr}
-2 & 3 & 6 & -1, \\
-1 & 6 & -3 & 2, \\
-3 & -2 & 1 & 6, \\
6 & 1 & 2 & 3,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
101 & -32 & 71 & 28, \\
-68 & 7 & 64 & 91, \\
-44 & -109 & 32 & -47, \\
17 & -64 & -83 & 76.
\end{array}$$

La plaquette de M. Boije af Gennas est intéressante, mais il part d'une forme *spéciale* de carrés magiques, et il peut ainsi introduire de nouvelles conditions.

Une dernière remarque pour finir :

Si l'on a (**1897**, 241)

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = S,$$
$$AE + BF + CG + DH = 0,$$

on aura aussi

$$(A \pm E)^2 + (B \pm F)^2 + (C \pm G)^2 + (D \pm H)^2 = 2S.$$

A. Gérardin.

1240. (**1898**, 32) (Goulard). — *Méthodes de Landry* (**1898**, 168).

— Voici quelques renseignements sur les méthodes de Landry pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers.

Consulter d'abord A. F. (Reims, 1880, p. 202), communication de M. Ch. Henry, dont voici un extrait : « Ed. Lucas a plusieurs fois mentionné une méthode de décomposition des grands nombres due à Aurifeuille et à Landry; cette méthode, beaucoup plus rapide et plus puissante que celles d'Euler et de Gauss, grâce aux nombreux perfectionnements qu'elle a reçus de Landry, Le Lasseur et Lucas, est encore inédite. Cependant, nous sommes autorisés, d'abord par une gracieuse communication de Ed. Lucas, ensuite par une lettre de F. Landry, à dire qu'elle serait seulement un perfectionnement au procédé qu'on trouve dans le *Dictionnaire des Mathématiques* de Montferrier (art. nombre premier). Ce dernier la devait-il à Wronski? en était-il l'inventeur? La chose est improbable; en tout cas, nous trouvons dans une pièce de Fermat la même méthode appliquée à la décomposition des grands nombres. »

Cette méthode intitulée : *Des parties aliquotes,* par Fermat [Ms. Fonds français, n° 3280, nouv. acquis., feuillets 169 et 170], a été publiée par M. Ch. Henry (*B. Bon.,* juillet à octobre 1879), dans ses *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche* (p. 665 et 666 du *B. Bon.,* ou p. 191 du tirage à part).

Voici, pour terminer, un extrait de la lettre de Landry dont il est parlé ci-dessus : « La méthode de Fermat que vous me signalez m'a singulièrement frappé. C'est qu'en effet, elle contient dans son genre la méthode de Le Lasseur et Aurifeuille et, par conséquent, la mienne; je veux dire celle que j'ai d'abord employée et avec laquelle j'ai opéré mes premières décompositions. Je m'en servais encore à l'époque où j'ai publié mon opuscule de 1867.

» Cette méthode réussit promptement si les facteurs sont peu différents, sinon elle devient *impraticable*.... Voici le principe : Si $N = ab$, et que l'on pose $a = x + y$ et $b = x - y$, on en déduira $y^2 = x^2 - N$, et, en prenant les divers carrés supérieurs à N, on trouvera parmi les restes un carré parfait....

» La méthode se trouvant insuffisante pour les grands nombres que j'ai abordés après 1867, j'ai dû en trouver une autre.... C'est avec elle que j'ai décomposé récemment $2^{64}+1$. C'est cette dernière méthode dont la rédaction, assez laborieuse, m'occupe en ce mo-

ment.... Il me faut revoir et recomprendre toutes mes anciennes paperasses que j'ai heureusement conservées. »

Voir aussi 3213 (**1907**, 103).

P.-S. — Je demande ses plaquettes *en communication*. Que sont devenues ses archives?

A. GÉRARDIN.

1253. (**1898**, 75; **1908**, 244) (A. BOUTIN). — *Équations indéterminées.* — L'équation $x^2+x+1=y^3$ admet aussi $x=0$ pour solution.

L'expression x^2+x est le double d'un triangulaire, donc y est impair, et, en posant $y=2z+1$, on aura

$$x^2+x=8z^3+12z^2+6z$$

ou

$$(2x+1)^2=32z^3+48z^2+24z+1.$$

Le problème se ramène donc à rendre carrée cette expression, en entiers.

L'équation

$$x^2+x-1=y^3$$

admet

$$x=0 \quad \text{et} \quad x=1.$$

On aura de même

$$x^2+x=8z^3+12z^2+6z+2$$

ou encore

$$32z^3+48z^2+24z+9=(2x+1)^2.$$

La première expression peut encore s'écrire

$$\frac{x^3-1}{x-1}=y^3$$

et l'on voit que x ne peut avoir la forme a^3+1, puisque la différence de deux cubes ne peut pas être un cube.

Voir aussi 3490 (**1909**, 136).

A. GÉRARDIN.

1274. (**1898**, 80; **1908**, 267) (*Novus*). — *Écrits de Leibniz.* — Dans le *Bücher-Verzeichnis*, n° **420**, de R. Friedländer et Sohn, Berlin, on trouve, p. 11-12, les indications suivantes sur les écrits de G.-G. Leibniz :

Opera omnia, coll. Dutens., 6 vol. Genevæ, 1768, in-4° cart.

Mathemat. Schriften. Hrsg. v. C.-J. Gerhardt, 7. Thle, in-8°, Bdn. mit Suppl. Bd., zus. 9. Bde., Berlin, 1849-63, in-8°, avec fig.

Hist. et origo calculi different. — Hersg. v. Gerhardt, Hann, 1846, in-8°.

Nova methodus pro maximis et minimis. Ex Actis Erudit., ann. 1684, ed. F. Giesel, Lips., 1884, in-4°, avec fig.

Epistolæ ad diversos, éd. C. Kortholt. Vol. I-III. Lips., 1734-1738, in-8°, Prgtb.

G.-G. Leibniz et Bernoulli. — *Commercium philos. mathem.,* 2 vol. Lausanne, 1745, in-4°, cart.

Correspondence with Newton, Collins, Huygens, etc. : *Mathemat. Briefwechsel,* 2 Thle, Berlin, 1851, in-8° avec fig., Lnbd.

Briefe an Ch. Philipp. — Hrsg. v. W. Wachsmuth, Leipzig, 1846, in-4°.

Briefwechsel m. Chr. Wolf. Hersg. v. C.-J. Gerhardt, Halle, 1860, in-8°, av. fig.

Der Briefwechsel, v. Leibniz in d. öffentl. Bibliothek zu Hannover, beschrieb, v. E. Bodemann, Hann., 1889, gr. in-8°.

Voir encore :

E. Gerland. — *Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts,* vi + 256 pages, Leipzig, 1906, B.-G. Teubner; et l'analyse de ce Livre par M. P. Johannesson (*A. Gr.,* 3e série, t. XIII, 1908, p. 188-190).

O. Degel (Bayreuth).
[D'après l'allemand. (La Réd.)]

1277. (**1898**, 98; **1909**, 8) (H. Caronnet). — *Figures dont les centres de gravité de l'aire et du périmètre coïncident* (**1909**, 150). — Il est facile de former un grand nombre de figures limitées par des lignes droites et ayant la propriété requise. Voici deux exemples :

Dans la figure 1, en égalant les coordonnées des centres de gravité, il nous reste encore une grande latitude dans la détermination des dimensions.

Si

$$a = 3, \quad b = 3, \quad c = 2, \quad d = 3, \quad e = 1, \quad f = 1, \quad k = 2,$$

le centre de gravité commun est

$$x = -\frac{165}{26}.$$

Fig. 1.

Dans la figure 2, il en est de même.

Fig. 2.

Si

$$a = 25, \quad b = 3, \quad c = 2, \quad d = 24, \quad e = 5,$$
$$f = 4, \quad g = 5, \quad h = 4,$$

les coordonnées du centre de gravité sont

$$x = \frac{25}{8}, \qquad y = \frac{119}{8}.$$

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

1477. (**1899**, 74) (E. Borel). — *Sur certaines fonctions entières* (**1905**, 14). — Comme addition particulièrement importante, *voir*

Congrès de Rome (1908) : Conférence Mittag-Leffler, *Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe* (p. 67-85, 1 pl.).

Recta.

2248. (**1901**, 310) (E. Maillet). — *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (**1905**, 17, 177). — M. W. Ahrens, de Magdebourg, m'écrit, au sujet de l'article P. Bachmann-E. Maillet, intitulé : *Propositions élémentaires de la théorie des nombres*, et paru dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées* (J. Molk, directeur), une lettre dont une bonne partie est reproduite ci-dessous, après traduction de l'allemand.

E. Maillet.

Permettez-moi quelques remarques au sujet de la partie de l'article relative aux carrés magiques.

1. Le carré de la page 64 n'est pas celui de Dürer, mais le même retourné de 180°. Dans mes *Math. Unterhaltungen und Spiele*, p. 209, j'ai, il est vrai, fait la même faute, et cela, malgré de nombreuses lectures, à cause des *Vermischte Untersuchungen*, de Günther, p. 216 (où cependant le carré est bien indiqué dans la figure 16). C'est M. V. Coccoz qui me signala l'erreur en son temps. Le vrai carré de Dürer a été depuis publié dans une petite édition de mon Livre *Mathematische Spiele*, Teubner, 1907 (p. 97), où je donne en même temps en titre une reproduction de la gravure *Melencolia*.

2. C'est aussi M. Labosne (Note 357) qui a publié la quatrième édition (1879) de l'Ouvrage de Bachet de Méziriac, peut-être même aussi la troisième (1874).

3. Les recherches de Th. Harmuth (Note 382) s'appliquent aux carrés semi-magiques, où l'on ne tient pas compte des conditions relatives aux diagonales. Je ne crois pas que cet auteur ait indiqué une méthode essentiellement nouvelle pour la construction de carrés de côté impair.

4. La méthode de Ball (Note 383) dérive de celle de C.-H. Harrison, que Ball cite. Comparer Harrison, *On magic squares*, *Messenger of Math.*, Vol. XXXI, mai 1901-avril 1902, p. 52.

5. En ce qui concerne A.-H. Frost (Note 389), il faut encore citer : A.-H. Frost, *The Construction of Nasik Squares of any*

order (*Proc. of the London Mathem. Soc.,* Vol. XXVII, nov. 1895-nov. 1896, p. 487-518).

6. A propos du problème des 36 officiers, il aurait peut-être été bon de mentionner le travail de Petersen (*Annuaire des Mathém.,* Paris, Naud, 1902, p. 413-427), avec la critique de G. Tarry (*Interm. des Mathém.,* t. XII, 1905, p. 175).

7. L'index bibliographique de la nouvelle édition de mon Livre maintenant sous presse sera beaucoup plus riche que celui de la première édition. Peut-être ne sera-t-il pas superflu que j'appelle votre attention du moins sur quelques auteurs qui ont écrit sur les carrés magiques, mais ne sont pas cités dans votre article, c'est-à-dire (les indications détaillées corrélatives se trouvant dans mon Livre) :

Avant 1800 : Riese, Kochanski, Franklin;

Au XIX[e] siècle : Lorenz, Mollweide, Zuckermandel, Holditch, P. Mansion, Cayley, F. Herrmann, Schlegel. Récemment : Planck (1902), Willis (1902).

On trouve beaucoup d'indications bibliographiques à la fin de l'article de F.-A.-P. Barnard dans les *Memoirs of the National Academy of Sciences,* 4, part I, Washington, 1888, p. 207-270.

W. Ahrens (Magdebourg).

[D'après l'allemand. (E. Maillet.)]

Il est bon, je crois, de profiter de la réponse de M. Ahrens à **2248** pour publier la copie exacte du carré magique d'Albert Dürer.

Je la communique, tirée de la gravure *Melencolia,* 1514 :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

(constante magique 34).

D'après l'album *Aus Albrecht Dürers Kupferstichen,* Verlag v. Fischer u. Franke, Berlin et Paris, Fischbacher. H. Brocard.

Dès la réception du cahier de l'*Encyclopédie* (août 1906), M. H. Brocard m'avait fait part de l'inexacte copie du carré magique d'Albert Dürer. E. Maillet.

2446. (**1902**, 263) (*Meglio*). — *Phénomènes intellectuels chez les*

mathématiciens (**1902**, 339; **1905**, 131 : **1906**, 242). — On peut rattacher à cette question et à l'*Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens* ouverte par la Rédaction de l'*Enseignement mathématique* : 1° Un article posthume d'Amédée Mannheim (*Ens. math*, n° 3, 11ᵉ année, mai 1909) intitulé : *L'invention mathématique*; 2° Un article de M. H. Poincaré (*Ens. math.*, 10ᵉ année, septembre 1908, p. 357) intitulé aussi : *L'invention mathématique*.

E. MAILLET.

2691. (**1903**, 299) (H. BROCARD). — *Nombres dont les puissances commencent par les mêmes chiffres que le nombre* (**1904**, 244).

Si l'on pose $10^{\frac{1}{2}} = N$, on a $N^{2n+1} = 10^n . 10^{\frac{1}{2}} = 10^n N$.

De même, posant $N = 10^{\frac{n}{p}}$, on a $N^{p+1} = N.10^n$; N et N^{p+1} commencent par les mêmes chiffres.

E.-B. ESCOTT (Ann. Arbor, Mich.)
[D'après l'anglais. (LA RÉD.)]

2724. (**1904**, 33) (P.-F. TEILHET). — *Décomposition de tout nombre entier en une somme de k puissances $n^{ièmes}$ d'entiers positifs* (**1904**, 292; **1906**, 104; **1907**, 132; **1908**, 201). — M. Hilbert vient d'établir complètement (*Math. Ann.*, t. LXVII, 1909, p. 281-300) le théorème suivant :

Tout nombre entier positif peut être représenté comme somme de puissances $n^{ièmes}$ de nombres entiers positifs, de façon que le nombre de ces entiers reste au-dessous d'une certaine limite, qui ne dépend que de l'exposant n, mais non du nombre à représenter. L'article a pour titre : « *Beweis für die Darstellbarkeit der [ganzen] Zahlen durch eine feste Anzahl n^{ter} Potenzen* (Waringsches Problem). Dem Andenken an Hermann Minkowski gewidmet. »

Voir aussi une autre rédaction du même travail dans les *Nachr. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, février 1909, et, à la suite de l'article de M. Hilbert, l'article *Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems*, de M. F. Hausdorff (*Math. Ann.*, t. LXVII, p. 301-305).

E. MAILLET.

3015. (**1906**, 35) (*Crut*). — ***Enveloppe et lieu géométrique*** (**1906**, 176; **1909**, 35, 108). — Lorsque l'équation d'une droite renferme un paramètre unique, on peut obtenir la classe et l'ordre de son enveloppe sans faire l'élimination du paramètre.

Ils sont donnés respectivement par le degré de celui-ci dans l'équation de la droite et dans celle qui résulte de l'élimination des coordonnées courantes entre cette équation, sa dérivée par rapport au paramètre et l'équation générale des droites du plan.

En faisant l'application de cette méthode au cas actuel, on voit immédiatement que l'enveloppe est de la huitième classe et du dixième ordre.

On en conclut aussi que sa podaire centrale, dont le centre est un point *octuple*, est du quatorzième ordre.

WELSCH.

Une note complémentaire, indiquant d'autres propriétés de l'enveloppe, a été communiquée à M. *Crut*.

LA RÉDACTION.

3149. (**1907**, 25) (E. MAILLET). — (**1908**, 109). — Je dois faire à ma première réponse une addition qui me paraît utile.

La possibilité de la décomposition de tout nombre rationnel positif en quatre carrés au plus de nombres rationnels a été rappelée ou visée dans un Mémoire de Catalan intitulé : *Remarques sur la théorie des nombres et sur les fractions continues* (*M. A. B.*, in-4°, 1893, 28 pages).

Au paragraphe final VII (sur une Note de M. Matrot), E. Catalan dit ceci :

« Dans son aperçu historique sur le théorème de Bachet (*A. F.*, Marseille, 1891, p. 185-191), M. Matrot énonce ce théorème empirique d'Euler :

» Un entier ne peut se décomposer en quatre carrés fractionnaires, que s'il est décomposable en quatre carrés entiers.

» Ce théorème me paraît faux. Je crois, en effet, avoir démontré celui-ci :

» Tout nombre entier est, d'une infinité de manières, décomposable en quatre carrés fractionnaires (*Mélanges mathématiques*, t. III, p. 165).

» Par exemple,

$$3 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2$$
$$= \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2,$$

.... »

Il serait nécessaire de consulter cet Ouvrage et de s'assurer si la démonstration satisfait aux conditions indiquées dans l'énoncé de la question 3149.

H. Brocard.

3218. (**1907**, 104) (*Zed*). — *Joint Clémens et excentriques* (**1907**, 255). — Consulter *Leçons de Cinématique*, de G. Kœnigs, avec Notes de G. Darboux et de E. et F. Cosserat (Paris, 1897). D'après le compte rendu qui en a été donné (*B. D.*, 1[re] Partie, 1897, p. 153-165) on peut voir que cet Ouvrage contient une étude du joint Clémens et du joint Goubet.

Devignot.

3236. (**1907**, 173) (E. Grigorieff). — *Impossibilité de l'équation*

$$x^4 + y^4 + z^4 = 3u^4$$

(**1908**, 281; **1909**, 55).

La démonstration de M. Werebrusow est erronée, car il n'est pas vrai que, α, β et γ étant divisibles par 4, u^2 soit nécessairement divisible par 4. Exemple : soit

$$\alpha = 32a + 4, \qquad \beta = 32b + 8, \qquad \gamma = 32c + 20,$$
$$u^2 = \frac{32(a^2 + b^2 + c^2) + 8a + 16b + 40c + 15}{a + b + c + 1},$$

et u^2 est évidemment impair.

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3306. (**1907**, 246) (U. Bini). — *Équations à racines entières* (**1908**, 47, 152, 239). — P. Richert. — *Bemerkungen über die kubische*

Gleichung (*Unterrichtsblätter für Math. und Naturw.*, Berlin, O. Salle, n° 2, t. XV, 1909, p. 36-38).

E. Haentzschel. — *Bemerkungen über die kubische Gleichung* (*ibidem*, n° 3, p. 53-54).

E. Haentzschel. — *Ueber eine von Hermite herrührende Substitution zur Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die Weierstrassche Normalform* (*Cr.*, t. CXXXV, 1908, p. 75-80).

Le Mémoire de E.-E. Kummer, mentionné par M. H. Brocard, a pour titre : *Ueber die kubischen und biquadratischen Gleichungen, für welche die zu ihrer Auflösung nötigen Quadrat und Kubikwurzel-Ausziehungen alle rational auszuführen sind* (*M.O.A.B.*, 1881, p. 930-936).

O. Degel (Bayreuth).
[D'après l'allemand. (La Réd.)]

3333. (**1908**, 28) (*Zed*). — *Notion d'aire* (**1909**, 77). — Je crois qu'il faudrait s'entendre sur le sens attaché au mot *aire*. Ce mot peut avoir un sens qualitatif et un sens quantitatif. C'est, me semble-t-il, l'aire au second sens qui n'est pas une notion première, c'est-à-dire que la mesure de l'aire a besoin d'être définie; je pense que les indications données dans ma question seraient suffisantes à cet égard.

Peut-être la véritable difficulté proviendrait-elle plutôt de ce fait que, *jusqu'ici*, la notion des *courbes graphiques*, auxquelles s'appliquent ma question, est assez mal définie.

Comparer Poincaré, *Compte rendu du Congrès international des Mathématiciens : Congrès de Paris*. Paris, Gauthier-Villars, 1902, p. 119.

Zed.

3351. (**1908**, 53) (Glkizes). — *Probabilité des erreurs* (**1908**, 252). — Une réponse est fournie par le fascicule 2, Volume IV du Tome I de l'*Encycl. franç. all. des Sc. math.*, p. 164 à 171.

Consulter l'Ouvrage de Helmert, cité ici (**1908**, 116).

On pourra aussi mentionner l'article de M. Petitcol : *Loi de probabilité des écarts* (*N. A.*, 1885, p. 441-448).

Voir aussi Ch. Henry : *Psycho-Biologie et Énergétique*, 1909,

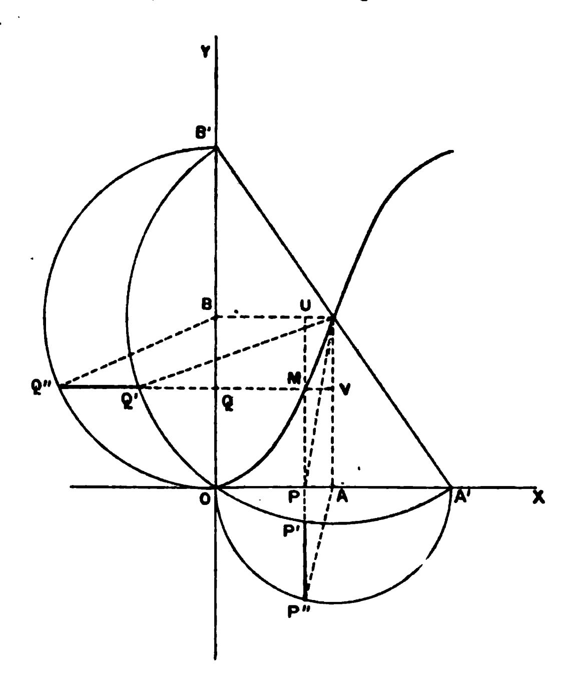
p. 53-54, où est donnée une démonstration synthétique et probablement nouvelle de la formule en e^{-x^2}.

L.-N. Machaut.

3417. (**1908**, 171) (*Agnès Morri*). — *Courbe algébrique* (**1909**, 81). — Je réponds à la bienveillante observation de M. *Recta*.

C'est en étudiant les lunules d'Hippocrate que j'ai été conduit à l'équation proposée; et voici de quelle manière :

Soient OX et OY, deux axes rectangulaires; sur OX, $OA = a$



et $OA' = 2a$; sur OY, $OB = b$ et $OB' = 2b$; OP″A′, OQ″B′ et A′ OB les demi-circonférences de diamètres OA′, OB′ et A′B′.

Par un point M situé dans l'angle XOY, on mène la droite MPP′P″ parallèle à OY (P sur le segment OA′, P′ sur l'arc OA′, P″ sur la demi-circonférence OA′) et la droite MQQ′Q″ parallèle à OX (Q sur le segment OB′, etc.).

En posant $OP = x$ et $OQ = y$, le lieu du point M tel que

$P'P'' = Q'Q''$ est une courbe, en forme de $\int$, caractérisée par l'équation

$$\sqrt{-x^2+2ax} - \sqrt{-x^2+2ax+b^2}$$
$$-\sqrt{-y^2+2by} + \sqrt{-y^2+2by+a^2} = a-b.$$

Calculs auxiliaires :

$$\left.\begin{array}{l}
PP'' = \sqrt{a^2-(a-x)^2} \\
PP' = UP' - UP \\
\quad\; = \sqrt{(a^2+b^2)-(a-x)^2} - b \\
P'P'' = PP'' - PP' \\
QQ'' = \sqrt{b^2-(b-y)^2} \\
QQ' = VQ' - VQ \\
\quad\; = \sqrt{(a^2+b^2)-(b-y)^2} - a \\
Q'Q'' = QQ'' - QQ'
\end{array}\right\} P'P'' = Q'Q''.$$

Agnès Morri.

3426. (**1908**, 193) (U. Bini, G. Lemaire). — *Équations indéterminées* (**1909**, 43, 112). — S étant la valeur commune *arbitraire* des sommes

$$x+y+z, \quad u+v+w,$$

x et u étant *arbitrairement* choisis, on a

$$y = \frac{S-x+\lambda}{2}, \qquad v = \frac{S-u+\mu}{2},$$
$$z = \frac{S-x-\lambda}{2}, \qquad w = \frac{S-u-\mu}{2},$$

λ et μ étant astreints à être des entiers, respectivement de même parité que $S-x$ et $S-u$, et à satisfaire à l'équation indéterminée du second ordre à deux variables

$$(S-x)\lambda^2 - (S-u)\mu^2 = (S-x)(S+x)^2 - (S-u)(S+u)^2.$$

Welsch.

3428. (**1908**, 194) (G. Quijano). — *Fonction continue sans dérivée.* — Les valeurs de la fonction peuvent être arrangées de façon que les numérateurs et dénominateurs forment des séries récurrentes :

1° De

$$f\left(\frac{2k-1}{2^r}\right)=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{k}{2^{r-1}}\right)=\frac{\alpha'}{\beta'},$$

on tire

$$f\left(\frac{2k-1}{2^r}\right)=\frac{\alpha}{\beta}, \quad f\left(\frac{4k-1}{2^{r+1}}\right)=\frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'},$$

$$f\left(\frac{8k-1}{2^{r+2}}\right)=\frac{\alpha+2\alpha'}{\beta+2\beta'}, \quad \ldots, \quad f\left(\frac{2^n k-1}{2^{r+n-1}}\right)=\frac{\alpha+(n-1)\alpha'}{\beta+(n-1)\beta'};$$

2° Des mêmes relations on tire aussi

$$f\left(\frac{2k-1}{2^r}\right)=\frac{\alpha}{\beta}, \quad f\left(\frac{4k-1}{2^{r+1}}\right)=\frac{\alpha+\alpha'}{\beta+\beta'},$$

$$f\left(\frac{8k-3}{2^{r+2}}\right)=\frac{2\alpha+\alpha'}{2\beta+\beta'}, \quad f\left(\frac{16k-5}{2^{r+3}}\right)=\frac{3\alpha+2\alpha'}{3\beta+2\beta'}, \quad \ldots,$$

$$f\left\{\frac{2^n k-\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n]}{2^{r+n-1}}\right\}=\frac{p_n}{q_n},$$

où p_n est le $n^{ième}$ terme de la suite récurrente

$$\alpha', \quad \alpha, \quad \alpha+\alpha', \quad 2\alpha+\alpha', \quad \ldots$$

avec la relation

$$p_n=p_{n-1}+p_{n-2};$$

et de même pour q_n.

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3436. (1908, 197) (R. Ravasco). — *Équations indéterminées* (1909, 62, 83). — La résolution en nombres entiers de l'équation

$$3v(v^2+2)=x^2$$

se ramène à celle des trois systèmes suivants :

$$\begin{aligned} v &= y^2, & y^4+2 &= 3z^2, & &y \text{ impair,}\\ v &= 2y^2, & 2y^4+1 &= 3z^2, & &\\ v &= 6y^2, & 18y^4+1 &= z^2, & &y \text{ pair,}\end{aligned}$$

satisfaits respectivement par

$$y = 1, \quad z = 1, \quad v = 1, \quad x = 3,$$
$$y = 1, \quad z = 1, \quad v = 2, \quad x = 6,$$
$$y = 2, \quad z = 17, \quad v = 24, \quad x = 204.$$

Le nombre des solutions paraît très limité.

WELSCH.

3440. (**1908**, 198) (F. GODEY). — *Intégrale* (**1909**, 24). — Dans E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik*, I. Theil, Leipzig, 1900, B.-G. Teubner, on trouve, p. 142, ligne 11, l'intégrale inexacte

$$\int \log(a + \cos x)\, dx = \frac{1 + a\cos x}{a + \cos x}.$$

Dans les compléments et rectifications au Tome I (II. Theil, p. 706), on trouve

$$\int \log(a + \cos x)\, dx = \int \frac{da}{\sqrt{a^2 - 1}} \arccos \frac{1 + a\cos x}{a + \cos x} \qquad (a > 1),$$

ce qui peut faciliter le calcul de l'intégrale définie entre 0 et x.

D'ailleurs, l'inexactitude de l'intégrale indiquée par M. G. Petit-Bois (p. 150) a aussi été signalée par M. E. Jahnke dans son analyse du Livre de M. G. Petit-Bois (*A. Gr.*, 3e série, t. XIV, 1908, p. 138).

O. DEGEL (Bayreuth).

[D'après l'allemand. (LA RÉD.)]

3469. (**1908**, 270) (U. BINI). — *Solution des équations indéterminées*

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^2 = \sum_{s=1}^{n} y_s^2, \qquad \sum_{s=1}^{n} x_s = \sum_{s=1}^{n} y_s \qquad (\mathbf{1909}, 89).$$

La question peut être résolue par la même méthode que celle de ma solution de 3169 (**1908**, 109).

Soit

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a,$$

et

$$x_1 = u_1 + \frac{a}{n}, \qquad x_2 = u_2 + \frac{a}{n}, \qquad \ldots, \qquad x_n = u_n + \frac{a}{n},$$

$$y_1 = v_1 + \frac{a}{n}, \qquad y_2 = v_2 + \frac{a}{n}, \qquad \ldots, \qquad y_n = v_n + \frac{a}{n}.$$

Les équations données deviennent

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0,$$

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 + 2\frac{a}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + n\frac{a^2}{n^2}$$

$$= v_1^2 + \ldots + v_n^2 + 2\frac{a}{n}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) + n\frac{a^2}{n^2},$$

qu'on peut écrire

$$\sum_{s=1}^{n} u_s = \sum_{s=1}^{n} v_s = 0, \qquad \sum_{s=1}^{n} u_s^2 = \sum_{s=1}^{n} v_s^2.$$

De la première, on tire

$$u_n = -(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}), \qquad v_n = -(v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}),$$

et en substituant dans la dernière équation on a, après division par 2,

$$\sum_{s=1}^{s=n-1} u_s^2 + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{t=n-1} u_s u_t = \sum_{s=1}^{n-1} v_s^2 + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} v_s v_t \qquad (s \neq t).$$

Cette équation a la solution évidente

$$v_s = -u_s$$

et aussi, en général, d'autres solutions. De chaque solution on déduit une infinité de solutions des équations initiales, puisque a est entièrement arbitraire.

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3482. (1908, 275) (Mathieu). — *Solution de l'équation*

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4.$$

Cette équation a déjà été proposée par M. Artemas Martin

[questions 74 (1894, 26) et 75 (1894, 26; 1898, 97)], mais les résultats sont jusqu'ici négatifs. *Voir* encore question 1420 (1898, 272) avec la réponse (1899, 186), et 3421 (1908, 172).

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

Autre réponse de M. Werebrusow (Russie), communiquée à M. Mathieu.

3483. (1908, 275) (A. Werebrusow). — *Solution de l'équation*

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0 \qquad (1909, 92).$$

Cette équation équivaut à l'équation

$$(1) \qquad ax^3 + by^3 + c = 0$$

en nombres rationnels.

Soit

$$x = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad y = \frac{\beta}{\gamma}$$

une solution. On a une seconde solution en cherchant la tangente à la courbe (1) au point $\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right)$. Cette tangente coupe la courbe en un second point rationnel. On mènera la tangente en ce second point, etc. Cette méthode est due, je crois, à ~~Euler~~. Fermat

Une autre méthode, due à Sylvester, consiste à chercher la conique osculatrice à la courbe (1) au point donné. Cette conique coupe la courbe en un second point rationnel.

J.-J. Sylvester a discuté la solution de cette équation dans les Mémoires suivants :

Philosophical Magazine, t. XXXI, 1847, p. 189-191, 293-296, 467-471; t. XVI, 1858, p. 116-119.

Annali di Scienze Mat. (*Tortolini*), t. VII, 1856, p. 398-400.

Ces Mémoires sont reproduits dans les *Mathematical Papers* de Sylvester, t. I et II.

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3486. (1908, 276) (Dubouis). — *Décomposition de* $(2a)^a \pm 1$ *en facteurs premiers.*

E. Lucas, *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (*A. J. M.*, t. I, 1878, p. 294), donne les facteurs de nombres

de cette forme pour $a = 7, 10, 11, 12, 14, 15$, et ajoute qu'il donnera ultérieurement des applications au dernier théorème de Fermat.

L.-E. Dickson, dans *On the factorization of large numbers* (*M. M. F.*, décembre 1908), et dans un Mémoire du *Q. J.*, t. XL, 1908, p. 40-45, donne la décomposition de ces nombres pour $a = 13, 17, \ldots$.

E.-B. Escott (Ann Arbor).
[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3491 (**1909**, 2) (Nazarevsky). — *Solution de l'équation* $\log x = \frac{x}{10^m}$ (**1909**, 159). — *Extrait d'une réponse de M. E.-B. Escott* (Ann Arbor, Mich.). Cette question a été traitée par Euler (*Inst. Cal. Diff.*, t. II, sec. 242, exemple).

P.-G. Tait. — *An Exercise on Logarithmic Tables* (*Scient. Papers*, t. II, p. 217 (*Proc. Edinb. math. Soc.*, t. V, 1887, p. 101, 102).

Oliver Byrne. — *Dual Arithmetic*, p. 194 (London, 1863).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

3499 (**1909**, 4) (G. Loria). — *Courbes* $\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^n\,dy^n} = 1$. — Les Mémoires de M. Hermite parus sur ces courbes se trouvent dans le Tome LX des *C. R.* (1865) sous le titre : *Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables.*

Pellet.

3549. (**1909**, 98) (T. Lemoyne). — P.-G. Tait (*Traité des Quaternions*, traduct. Plarr, t. II, 1884, p. 69) a proposé le nom de *didonia* pour la courbe de longueur donnée qui, sur une surface, renferme une aire maximum.

L'équation de la didonia, exprimée en quaternions, est

$$\int SU\nu\, d\rho\, \delta\rho + C\delta \int T\, d\rho = 0,$$

C étant une constante arbitraire. *Voir* aussi *J. M.*, VIII, 1843, C. Delaunay.

E. Liminon.



QUESTIONS.

3610. [V 8] Pour élucider divers points de l'histoire des Sciences au XVIIIe siècle, quelqu'un pourrait-il me fournir de courtes Notices sur les sujets suivants :

I. Que furent les chaises marines d'Irwin et de Fyot? En connaît-on les dessins? Que furent ces deux personnages, en dehors des lignes que Lalande consacre à Fyot?

II. Possède-t-on quelques indications biographiques succinctes sur Arsandeaux et Biesta, deux horlogers dont les montres furent éprouvées dans la campagne de la *Flore?*

III. Quels sont les horizons artificiels proposés en Angleterre, même avant 1770? En possède-t-on des dessins?

IV. Philippe III proposa un prix pour les longitudes : Quelques mots sur Philippe III? Quelques mots sur l'origine de ce prix? Son montant? La date? Les sources?

V. Mêmes questions pour le duc d'Orléans, qui aurait proposé un prix analogue.

VI. Qu'est-ce que Véron, inventeur de la détermination des longitudes par les distances lunaires? Qu'est-ce que ce titre *du Collège de France* que lui attribue Lalande?

J. MASCART.

3611. [L'15] Trouver le lieu des foyers des hyperboles équilatères passant par les sommets du grand axe d'une ellipse et qui sont tangentes à l'ellipse en un point variable.

Le lieu du centre de ces hyperboles est la podaire d'une ellipse. Je désire en avoir une démonstration géométrique.

Cliteau.

3612. [L'15] Soit MN une corde normale variable d'une ellipse donnée de centre O. On projette N sur OM en P. La perpendiculaire élevée en N à NM rencontre OM en Q.

Trouver les lieux des points P et Q, l'enveloppe des droites NP et NQ, enfin les aires de ces courbes. *Cliteau.*

3613. [M'] Quelle est l'équation cartésienne de la courbe dont les équations paramétriques sont

$$x = \frac{\cos\varphi}{a}(2a^2 - c^2\cos^2\varphi), \qquad y = \frac{\sin\varphi}{b}(2b^2 + c^2\sin^2\varphi),$$

c^2 étant égal à $a^2 - b^2$? *Cliteau.*

3614. [O2c] Déterminer le périmètre de la courbe

$$x = \frac{\cos\varphi}{a}(b^2 + c^2\cos^2\varphi), \qquad y = \frac{\sin\varphi}{b}(a^2 - c^2\sin^2\varphi)$$
$$(c^2 = a^2 - b^2),$$

ou

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = (a^4x^2 + b^4y^2)^2,$$

dont l'aire est la somme des aires de l'ellipse d'axes $2a$ et $2b$ et de sa développée. *Cliteau.*

3615. [V] Dans l'Ouvrage de Huygens : *De circuli magnitudine inventa,* on trouve le passage suivant :

« Ex his manifestus est Orontii Finei error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportione mediarum inter inscripti et circumscripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret a majori. »

J'ai cherché en vain cette assertion d'Orontius Fineus parmi les nombreuses fausses quadratures du cercle contenues dans son Ouvrage posthume de 1556 : *De rebus mathematicis hactenus desideratis, Libri IV*, le seul que j'ai pu consulter jusqu'ici.

Quelqu'un peut-il me renseigner sur le lieu où l'on trouve l'assertion? D.-J. Korteweg (Amsterdam).

3616. [I 9] Soit $f(x)$ la fonction (Bougaieff, Cesáro) qui est égale à Lp quand x est puissance d'un nombre premier p et à 0 pour toute autre valeur de x, ou, plus généralement, une fonction différente de 0 quand x est puissance d'un nombre premier et nulle dans les autres cas. Existe-t-il une expression de $f(x \pm y)$ dans laquelle interviennent $f(x)$ et $f(y)$?

E. Dubouis.

3617. [I 2 b] On pose, pour abréger,

$$(n)_1 = 1111\ldots1111 \qquad (n \text{ chiffres } 1).$$

Quels sont les caractères de divisibilité des nombres $(n)_1$ par $(n+1)$, par $(2n+1)$, par $(3n+1)$, etc.?

G. Lemaire.

3618. [I 2 b] Problème suggéré par la question précédente :

Trouver, dans la suite 1, 11, 111, ..., quatre termes consécutifs, $(a)_1$, $(b)_1$, $(c)_1$ et $(d)_1$, tels que

$$(a)_1 = \text{m. de } (a+1),$$
$$(b)_1 = \text{m. de } (2b+1),$$
$$(c)_1 = \text{m. de } (3c+1),$$
$$(d)_1 = \text{m. de } (4d+1).$$

J'ai une réponse ($a = 40$, $b = 41$, ...); mais je désirerais la solution.

G. Lemaire.

3619. [I 2 b α] Existe-t-il, pour la décomposition des nombres $(n)_1$, d'autres Tables que celles de Bickmore (*N. A.*), Loof (*A. Gr.*), Lucas (*J. E.*) et Shanks (*P. R. S. L.*)?

G. Lemaire.

3620. [I 19 a] Je résous le système

$$x + y + z = p + q + r,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

au moyen des formules

$$x = 2su - uv + st, \qquad p = st - uv,$$
$$y = st + tv, \qquad q = 2su - 2uv + st + tv,$$
$$z = su - 2uv + tv, \qquad r = su + tv.$$

1° Ces formules sont-elles connues?
2° Y a-t-il des solutions qu'elles ne donnent pas?

H.-B. MATHIEU.

3621. **[I 19 a]** Je résous en nombres entiers l'égalité

$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

au moyen des formules

$$x = 2m + st + uv, \qquad p = st - uv,$$
$$y = m + st + uv - su + tv, \qquad q = 3m + st + uv - su + tv,$$
$$z = 2m - su + tv, \qquad r = su + tv.$$

1° Ces formules sont-elles connues?
2° Y a-t-il des solutions qu'elles ne donnent pas?

H.-B. MATHIEU.

3622. **[K 14]** Dans le *Traité de Géométrie Élémentaire* de Rouché et Comberousse, on lit que l'inclinaison de deux faces adjacentes de l'icosaèdre régulier est *exactement* 138° 11′ 22″, 75. Je demande une démonstration de ce théorème.

W. KAPTEYN
(Utrecht).

1281. **[M⁴m]** (**1898**, 99) Existe-t-il dans certaines courbes transcendantes des points qui jouent le rôle des foyers dans les courbes algébriques? H. BROCARD.

RÉPONSES.

3039. (**1906**, 88) (*Balbus*). — *Carrés numériques* (**1907**, 135, 276; **1908**, 233). — M. Escott m'écrit que l'*Educational Times* a publié, en mars 1905, une liste des carrés formés des 10 chiffres; sur les 87 nombres indiqués, il y a une erreur, mais on doit ajouter à la liste de M. J. Rius y Casas (*S. Œ.*, juin 1908, p. 35), les deux solutions suivantes :

$$55626^2 = 3094251876 \quad \text{et} \quad 58554^2 = 3428570916.$$

A. Gérardin.

3146. (**1907**, 7) (G. Lemaire). — *Instruments de topographie.* — Pour cette question, comme pour beaucoup d'autres qu'il a proposées dans le même ordre d'idées, l'auteur fera bien de consulter la collection, aujourd'hui complète en 9 fascicules (Paris, Imprimerie nationale, 1891-1905), des *Procès-verbaux de la Commission extra-parlementaire du Cadastre.* La Table analytique du fascicule IX permettra de se reporter rapidement aux articles relatifs à la technique du cadastre et des levés topographiques, en particulier aux noms, bien connus à cet égard, de MM. Bassot, de la Noë, Sanguet, Lallemand, Laussedat, Cheysson, Defforges; mais il faudra aussi pouvoir consulter les instructions spéciales du Service géographique de l'Armée, du Service du Cadastre et du Nivellement général de la France, les Notices descriptives des constructeurs d'instruments recommandés ou exclusivement adoptés et enfin divers Ouvrages qui contiennent de précieuses indications.

Je me contenterai de signaler :

Zeitschrift für Vermessungswesen, 1902, p. 214.

C. Lallemand, *Nouveau cercle azimutal réitérateur à microscopes et à lectures directes* (*A. F.*, Lyon, 1906, p. 48-52).

C. Lallemand, *Nouveau cèrcle azimutal à microscopes du Service technique du Cadastre* (*La Nature*, 5 octobre 1907, p. 289).

H. Brocard.



3498. (**1909**, 4) (S. Prieto). — *Courbes parallèles.* — Il est difficile, voire impossible, de se figurer des courbes convexes identiques à leurs parallèles, puisque ce sont les développantes d'une même développée. Mais il n'en est plus de même pour une courbe à sinuosités, comme le serait la sinusoïde, bien que manifestement la courbe parallèle, de chaque côté, à distance a, soit composée d'arcs successifs prenant chaque fois deux valeurs périodiques. Si donc il y a une courbe identique à ses parallèles, cette courbe devra être sinueuse et composée de deux arcs périodiques, inégaux, dont les points d'inflexion soient en ligne droite. Cette courbe existe, c'est la courbe de Delaunay, ou la chaînette elliptique, lieu des foyers d'une ellipse roulant sur une droite fixe.

La propriété de la courbe de Delaunay, d'être parallèle à une courbe égale, a été indiquée et démontrée par E. Cesáro dans ses *Lezioni di Geometria intrinseca,* 1896, p. 70-71.

Devignot.

3507. (**1909**, 6) (T. Lemoyne). — *Antipodaire de parabole* (**1909**, 94). — La podaire d'une courbe (c) par rapport à un point fixe O étant tangente en chacun de ses points au cercle ayant pour diamètre la droite qui joint le point correspondant de (c) au point O, la podaire négative d'une courbe (Γ) par rapport à un point O est une courbe homothétique (rapport 2) au lieu des centres des cercles tangents à (Γ) et passant par O, qui est le centre d'homothétie.

Ce lieu a fait l'objet des questions 2827 (**1904**, 239) et 3296 (**1907**, 243), limitées au cas où (Γ) est une conique, et qui ont reçu plusieurs réponses.

Si (Γ) est une parabole, O son foyer, le lieu se réduit à la droite de l'infini, aux droites isotropes menées par O, et à une cubique ayant ces trois droites pour tangentes d'inflexion, les points de contact étant sur la directrice.

Il a un point double sur l'axe à une distance du foyer double du paramètre.

M. Barisien a trouvé (**1907**, 198) qu'il était aussi le lieu des points tels que l'une des normales abaissées de l'un de ces points sur la parabole soit bissectrice de l'angle des deux autres.

De là se déduisent les propriétés de l'antipodaire considérée, qui, entre autres particularités, présente celle de toucher la parabole en son sommet. Welsch.

Parmi les propriétés de la cubique de Tschirnhausen ou de l'Hôpital, la suivante mérite de retenir l'attention :

L'enveloppe des cordes de la cubique vues sous un angle droit, du foyer de la parabole (dont elle est l'antipodaire), est une conique ayant ce point pour foyer (A. Cazamian, *N. A.*, 1894, p. 307).

Dr Charbonier.

3515. (**1909**, 26) (H. Lebesgue). — *Séries de Fourier.* — Au sujet de la convergence ou de la divergence des séries de Fourier, je signalerai, sans pouvoir mieux préciser, les Ouvrages ou Mémoires suivants :

G.-H. Hardy, *Note sur une série de Fourier divergente* (*M. M.*, t. XXXIII, 1903-1904, p. 137-144).

L. Fejer, *Untersuchungen über Fourier'schen Reihen* (*M. A.*, t. LVIII).

L. Fejer, *Sur la série de Fourier* (*Comptes rendus*, t. CXLII, 1er semestre 1906, p. 501-503).

L. Fejer, *Ueber die Fourier'schen Reihen*, 1907.

J. Thomae, *Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourier'schen Reihen*, 1908 (voir *B. D.*, 1re Partie, 1909, p. 29, où est cité un exemple dû à H.-A. Schwarz).

E. Liminon.

3523. (**1909**, 49) (E.-N. Barisien). — *Ellipse glissant sur deux droites fixes.* — Soient, en coordonnées rectangulaires,

$$y = \theta x, \qquad y = \frac{1}{\theta} x$$

les équations des deux droites fixes qui font entre elles l'angle Θ,

$$\tang \Theta = \frac{\theta^2 - 1}{2\theta}.$$

L'équation du grand axe de l'ellipse sera

$$\begin{aligned} y\cos\varphi - x\sin\varphi &+ \frac{1}{1-\theta^2} \\ &\times \Big[(\theta\sin\varphi - \cos\varphi)\sqrt{\theta^2(a^2 - c^2\sin^2\varphi) + a^2 - c^2\cos^2\varphi} \\ &\quad + (\sin\varphi - \theta\cos\varphi)\sqrt{a^2 - c^2\sin^2\varphi + \theta^2(a^2 - c^2\cos^2\varphi)}\Big] = 0, \end{aligned}$$

que j'écris pour simplifier

$$(1) \qquad y\cos\varphi - x\sin\varphi + p = 0.$$

L'équation de l'enveloppe s'obtiendrait en éliminant φ entre (1) et

$$(2) \qquad y\sin\varphi + x\cos\varphi + q = 0, \qquad q = -\frac{dp}{d\varphi}.$$

L'aire cherchée est donnée par l'intégrale

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (q^2 - p^2)\,d\varphi,$$

c'est-à-dire la différence des surfaces des podaires de l'enveloppe et de la développée de cette enveloppe; l'intégration se simplifie beaucoup en remarquant que, dans le calcul de $(q^2 - p^2)$ il n'y a pas lieu de s'occuper des termes contenant le produit $\sin\varphi\cos\varphi$ à une puissance impaire, attendu que, $\sin\varphi\cos d\varphi$ étant égal, à un facteur près, à $(d\cos^2\varphi)$ ou $(d\sin^2\varphi)$, les intégrales qui en résulteraient ayant leurs limites égales seraient identiquement nulles; on arrive rapidement au résultat suivant :

$$(3) \qquad A = -\frac{\pi c^2}{8} + \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{\theta^2+1}{\theta^2-1}\right)^2 \times \left[\pi\frac{a^2+b^2}{2} - \pi ab\frac{\sqrt{\left(\theta^2+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\theta^2+\frac{a^2}{b^2}\right)}}{\theta^2+1}\right] - \frac{\theta}{(\theta^2-1)^2}\left[\frac{4(a^2\theta^2+b^2)(a^2+b^2\theta^2)}{(\theta^2+1)(a^2+b^2)}K - (\theta^2+1)(a^2+b^2)E\right],$$

où K et E sont les quarts de période des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce pour le module

$$k = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,\frac{\theta^2-1}{\theta^2+1}.$$

Si l'on y fait $\theta = 0$ ou $\theta = \infty$, l'on obtient

$$(4) \qquad -\frac{\pi c^2}{8} + \frac{a^2}{c^2}\left[\pi\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) - \pi ab\right] = A$$

pour l'aire de l'enveloppe du grand axe et

(5) $$\frac{\pi c^2}{8} - \frac{b^2}{c^2}\left[\pi\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) - \pi ab\right] = \mathrm{B}$$

pour l'aire de l'enveloppe du petit axe.

$\left[\pi\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) - \pi ab\right]$ représente la différence des aires de la podaire de l'ellipse et de l'ellipse, c'est-à-dire l'aire Δ de la podaire de la développée de l'ellipse, et l'on a

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \Delta.$$

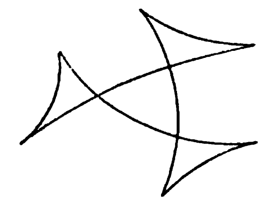
Enfin (4) et (5) peuvent se mettre sous les formes

(4') $$\pi\frac{(a-b)^2(3a+b)}{8(a+b)} = \mathrm{A},$$

(5') $$\pi\frac{(a-b)^2(a+3b)}{8(a+b)} = \mathrm{B},$$

qui, pour $b = 0$, se réduisent bien aux aires correspondantes de l'astroïde.

Les courbes enveloppes des droites parallèles aux axes, telles que directrices, tangentes aux sommets, etc., sont des courbes parallèles aux précédentes; comme celles-ci sont tricuspidales, leurs parallèles auront la forme ci-dessous :



Il faudrait convenir de ce que l'on veut appeler leur aire; par exemple, pour l'enveloppe des tangentes aux extrémités du petit axe, on aurait à intégrer

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} [q^2 - (p+b)^2]\, d\varphi$$

ou

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(q^2-p^2)\,d\varphi - b\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}p\,d\varphi - \frac{b^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\varphi$$

ou

$$\mathrm{A} - b\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}p\,d\varphi - \frac{b^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\varphi.$$

C. Espanet.

L'aire de la courbe enveloppe d'une droite liée invariablement au plan de l'ellipse mobile est égale à

$$\frac{\pi(a-b)^2(3a+b)}{4(a+b)}\cos^2\varphi + \frac{\pi(a-b)^2(3b+a)}{4(a+b)}\sin^2\varphi - \pi d^2,$$

φ désignant l'angle que fait la droite avec le grand axe de l'ellipse et d la distance de cette droite au centre de l'ellipse.

Pour le grand axe de l'ellipse, on trouve bien le résultat indiqué par M. Barisien; mais il faut remarquer que le point de contact de la droite avec son enveloppe parcourt deux fois la courbe lorsque le plan tourne d'un angle égal à 2π. L'aire limitée par cette courbe est donc

$$\frac{\pi(a-b)^2(3a+b)}{8(a+b)}.$$

R. Bérard.

3325. (1909, 49) (E.-B. Escott). — *Congruence.* — Lorsque la congruence

$$x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

n'a pas de racine, elle est irréductible, et, i désignant une de ses racines imaginaires, les deux autres sont

$$i^p, i^{p^2} \qquad \text{(Serret, } \textit{Alg. sup.}, \text{ t. II)}.$$

Le produit de ces racines est congru à 1; donc

$$i^{p^2+p+1} \equiv 1;$$

la somme de leurs inverses est congrue à 0, donc

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^p} + \frac{1}{i^{p^2}} \equiv 0,$$

ou

$$i^{p^2+p} + i^{p^2+1} + i^{p+1} \equiv 0;$$

mais

$$i^{p^2+1} \equiv i^{p^2(p+1)}$$

à cause de

$$i^{p^2-1} \equiv 1,$$

donc

$$U_{p+1} \equiv 0 \pmod{p},$$

U_n représentant $i^n + i^{np} + i^{np^2}$.

Le nombre de termes de la période des résidus de U_n est égal à l'exposant de i (mod p), autrement dit l'exposant auquel appartient la fonction $x^3 + x^2 - 1$ (mod p), lequel divise $p^2 + p + 1$.

Lorsque

$$x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

a une racine réelle, la période des résidus de U_n est le plus petit nombre q tel que

$$(1) \qquad \alpha^q \equiv 1, \quad \beta^q \equiv 1, \quad \gamma^q \equiv 1 \pmod{p},$$

α, β, γ étant les trois racines de cette congruence. Or, ces trois congruences (1) sont satisfaites pour $q = p^2 - 1$. Lorsque les trois racines de

$$x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sont réelles, les congruences (1) sont satisfaites pour $q = p - 1$.

PELLET.

Autre réponse de M. MALO.

3528 (**1909**, 51) (E.-B. ESCOTT). — La formule de Moivre

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

résulte de

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Celle-ci provient par dégénérescence de

$$p(iu, g_2, g_3) = -p(u, g_2, -g_3),$$

comme on peut le voir dans : HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, p. 9-27 et 43.

Jihes (Bruxelles).

Voir H. LEMONNIER. — *Sur les fonctions elliptiques qui correspondent à la fonction* $\cos x + i \sin x$, Paris, 1876, in-4.

O. DEGEL (Bayreuth).

3533. (**1909**, 73) (E.-N. Barisien, E. Maillet). — *Sur certaines constantes arithmétiques* (**1909**, 140). — Soit un nombre N de deux chiffres, de base ω : il s'écrira donc $A\omega + B$, A et B étant moindres que ω, et aussi B moindre que A, par une supposition évidemment permise. Le nombre N_1 sera, par suite, $B\omega + A$; le nombre N_2 sera

$$(A - B - 1)\omega + (\omega + B - A),$$

le nombre N_3

$$(\omega + B - A)\omega + (A - B - 1),$$

et, enfin, le nombre N_4

$$(\omega - 1)\omega + (\omega - 1):$$

c'est 99 en numération décimale. Mais, dans le cas où l'on aurait $A = B$, les nombres N_3 et N_4 seraient 00 dans tous les systèmes de numération.

Si l'on a un nombre de trois chiffres $N = A\omega^2 + B\omega + C$, il viendra

$$N_1 = C\omega^2 + B\omega + A,$$

puis, en supposant $A > C$,

$$N_2 = (A - C - 1)\omega^2 + (\omega - 1)\omega + (\omega + C - A),$$
$$N_3 = (\omega + C - A)\omega^2 + (\omega - 1)\omega + (A - C - 1),$$

et enfin

$$N_4 = \omega^3 + (\omega - 2)\omega + (\omega - 1),$$

ou encore en chiffres seulement (ceux-ci étant séparés par des virgules)

$$N_4 = 1,\quad 0,\quad \omega - 2,\quad \omega - 1:$$

c'est 1089 en numération décimale. Il est clair, d'autre part, que pour $A = C$ on trouve, en tout état de cause,

$$N_2 = N_3 = N_4 = 000.$$

Imaginons encore un nombre de quatre chiffres,

$$N = A\omega^3 + B\omega^2 + C\omega + D,$$

avec l'hypothèse principale $A > D$; nous aurons comme sous-hypothèses les suivantes :

$$B > C, \qquad B = C, \qquad B < C.$$

Si l'on a $B > C$, il viendra

$$N_2 = A - D, \quad B - C - 1, \quad \omega + C - B - 1, \quad \omega + D - A,$$
$$N_3 = \omega + D - A, \quad \omega + C - B - 1, \quad B - C - 1, \quad A - D,$$

et, par suite,

$$N_4 = 1, \quad 0, \quad \omega - 2, \quad \omega - 1, \quad 0,$$

c'est-à-dire 10890 en numération décimale.

Si j'ai

$$B = C,$$

je trouverai

$$N_4 = 1, \quad 0, \quad \omega - 1, \quad \omega - 2, \quad \omega - 1,$$

et si j'ai

$$B < C,$$
$$N_4 = \omega - 1, \quad \omega - 1, \quad \omega - 1, \quad \omega - 1.$$

Sans examiner particulièrement le cas de $A = D$, il est clair que les mêmes raisonnements s'appliquent indéfiniment : on peut même beaucoup abréger. Car pour les nombres de cinq chiffres par exemple, si j'écris, en numération décimale,

$$N = 98\,765,$$

j'aurai

$$N_1 = 56\,789,$$

puis

$$N_2 = 41\,976, \qquad N_3 = 67\,914, \qquad N_4 = 109\,890,$$

et j'en conclurai pour un système de numération quelconque qu'une certaine des constantes visées est

$$N_4 = 1, \quad 0, \quad \omega - 1, \quad \omega - 2, \quad \omega - 1, \quad 0.$$

E. Malo.

Je ferai tout d'abord les deux remarques suivantes :

1° Le nombre N_4 ne change pas quand on remplace dans N deux chiffres symétriquement placés par rapport au milieu de ce dernier nombre par des chiffres dont la différence soit de même sens (par des chiffres égaux si les chiffres primitifs le sont);

2° La contribution apportée à la formation du nombre N_4 par deux chiffres symétriques de N ne dépend que du sens des diffé-



rences dans chacun des deux couples de chiffres symétriques qui les encadrent.

Par exemple, si

$$N = 345\,642:$$

1° N_4 restera constant quand on remplacera 3 et 2 par deux chiffres astreints à ce que le premier soit supérieur au second, les 4 par deux chiffres égaux quelconques;

2° Les éléments fournis à N_4 par le couple (4,4) ne dépendent pas des chiffres qui le constituent, mais seulement du sens des différences existant entre les chiffres de chacun des couples (3, 2), (5, 6).

Ces considérations m'ont amené à *figurer* N par une succession de signes +, de signes — et de zéros qui, pour le nombre choisi comme exemple, sera

$$+ \; 0 \; - \; + \; 0 \; -,$$

le signe + remplaçant, dans chaque couple de chiffres symétriques, le plus grand de ces chiffres, le signe — tenant la place du plus petit, les zéros correspondant aux chiffres égaux à leur symétrique.

Les *constantes* N_4, relatives à des nombres N dont les chiffres extrêmes sont égaux, reproduisent, suivies d'un ou de plusieurs zéros, celles qui correspondent à des nombres ayant moins de chiffres; je les laisserai de côté pour le moment et supposerai que la figuration débute par le signe +, et, par conséquent, se rapporte au plus grand N, des nombres N et N_1, le premier chiffre de ce nombre N étant supérieur au dernier.

L'examen des divers cas qui peuvent se présenter montre que, dans la formation d'une constante N_4, deux chiffres symétriques donnent *en moyenne* neuf unités de chacun de leurs ordres, exactement ce nombre si les *figures* qui les représentent sont comprises, abstraction faite des zéros de la figuration, entre des signes de même nature, 10 (ou 8) s'ils sont inégaux, et que leur figure soit comprise entre les signes — et + (entre + et —) en allant de gauche à droite, 0 (ou 18) s'ils sont égaux et que les zéros qui en tiennent la place soient compris entre — et + (entre + et —), la figuration étant supposée précédée du signe — et suivie du signe +.

De là, se déduit aisément la règle suivante, permettant de trouver la *constante* qui correspond à une figuration donnée d'un nombre de *n* chiffres :

Allant de gauche à droite, et considérant les zéros comme affectés du signe qui les précède immédiatement dans la figuration, mettre + sous la première figure d'une suite ou *permanence* de signes + et sous la dernière figure d'une permanence de signes —, mettre — sous la première figure d'une permanence de signes — et sous la dernière figure d'une permanence de signes +.

La constante cherchée sera égale à $10^n - 1$, augmenté d'une unité de chacun des ordres correspondant aux signes + qui viennent d'être placés sous la figuration, et diminué d'une unité de chacun des ordres correspondant aux signes —.

Exemples :

+	o	—	+	o	—
+	—		+	—	

Const. : 10 900 89;

+	+	—	o	+	o	o	+	—	o	o	—	o	+	—	—
+	—	—	+	+			—	—				+		—	+

Const. : 10 891 099 890 000 990.

Nota. — On remarquera que les alternances de signes ne donnent lieu à aucune inscription, non plus que les figures qui se trouvent à l'intérieur des permanences; mais, tandis que les signes placés sous les figures qui limitent les permanences sont toujours de nature opposée, ceux qui correspondent aux figures encadrant les alternances sont de même nature quand celles-ci sont en nombre pair ou nul [cas de deux permanences (forcément de signe contraire) se succédant sans intermédiaire d'alternances]; de là un moyen d'obtenir directement tous les N_4.

Autre observation. — Les *figurations* de N_4 sont symétriques par rapport au milieu s'il n'y a pas de zéros intercalés dans une variation de signe; par contre, l'existence de zéros ainsi placés produit dans les constantes N_4 une dissymétrie qui les décèle, de sorte qu'il est facile de remonter des N_4 aux figurations de N correspondantes, qui pour un même N_4 ne diffèrent que par le nombre des zéros pouvant se trouver à l'intérieur des permanences.

Il est clair que, si A est la base de numération employée, cette base doit être substituée à 10 dans l'expression $10^n - 1$.

Nombre des constantes N_4. — Étant donné un nombre de *n*

chiffres, on peut le réduire à un nombre de $n-2$ chiffres en supprimant les chiffres extrêmes.

Si ceux-ci sont égaux, la constante relative au nombre donné est la même que celle qui correspond au nombre réduit, multipliée par la base de numération ; s'ils sont différents, la constante se déduira encore de celle du nombre réduit, qui donnera lieu à *deux* constantes, différentes suivant le sens de l'excédent de l'un sur l'autre des chiffres extrêmes du nombre primitif, à *une seule* constante dans le cas où les deuxième et avant-dernier chiffres de celui-ci sont égaux entre eux, ce qui fait descendre le nombre réduit à $n-4$ chiffres.

Si donc $\varphi(n)$ représente le nombre des N_4 pour une certaine valeur de n, on a

$$\varphi(n) = 3\varphi(n-2) - \varphi(n-4),$$

d'où il résulte que

$$\varphi(n) \qquad (n = 2p \quad \text{ou} \quad 2p+1)$$

est le terme de rang $2p+1$ de la série récurrente de Fibonacci :

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad \ldots.$$

Remarque au sujet de la réponse publiée (**1909**, 140). — Il semble que le cas où des groupes se réduisent à une seule figure ($k=1$ ou $j=1$) n'ait pas été examiné.

Il en résulte que la forme trouvée pour la constante N_4 n'est pas *générale :* chacune des figures β qu'elle renferme est isolée, et il y a périodicité (alternance) entre les groupes de figures α et γ, tandis qu'on devrait y voir des séries de β, et que celles de ces séries qui seraient formées d'un nombre pair d'éléments devraient être précédées et suivies de la même figure α ou γ.

WELSCH.

Au IV[e] Congrès panaméricain qui s'est réuni à Santiago de Chili en décembre 1908, j'ai présenté un Mémoire très étendu sur certaines constantes arithmétiques, que j'ai appelées *invariantes aritmeticas de la resta y suma*.

Ce Mémoire sera publié sous peu dans la *Revista de Ciencias de*

Lima (Pérou), et aussi parmi les documents du Congrès susmentionné.

Ce Mémoire répond en particulier à la question 3533.

Dans les constantes arithmétiques relatives à cette question n'entrent que les deux premiers et les deux derniers chiffres du système de numération considéré.

Pour le système décimal n'entrent que les chiffres 0, 1, 8, 9; pour le système quinaire entrent 0, 1, 3, 4. Ainsi la constante arithmétique qui, pour un nombre de trois chiffres dans le système décimal, est 1089 devient, dans le système de base 5, 1034.

La constante 991 089 pour un nombre de six chiffres dans le système décimal se convertit en 441 034 dans le système quinaire; exemple :

Nombre............................	321 142 (base 5)
Nombre renversé..................	244 123
Reste	022 314
Reste renversé....................	413 220
Somme.............................	441 034

Extrait d'une réponse de M. Federico Villareal (Lima, Pérou).
[D'après l'espagnol. (La Réd.)]

Pour nous rendre plus facile une traduction précise de sa réponse, nous demandons à M. F. Villareal de nous adresser un exemplaire de son Mémoire, si cela lui est possible. Le nombre de constantes arithmétiques qu'il trouve,

$$C_n = \frac{1}{2}\left[3^{E\left(\frac{n}{2}\right)} + 1\right],$$

ne paraît pas concorder avec les réponses précédentes.

La Rédaction.

Autre réponse de M. Jamshedjî Edaljî (Tokyo).

M. Welsch me signale que les nombres des constantes sont, sauf 1, les termes de rang pair de la série de Lamé-Fibonacci :

1 **2** 3 **5** 8 **13** 21 **34** 55 **89** 144 **233**

On peut donc dire que, *pour les nombres de* $2n$ *et de* $(2n+1)$ *chiffres, le nombre total des constantes est le terme de rang* $2n$ *de la série de Fibonacci.*

Dans son remarquable article, M. Auric a omis de parler de la *formation des constantes* et de *leur décomposition en facteurs prémiers*, comprenant toujours des puissances de 9 et de 11. C'est une lacune que je le prie de combler. E.-N. Barisien.

3536. (**1909**, 74) (T. Lemoyne). — *Courbes à courbure constante.* — La réponse complète à cette question est donnée au Tome II du *Traité des courbes spéciales remarquables* de M. G. Teixeira (Coïmbre, 1909), au Chapitre XVI, § 1, p. 441-444 : *Les courbes à courbure constante*, pour lesquelles E. Cesáro avait proposé la dénomination de Cercles gauches (*Geom. intrinseca*, 1896, p. 144).

Aux auteurs cités : G. Monge (1784), J. Serret (1850), P. Serret (1860), C. Bouquet, G. Darboux, H. Laurent, on pourra ajouter :

E. Catalan, *Recherches sur les surfaces gauches* (*B.A.B.*, t. XVIII, 1866, §§ 55 à 61);

E. Catalan, *Théorie analytique des lignes à double courbure* (*Soc. de Liége*), 2e série, t. VI, 1877, § 74);

H. Piccioli, *Sur les courbes en* S_n (c'est-à-dire dans un espace à n dimensions) et particulièrement sur celles à courbures constantes (*N. A.*, 1901, p. 369-374);

S. Chassiotis, *Note sur les courbes gauches* (*N. A.*, 1905, p. 394-399).

L.-N. Machaut.

3539. (**1909**, 75) (*Crut*). — *Aire et périmètre d'une courbe.* — Soient a le périmètre et σ l'aire de la courbe de base, fermée et convexe, et supposée de tracé très voisin d'une circonférence, ou d'un rectangle, ou d'un segment de droite (ovale aplati). On reconnaîtra immédiatement que la courbe parallèle à distance δ a pour périmètre $a+2\pi\delta$, et pour aire $\sigma+a\delta+\pi\delta^2$.

Voir A.-L. Crelle. — *Mémoire sur le parallélisme des courbes et surfaces courbes* (*A. G.*, t. XII, 1821).

M. Reiss, *De lineis et superficiebus æquidistantibus*. Dissert. inaug. (*Cr.*, t. II, 1822, p. 203).

G. Loria, *Spezielle Kurven*, 1902, p. 644.

Recta.



Réponses analogues de MM. A. ALAYRAC, G.-A. L'HOMMEDÉ (Californie) et PAULMIER. Autre réponse semblable de M. MARRECAS FERREIRA, communiquée à M. *Crut*, et qui renvoie à Breton du Champ (*N. A.*, 1844, t. III) et F. Gomes Teixeira (*Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique,* 1898, t. LVIII).

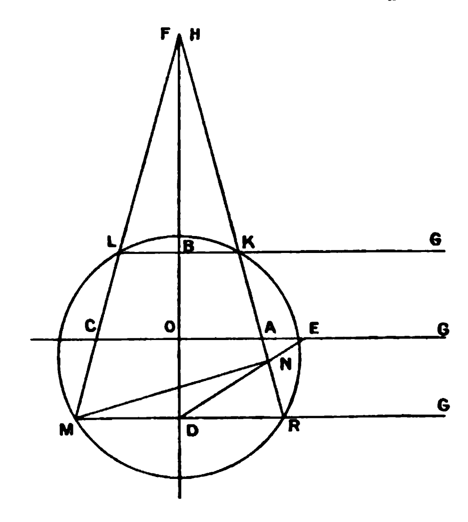
3544. (**1909**, 76) (G. RUSSO). — *Quadrilatère.* — Si l'on suppose que, tous les autres éléments restant fixes, F se déplace sur BD, K et L sont constamment des points homologues d'une homographie où E et G se correspondent et où B se correspond à lui-même; il en résulte que KL rencontre AC en un point fixe P.

De même, si H se déplace sur BD, les autres éléments n'étant pas modifiés, MN rencontre AC en un point fixe qui n'est autre que P, à cause de la symétrie par rapport à AC.

Pour que le quadrilatère KLMN soit inscriptible, il faut que les produits $PK \times PL$ et $PM \times PN$ soient égaux, ce qui n'a lieu que dans deux positions de H, celle de F étant supposée donnée.

WELSCH.

Prenons, par exemple, et à simple vue, $OE = \frac{3}{2} OA$, et $OF = 2.OB$.



Supposons, ensuite, H très voisin de F (et même confondu avec lui), et G assez éloigné de O (et même rejeté à l'infini).

Dans ces conditions, le quadrilatère KLMN devient une portion de trapèze isoscèle KLMR, R étant l'intersection de FA avec DG.

La circonférence KLM passe par R, et l'on voit que KR est une corde de cette circonférence. Mais N est un point de la corde KR; donc le quadrilatère KLMN n'est pas inscriptible.

Recta.

Autre réponse de M. *Jipé.*

3545. (**1909**, 97) (H. Brocard). — *Équation indéterminée*

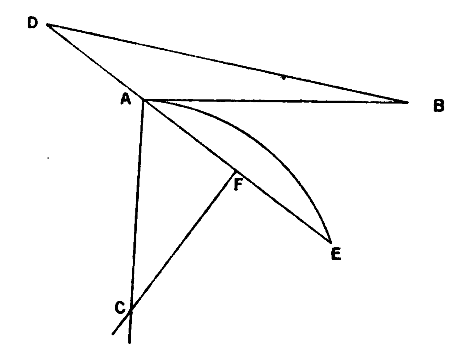
$$(2y+1)^2 = 1 + 4\frac{x^3 - x}{3}.$$

Elle n'a pas de solutions depuis $y = 120$ jusqu'à $y = 5000$.

A. Werebrusow
(Théodosia, Crimée).

Autre réponse de M. E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.), transmise à M. H. Brocard. Il n'a rien été ajouté anx cinq solutions de l'énoncé.

3547. (**1909**, 97) (C. Alasia de Quesada). — *Détermination de centre d'un cercle*. — La solution exacte du problème est impos-



sible, puisque le problème inverse de la rectification de la circonférence d'un cercle est un cas spécial de cette question.

Une solution approximative peut s'obtenir comme il suit :

Soient s l'arc et c la corde, r le rayon, et 2α l'angle au centre

correspondant; on a

$$c = 2r \sin a, \qquad s = 2ra,$$

$$\frac{c}{s} = \frac{\sin a}{a} = 1 - \frac{a^2}{6} + \frac{a^4}{120} - \ldots.$$

Pour une approximation, prenons deux termes de la série, et résolvons l'équation en a :

$$a = \sqrt{\frac{6(s-c)}{s}} \qquad \text{et} \qquad r = \sqrt{\frac{s^3}{24(s-c)}}.$$

Pour une construction géométrique approchée, prenons la construction approchée de Rankine (*voir* question **1489** (**1899**, 79, 211 **1900**, 413; **1908**, 278).

Soit

$$AB = s = \text{longueur de l'arc},$$

$$AD = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\text{corde},$$

$$BD = \frac{3}{2}c, \qquad DE = DB.$$

Menons AC perpendiculaire à AB, et soit FC perpendiculaire au milieu de AE : C est le centre cherché pour l'arc.

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.).

[D'après l'anglais. (La Réd.)]

Autre réponse analogue de M. A. Alayrac.

3550. (**1909**, 98) (T. Lemoyne). — *Cycliques.* — *Voir* G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires, second tirage,* Paris, 1896, A. Hermann.

Dans ce Livre, les *Courbes cycliques* (Zyklische Kurven) sont étudiées en détail. A la fin de l'Ouvrage se trouvent des Notices bibliographiques étendues.

O. Degel (Bayreuth).

[D'après l'allemand. (La Réd.)]

M. Chasles. — *Two geometrical Memoirs on the general properties of cones of the second degree and of spherical cones.*

[Translated from the french by Charles Graves. Dublin (about 1862)].

JOHN MULCAHY. — *Principles of modern Geometry* (Chap. XII, p. 170-204, Dublin, 1862).

E.-B. ESCOTT (Ann Arbor, Mich.).

3551. (1909, 98) (T. LEMOYNE). — *Courbes de Ribaucour et Cesáro.* — On trouve dans E. PASCAL, *Repertorium der höheren Mathematik*, II. Theil, Leipzig, 1902, B.-G. Teubner, p. 547, les indications suivantes :

Les spirales sinusoïdes (*Sinusspiralen*) sont très voisines des courbes de Ribaucour dont l'équation naturelle (intrinsèque) est

$$s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}}-1}}.$$

Les courbes de Ribaucour se distinguent par ce fait que leur rayon de courbure est proportionnel au segment de normale compris entre le point de la courbe et une droite fixe.

Le nombre n est dit l'*Index* ou *Indice*, aussi bien pour les Spirales sinusoïdes que pour les courbes de Ribaucour.

Les courbes de Ribaucour ont été découvertes par lui dans ses recherches sur les surfaces minima (*Mém. de l'Ac. de Belgique*, t. XLIV; *Nouv. Ann.*, 1888, etc.).

Une étude des deux genres de courbes se trouve dans Cesáro, *Geom. intrins.*, 1896, p. 45 et en allemand dans Kowalewski, *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, Leipzig, B.-G. Teubner, 1901.

Voir encore H. BROCARD, *Notes de bibliogr. des courbes géométriques*, Bar-le-Duc, 1897.

O. DEGEL (Bayreuth).

[D'après l'allemand (LA RÉD.)].

Je crois que la définition des courbes de Cesáro a été donnée pour la première fois par Cesáro lui-même, dans une étude intitulée : *Sur deux classes remarquables de lignes planes* (*N. A.*, 1888, p. 171-190).

E. Cesàro a proposé d'appeler *cercle directeur* le cercle fixe dont il est ici question. Cela dit, les deux classes remarquables susmentionnées correspondent aux cas où le cercle devient une droite fixe (lignes de Ribaucour) ou un point fixe (spirales sinusoïdes). Le cas général, où le rayon est fini, est celui des courbes ou lignes de Cesàro.

L'auteur donne (p. 173) l'équation intrinsèque de ces lignes.

Plus loin, A. Mannheim expose (p. 353-356) le théorème réciproque d'un théorème de M. E. Cesàro, et en fait application à l'ellipse et à sa développée.

Quant aux lignes de Ribaucour, elles ont été rencontrées par ce géomètre en 1880 (*N. C.*, p. 224-225), puis dans son étude des élassoïdes (surfaces minima) (Chap. XIV, § **122** à **128**, 1881, p. 157-164, *M. A. B.*, t. XLIV, 1882); mais je crois que, dès 1865, Ribaucour en avait traité quelques exemples.

Voir aussi E. Dubois : *Sur une famille de courbes cycloïdales* (*N. C.*, 1880, p. 158-165, où sont mentionnés Sturm, 1859, et Todhunter).

On devra également consulter deux autres articles de Cesàro (*N. A.*, 1888) : *Sur la courbure des coniques* (p. 152-159) et *Remarques sur la théorie des roulettes* (p. 209-230), et son Ouvrage : *Lezioni di Geometria intrinseca* (Napoli, 1896, p. 45-53), où sont énoncées plusieurs propriétés des diverses classes de courbes.

D'autres indications sur le même sujet se trouvent au Tome II des Courbes spéciales remarquables de M. G. Teixeira (Coïmbre, 1909, p. 282-286).

Des courbes de Ribaucour ont été rencontrées depuis longtemps, mais sans avoir fait l'objet d'une étude systématique et approfondie (Jean Bernoulli, Taylor, Hermann, Ossian Bonnet).

On les trouve aussi dans des écrits de Varignon et d'Euler, etc. *Voir* encore *I. M.*, question et réponse **250** (**1894**, 134; **1895**, 72 et 350), où *Rosace* (E. Cesàro) renvoie à son article susmentionné (*N. A.*, 1888, p. 226).

En réalité, c'est un Chapitre de la Géométrie intrinsèque. *Voir* l'Ouvrage de Cesàro et la Note historique de M. E. Wöllffing : *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten* (*B. M.*, 1900, p. 142-159).

Recta.

Nous avons étudié les *courbes de Cesáro* et les *courbes de Ribaucour* dans notre *Traité des courbes spéciales remarquables, planes et gauches* (t. II, 1909, p. 273 et 282-286). Ribaucour a considéré les courbes désignées sous son nom dans les *Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique* (t. XLIV, 1880); mais ces courbes avaient été déjà rencontrées par Jean Bernoulli, Taylor, Hermann, dans des travaux reproduits dans le Tome II des *Opera* de Jean Bernoulli, et plus tard par Ossian Bonnet, en 1844, dans le *Journal de Liouville*.

F. Gomes Teixeira (Porto).

3588. (**1909**, 171) (E. Maillet). — *Tables* (¹). — Une nouvelle Table, l'*Extended Binary Canon*, qui donne les moindres résidus (pos. et nég.) de 2^x jusqu'à $x = 100$ pour tous les nombres premiers (p) et pour toutes les puissances des premiers (p^k) jusqu'à p ou $p^k \not> 10000$, et jusqu'à $x = 36$ pour tout p ou $p^k \not> 12000$, calculée par le lieutenant-colonel Allan Cunningham, R. E., et M. H.-J. Woodall, A. R. C. Sc., est maintenant en préparation.

Une nouvelle Table des *Haupt-Exponents* des petites bases 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 pour tous les nombres premiers (p) et pour toutes les puissances des premiers (p^k) jusqu'à p ou $p^k \not> 10000$, donnant aussi les moindres racines primitives (pos. et nég.) pour les mêmes modules, et calculée par les mêmes auteurs, est déjà sous presse.

E. Desmarest, *Théorie des Nombres*, Paris, 1852. Une Table de trois pages donne une racine primitive (g) de tous les nombres premiers (p) jusqu'à $p \not> 10000$. Ces racines (g) sont fréquemment des nombres très peu convenables pour les calculs.

B.-M. Goldberg, *Rest-und Quotient Rechnung*, Hamburg, 1869. La Table, pages 97-138, donne la moindre racine primitive de tous les nombres premiers jusqu'à $p \not> 10160$.

Il y a beaucoup de fautes dans ces deux Tables : une liste de ces fautes sera donnée dans la nouvelle Table précitée.

A. Cunningham (Londres).

Autres réponses de MM. H. Brocard et A. Gérardin.

(¹) Le signe $\not>$ équivaut à $\leq$. E. M.



QUESTIONS.

3623. [**A3**] Soit l'équation

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma_1 x & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \sigma_2 x & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \sigma_n x \end{vmatrix} = 0;$$

on admet que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont $\geqq 0$ et ne sont pas tous nuls; de plus, si l'on pose

$$a_{i0} + a_{i1} + \ldots + a_{in} = 0,$$

on a, pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $k = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$a_{ik} \geqq 0, \qquad \text{quand} \qquad i \neq k,$$

et, pour chaque valeur de i, il y a une valeur de $k < i$ telle que $a_{ik} > 0$, en sorte que $a_{ii} < 0$.

Pourrait-on trouver des cas étendus où les racines de l'équation $D(x) = 0$ sont toutes négatives ou ont toutes leur partie réelle négative? Pourrait-on indiquer des cas étendus où il en est autrement?

J'ai pu seulement établir ces résultats :

1° On a

$$(-1)^n D(0) > 0;$$

2° Si m des quantités $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, exactement, sont $\neq 0$, $D(x) = 0$ est une équation de degré m, qui n'a aucune racine réelle $\geqq 0$.

3° Cette équation a toutes ses racines réelles, par suite négatives, dans les cas suivants :

a. Pour $n = 1$ ou 2;

b. En général, pour $\frac{a_{ik}}{a_{ki}}$ (i et $k \geqq 1$) assez voisin de 1 ou égal à 1;

c. Pour $a_{ik} = 0$ (i et $k \geqq 1$), quand $|i - k| > 1$.

Peut-être pourra-t-on s'aider de l'*Algèbre supérieure* de Weber, traduction Griess, Paris, Gauthier-Villars, 1898 (ou texte allemand), et des travaux de MM. Hurwitz, etc., qui y sont indiqués.

La réponse comporte des applications immédiates, en Hydraulique par exemple. E. Maillet.

3624. [**A3g**] En étudiant le problème des séries logarithmiques (*voir* question **1653**, **1899**, 242; **1900**, 251; **1901**, 166) j'ai trouvé une méthode qui me donne un nombre indéfini d'équations de degré sept avec des racines rationnelles, et de la forme

$$(1) \qquad x^7 + ax^5 + bx^3 + cx + d = 0.$$

Exemple :

$$x^7 - 4214x^5 + 4716649x^3 - 1218798036x - 6983776800 = 0.$$

Racines :

$$51, \quad 33, \quad 24, \quad -7, \quad -13, \quad -38, \quad -50;$$

une autre équation a les racines

$$11907, \quad 5893, \quad 6001, \quad -121, \quad -5200, \quad -6586, \quad -11894.$$

Y a-t-il d'autres équations du septième degré de la forme (1), et dont les racines soient des entiers plus petits en valeur absolue que les racines de ces équations?

E.-B. Escott (Ann Arbor, Mich.)

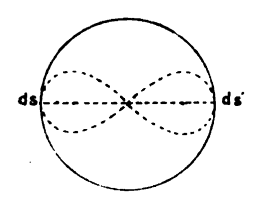
[D'après l'anglais. (La Rédaction.)]

3625. [**V8**] J'ai eu l'occasion d'acheter, chez un marchand de livres d'occasion, une brochure in-8° de 74 pages

et deux Tables, dont le titre est le suivant: *Specimen geometricum, auctore Josepho Antonio Alasia, a summa ripa nemoris ex collegio theologorum regii taurinensis Athenæi;* Taurini, apud Bernardinum Tonso. Il n'y a pas d'autres indications, mais j'ai raison de croire que la brochure a été publiée en 1770. Je serais reconnaissant à celui qui voudrait me donner des renseignements sur ce mathématicien et aussi sur son œuvre, ou bien m'indiquer où je pourrais les trouver. C. ALASIA DE QUESADA (Brindisi).

3626. [T2aγ] Une verge cylindrique parfaitement élastique, dont le diamètre est négligeable par rapport à sa longueur, forme une circonférence sans discontinuités.

Soient ds et ds' deux éléments diamétralement opposés; immobilisant ds, on fait exécuter à ds' dans le plan perpendi-



culaire au diamètre une rotation de 180° de manière à faire prendre à la verge la forme d'un 8.

Si l'on néglige le diamètre de la verge, la forme qu'elle prend est-elle une courbe plane et quelle est l'équation de cette courbe? G. ESPANET.

3627. [V1] Un correspondant [1] pourrait-il me fournir quelques indications bibliographiques au sujet de solutions retrouvées par des mathématiciens ignorant les résultats obtenus par des devanciers sur les mêmes problèmes? Il

---

[1] Les réponses devront être envoyées à l'adresse suivante : M. Farid Boulad, attaché au Service des Ponts des Chemins de fer de l'État, au Caire, Egypte.



semble, en ce cas, qu'il ne doive pas seulement y avoir une similitude dans les méthodes de recherches, mais encore des ressemblances de tempérament physiologique et moral.

N'y aurait-il pas intérêt à faire sur ce sujet une enquête semblable à celle déjà faite à propos des solutions trouvées durant le sommeil, etc., enquête permettant de diriger plus sûrement les efforts des jeunes mathématiciens?

FARID BOULAD (Le Caire).

3628. [I1] Je désire savoir comment les Romains s'y prenaient pour faire les opérations arithmétiques avec leurs chiffres, en particulier pour la multiplication et l'extraction des racines carrées.

Ainsi, j'aimerais avoir le mécanisme de la multiplication de CLXVIII (168) par MIV (1004).

E.-N. BARISIEN.

3629. [I19c] A-t-on étudié des carrés analogues aux carrés semi-magiques, magiques, diaboliques, etc., mais où chaque terme est une puissance $n^{\text{ième}}$, la constante magique pouvant être ou non une puissance $n^{\text{ième}}$? Connaît-on des cas d'impossibilité un peu étendus? E.-N. BARISIEN.

3630. [P2] Je désirerais connaître :

1° Quelles sont les courbes qui sont leurs propres polaires réciproques par rapport à un cercle choisi convenablement dans leur plan;

2° Quelles sont plus généralement les courbes qui ont pour polaires réciproques des courbes admettant même définition géométrique que les premières. T. LEMOYNE.

3631. [M¹5cβ] On rencontre souvent la cissoïde de Dioclès comme lieu géométrique; quels sont les cas les plus simples où on la rencontre comme enveloppe de droites?

T. LEMOYNE.



1282. **[O2d]** (**1898**, 99) Examiner s'il peut y avoir de l'intérêt dans l'extension de la notion de barycentre d'un arc de courbe, obtenue en prenant n points A_1, A_2, ... sur la courbe, et en appelant *barycentre de leur système* le point dont les coordonnées sont

$$x = (n-1)!\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\varphi(s_i)}{f'(s_i)}, \qquad y = (n-1)!\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\psi(s_i)}{f'(s_i)},$$

où s_1, s_2, ... représentent les longueurs des arcs OA_1, OA_2, ... Les fonctions $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ ont leurs dérivées $(n-1)^{\text{ièmes}}$ égales aux coordonnées de l'extrémité A de l'arc OA, dont la longueur est s, et la fonction $f(s)$ n'est autre que $(s-s_1)(s-s_2)\ldots$. Voici une propriété remarquable : les barycentres des $n+1$ systèmes qu'on peut former avec $n+1$ points sont sur une droite, qu'ils partagent en segments proportionnels aux longueurs des arcs correspondants. *Rosace.*

1283. **[I11]** (**1898**, 100) Soit

$$f(x) = E(x) - x + \frac{1}{2},$$

et convenons d'étendre la définition de $f(x)$ aux valeurs négatives de x par l'équation $f(-x) = -f(x)$. Toutefois, quand x est un nombre entier, positif ou négatif, on conviendra de prendre $f(x)$ égal à $+\frac{1}{2}$.

Soient maintenant a, b, c trois nombres entiers positifs, premiers deux à deux, n un nombre entier positif quelconque.

Les nombres entiers b_1, a_1, a_3, b_2 sont définis à des multiples près des nombres respectifs a, b, c par les congruences suivantes :

$$bb_1 \equiv 1 \pmod{a}, \qquad aa_1 \equiv 1 \pmod{b}, \qquad aa_3 \equiv 1 \pmod{c},$$
$$bb_2 \equiv 1 \pmod{c}.$$

Ces définitions posées, on demande une démonstration de l'équation

$$\sum_{r=1}^{r=a-1} f\left(\frac{rb_1}{a}\right) f(n-r)\frac{a_2}{c} + \sum_{s=1}^{s=b-1} f\left(\frac{sa_1}{b}\right) f(n-s)\frac{b_1}{c}$$

$$= \sum_{t=1}^{t=c-1} f\left(\frac{ta_3}{c}\right) f(n-t)\frac{b_2}{c} + \frac{f^2\left(\frac{n}{c}\right)}{2ab} + \frac{6ab-c^2-2}{24abc}.$$

J. Franel (Zurich).

1285. **[P1c]** (**1898**, 123) Trouver les divers couples de courbes homographiques ou corrélatives (non superposables), dont les arcs correspondants sont égaux.

Cyp. Stephanos (Athènes).

1288. **[V9]** (**1898**, 123) Quel géomètre a employé pour la première fois l'expression de *représentation sphérique* dans la théorie des surfaces? *Milèse.*

1289. **[H4]** (**1898**, 123) Soient $A(y)=0$, $B(y)=0$ deux équations linéaires différentielles sans seconds membres, d'ordres m et $m+n$ respectivement. On ignore leurs intégrales, mais on sait que les m intégrales particulières distinctes de la première satisfont à la seconde; comment peut-on former une équation $C(y)=0$ de même espèce, d'ordre n, admettant les n intégrales particulières distinctes non communes aux deux premières équations?

Les coefficients des équations données sont supposés variables. *Regor.*

RÉPONSES.

668. (**1895**, 319; **1904**, 210) (H. Delannoy). — *Permutations.* — Sur un échiquier de n^2 cases, si l'on place n pions portant les numéros 1, 2, ..., n de façon que, sur chaque ligne et chaque colonne, il y ait un pion et un seul, chaque diagonale renfermant au maximum un pion; si, de plus, le pion marqué 1 est toujours placé dans la première colonne, le pion marqué 2 dans la deuxième, etc., en lisant les numéros des pions en commençant par la ligne du bas et en montant, on forme une permutation qui remplit les conditions demandées. Par ce procédé, on les obtient toutes. Le problème est ainsi ramené au problème des dames, qui a été résolu, je crois, pour des valeurs de n inférieures à 13. Mathieu.

876. (**1896**, 175; **1906**, 84) (V. Retali). — (**1908**, 103, 224; **1909**, 53). — *Voir* ci-après (**1909**, 249) ma réponse à **1295**.

V. Retali (Milan).

1237. (**1898**, 76; **1908**, 244). (G. Loria). — Je n'ai rencontré aucune preuve justificative de la dénomination de *Courbe de Rolle,* donnée à la cubique

$$xy^2 = a(x+y)^2.$$

Un instant j'ai pensé pouvoir en trouver l'origine dans la discussion du *Problème général des tangentes,* au *Journal des Savans*, entre Saurin et Rolle, durant les années 1702 et 1705, mais je n'ai rien remarqué de bien concluant, et il y est question de tout autres courbes.

La solution reste donc à chercher, mais je désire profiter de l'occasion pour préciser la forme de la courbe de Rolle dont le tracé a été donné de façon incomplète ou inexacte.

Cette courbe présente les particularités suivantes :

1° Un point de rebroussement à l'origine, $y' = -1$;

2° Une asymptote rectiligne, $x = a$;
3° Un point $x = y = 4a$ où la tangente est parallèle à Ox;
4° Un point d'inflexion

$$x = 9a, \qquad y = \frac{9}{2}a, \qquad y' = \frac{1}{8},$$

et la tangente a pour équation

$$y = \frac{x}{8} + \frac{27}{8}a;$$

5° Une parabole asymptote

$$y = a \pm \sqrt{ax},$$

qui a pour axe $y = a$, pour sommet $x = 0$, $y = a$ et pour foyer

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = a.$$

H. Brocard.

1263. (**1898**, 78; **1908**, 265) (H. Laurent). — *Série ayant pour racines réelles exclusivement les nombres premiers.* — La question renferme une faute d'impression; au lieu de

$$\theta(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \sin^2 \pi z \left[\frac{1}{n^2 \sin \frac{\pi z}{n}} - \frac{1}{\pi(n - z)} \right]^2,$$

il faut lire, je crois,

$$\theta(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \sin^2 \pi z \left[\frac{1}{n^2 \sin \frac{\pi z}{n}} - \frac{1}{n\pi(n - z)} \right]^2.$$

En effet, dans cette dernière expression, le terme entre crochets ne peut devenir infini que pour

$$z = \lambda n \qquad (\lambda \text{ entier}).$$

Par la substitution $z = \lambda n + z'$, il devient

$$\frac{(-1)^\lambda}{n^2 \sin \frac{\pi z'}{n}} - \frac{1}{n\pi(n - n\lambda - z')},$$

c'est-à-dire

$$\frac{-(1)^\lambda}{n\pi z'} + \ldots + \frac{1}{n\pi(z' + n\lambda - n)}.$$

Pour que ceci ne devienne pas infini pour $z' = 0$, il faut que

$$\frac{1}{z' + n\lambda - n}$$

le devienne, c'est-à-dire que

$$n\lambda - n = 0 \qquad (\lambda = 1).$$

Les termes polaires sont alors

$$\frac{-1}{n\pi z'} \quad \text{et} \quad \frac{+1}{n\pi z'},$$

et se détruisent.

Pour $\lambda \neq +1 (z = \lambda n)$, au contraire, le terme entre crochets devient infini et son produit par $\sin^2 z$ est $\neq 0$.

Conclusion. — Pour qu'un nombre entier N annule $\theta(z)$ (c'est-à-dire tous les termes de la série), il faut que

$$N = n\lambda$$

ne soit possible que pour $\lambda = 1$ et $n \geqq 2$; donc N doit être premier et *positif* (d'après l'énoncé, il y aurait des racines négatives, cela me paraît faux).

La série $\theta(z)$ est évidemment convergente dans le plan complexe et représente une fonction méromorphe. (On peut d'ailleurs, sans changer la propriété énoncée, multiplier les termes de la série $\theta(z)$ par des coefficients positifs tels que la convergence subsiste.)

P. Fatou.

1295. (**1898**, 125) (V. Retali). — *Quartiques uninodales* (**1899**, 18; **1909**, 55, 126). — Les travaux de Brioschi, Cremona et M. A. Brill signalés dans la réponse de M. Brocard (**1909**, 127) sont précisément ceux que j'avais rappelés (**1896**, 175) en posant la question **876** (j'ajoute à titre de curiosité que, des deux premiers, je possède l'exemplaire envoyé à Weierstrass par les auteurs). Quant aux deux autres Notes, qui se rapportent aux quartiques unicursales, elles ne paraissent pas avoir de relation avec les quartiques uninodales qui sont du *deuxième genre*. Il semble aussi que le titre de la Note de

M. Lecomte n'est pas trop approprié, car il n'y a pas de quartiques unicursales ayant un seul point double, ni même avec deux; peut-être doit-on entendre un seul point double *réel*.

V. Retali (Milan).

2775. (**1904**, 114) (Paulmier). — *Équation indéterminée* (**1904**, 296). — Réponse de M. H.-B. Mathieu transmise à M. Paulmier.

La Rédaction.

2964. (**1905**, 242) (G. Lemaire). — *Stadia et anallatisme.* — (**1906**, 120, 217; **1907**, 68). — L'extrait suivant de Terquem (*N. A.*, 1858, p. 274) (rectifié par places) vient assez heureusement préciser l'histoire de la *stadia*.

Cet instrument a été inventé en 1778, par Green, opticien de Londres. Les ingénieurs français ne l'ont connu qu'en 1816, et Lostende l'a fait adopter en 1820.

Le célèbre constructeur d'instruments astronomiques, M. Porro, lui a apporté un perfectionnement.

Ici Terquem indique un rapport de Sénarmont à l'Académie des Sciences, du 19 août 1850 : il a certainement fait confusion avec le rapport de Largeteau (*Ibid.*) sur la *Description d'un nouvel appareil* [de Porro] *pour la mesure des bases trigonométriques* (*C. R.*, t. XXXI, 1850, p. 232-241).

Sur les conclusions de Largeteau, l'Académie a approuvé le travail de Porro et en a ordonné l'insertion au recueil des *Mémoires des Savants étrangers*; mais cette publication n'a pas eu lieu, que je sache.

Dans l'*Aide-Mémoire des Officiers du Génie*, de J. Laisné, 4ᵉ édition, 1861, il est dit, pages 111 et 123, que le capitaine Goulier avait, dès cette époque, muni de lunettes anallatiques la boussole à éclimètre, employée aux lectures de la *stadia*, ce qui affranchit d'une certaine rectification.

Note. — Il me reste encore à préciser l'assertion de Terquem.

On trouve au Tome XLVIII des *Comptes rendus* (1859, p. 453-457) le rapport de la Commission (Faye, Babinet; H. de Sénarmont, rapporteur) chargée d'examiner différentes inventions de Porro; ce document est intitulé : *Rapport sur diverses Communications faites à l'Académie par M. Porro*, dans les séances du 2 no-

vembre 1856, du 7 juillet 1857, du 22 février et du 7 juin 1858 [sauf rectifications].

Il est parfaitement possible que Terquem ait fait allusion auxdites Communications de Porro et qu'il ait eu des entretiens à ce sujet avec H. de Sénarmont. Ainsi s'expliquerait l'annonce, en 1858, d'un rapport qui ne devait paraître que le 7 mars 1859; mais le rapport de Sénarmont n'a trait qu'à la taille des grands objectifs, et cela confirme l'erreur de Terquem.

Pour l'anallatisme, je suis amené aussi à faire une remarque assez inattendue, à l'occasion de ma réponse **1906**, 217.

Par une coïncidence singulière, la mention de Boffat, du diocèse de Rieux et le mystère de la signature L. font invinciblement penser que l'inspirateur de l'invention pourrait avoir été un des Laloubère, tous deux de la même région toulousaine et propriétaires du château de ce nom. Le mathématicien Antoine de Laloubère, décédé en 1664, est à éliminer, mais son neveu Simon, assez connu des amateurs de carrés magiques, pourrait, aussi bien et mieux que La Montre, désigner l'énigmatique expérimentateur de 1696. Cependant je ne considère pas que cela doive faire renoncer à l'explication proposée (**1906**, 217).

Pour terminer, je citerai trois références bibliographiques :

C.-M. Goulier (mention de la lunette anallatique de Porro pour le perfectionnement de la stadia) (*C. R.*, t. XXXI, 1850, p. 658).

C.-M. Goulier, *Mémoire sur la stadia et sur les instruments servant conjointement avec elle au mesurage des distances* (*Mémorial de l'Officier du Génie*, t. XVI, ou 2e série, t. I, 1854, 50 pages, 2 pl.).

C.-M. Goulier, *Note sur la lunette anallatique de M. Goulier* (*Mémorial, etc.*, t. XXIV, ou 2e série, t. IX, 1875, 20 pages et 4 fig.).

H. Brocard.

2997. (**1906**, 6) (G. Lemaire). — *Division d'un polygone* (**1908**, 83). — L'énoncé paraît renfermer une condition de trop; le problème consistant à partager un polygone en parties proportionnelles à des nombres donnés, au moyen de droites issues d'un point donné, est en effet complètement déterminé, et la somme des longueurs des sécantes l'est également.

Welsch.

3007. (**1906**, 33) (E. Malo). — *Congruence* (**1906**, 133; **1908**,

104). — Réponse de M. L.-E. Pratt (Tecumseh, Nebraska, U. S. A.), transmise, après traduction de l'anglais, à MM. E. Malo et Dubouis.

LA RÉDACTION.

3234. (**1907**, 147) (*Nester*). — *Facteurs de* $2^n - 1$ (**1907**, 259, 287; **1908**, 186, 202). — M. le Colonel Cunningham vient de trouver le facteur 228479 pour $2^{71} - 1$. Sachant que le diviseur cherché était supérieur à 200000, il suffit *d'un essai* (voir *S. Œ.*, nov. 1908, p. 119), pour trouver la solution.

A. GÉRARDIN.

Je viens de déterminer un nombre de Mersenne, le plus petit qui reste non vérifié comme nombre composé, savoir

$$2^{71} - 1 = 228.479 \times 10.334.355.636.337.793.$$

Le caractère du grand facteur, soit premier, soit composé, est inconnu. Il reste donc seulement 16 nombres, qu'on suppose composés (d'après Mersenne), non vérifiés, en admettant (d'après Ed. Lucas) que $2^{89} - 1$ soit nombre composé.

A. CUNNINGHAM (Londres).

3313. (**1907**, 267) (K. HAGGE). — *Quadrilatère.* — A partir du point de rencontre M des côtés opposés A_1A_2, A_3A_4, et vers le quadrilatère, portons respectivement les longueurs

$$MN = A_1A_2 \quad \text{et} \quad MN' = A_3A_4,$$

puis joignons NN'.

Le lieu des sommets communs à deux triangles ayant pour bases A_1A_2 et A_3A_4, et dont la somme des aires est moitié de l'aire du quadrilatère, est une droite parallèle à NN'.

Cette droite passant par les milieux des diagonales du quadrilatère complet contient les quatre points P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41}, et ceux-ci sont les centres des coniques ayant pour asymptote l'un des côtés du quadrilatère.

WELSCH.

3371. (**1908**, 78) (W. KAPTEYN). — *Équation différentielle* (**1908**, 255; **1909**, 130). — La Note citée de C. Harkema n'a été complétée que bien plus tard, en 1894, d'après un manuscrit communiqué par M. Possé (*N. A.*, p. 502-503). On y signale le facteur d'intégrabilité

$\frac{1}{M^2 \pm N^2}$ et le changement de variables

$$u, v = x \pm iy \qquad \text{ou} \qquad u, v = x \pm y.$$

Voir aussi : W. Maximovitch, *Sur un moyen de déterminer le facteur d'intégrabilité* (*C. R.*, t. XCVII, 1883, p. 1544).

E. Liminon.

3380. (**1908**, 98) (G. Quijano). — *Point relatif au pentagone* (**1908**, 257; **1909**, 109). — M. Espanet avait raison de supposer que cette question a été sans doute étudiée. On la trouvera en effet dans l'article de M. Jean Mascart intitulé : *Un problème de Géométrie récurrente* (*J. S.*, 1892, p. 32-34).

Il s'agit de la limite de pentagones dont les côtés sont les diagonales du précédent.

L'article est terminé par l'annonce : *A suivre,* mais il n'a pas été continué, à ma connaissance du moins.

Recta.

3385. (**1908**, 100) (E.-B. Escott). — *Polynome* (**1908**, 208; **1909**, 110). — ax^2+bx+c étant la valeur de X ou le reste de sa division par x^3-x-1; α, β, γ les racines de l'équation

$$(1) \qquad x^3-x-1=0$$

(α réel, β et γ imaginaires conjuguées), pour que X^3-X-1 soit divisible par x^3-x-1, il faut et il suffit que les coefficients a, b, c satisfassent à un système de trois équations

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=x_1, \\ a\beta^2+b\beta+c=x_2, \\ a\gamma^2+b\gamma+c=x_3, \end{cases}$$

dans lesquelles *chacune* des quantités x_1, x_2, x_3 peut prendre l'une *quelconque* des trois valeurs α, β, γ, ce qui donne $3^3=27$ solutions.

Pour que a, b, c soient réels, il est *nécessaire* que la somme $x_1+x_2+x_3$, dont la valeur est $2a+3c$, soit elle-même réelle, ce qui ne peut avoir lieu que si les quantités x_1, x_2, x_3 sont toutes trois égales à α

$$(\text{alors } a=0,\ b=0,\ c=\alpha),$$

ou si chacune d'elles est égale à une racine différente de l'équation (1).

Des six dernières combinaisons, deux seulement donnent des solutions réelles

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma$$

et

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \gamma, \quad x_3 = \beta,$$

pour lesquelles on a respectivement

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0$$

et

$$a = \frac{3\alpha^2}{2\alpha + 3}, \quad b = \frac{\alpha}{2\alpha + 3}, \quad c = \frac{-2\alpha^2}{2\alpha + 3}.$$

Les seuls polynomes X, à coefficients réels, tels que

$$X^3 - X - 1$$

soit divisible par $x^3 - x - 1$, sont donc compris dans la formule

$$X = (x^3 - x - 1)\,F(x) + \begin{cases} \alpha \\ x \\ \dfrac{3\alpha^2 x^2 + \alpha x - 2\alpha^2}{2\alpha + 3} \end{cases},$$

où F (x) esr une fonction entière.

La méthode s'applique évidemment au cas où $ax^2 + bx + c$ est remplacé par un polynome quelconque de degré n; on est conduit alors à un système de n équations linéaires fournissant n^n solutions.

WELSCH.

3390. (**1908**, 102) (TAFELMACHER). — *Équation indéterminée* (**1908**, 259; **1909**, 19, 156). — Comme curiosité bibliographique, je signalerai que F. de Lagny a exposé une recherche de solutions de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2),$$

qui a une certaine corrélation avec la question 3390.

Voir *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1706 : *Sur une proposition de Géométrie élémentaire* (*Hist.*, p. 83-90; *Mém.*, p. 319-333). *E. Liminon.*

L'observation de M. Gérardin me fait voir que je n'ai pas assez insisté sur ce que les formules de M. Tafelmacher sont absolument générales, ainsi qu'il le reconnaît du reste lui-même aujourd'hui.

Je n'ai entendu, dans ma réponse (**1909**, 19), qu'indiquer la *forme* que je considère comme préférable, et pour laquelle je ne revendique aucune priorité.

WELSCH.

3432. (**1908**, 196) (J. JONESCO). — *Découpage d'un rectangle* (**1909**, 43). — Dans les Additions aux *Récréations mathématiques* de Rouse Ball (3ᵉ Partie, Paris, Hermann, 1909, p. 335), M. A. Aubry a indiqué les valeurs suivantes du rapport des deux côtés du rectangle : $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc. En d'autres termes, il existe 1, 4 et 14 nombres tels que les rectangles ayant ces nombres pour rapport de leurs côtés puissent se partager en 2, 3 ou 4 rectangles semblables aux rectangles proposés, comme le spécifiait l'énoncé.

Devignot.

3448. (**1908**, 220) (T. LEMOYNE). — *Courbes d'ordre n* (**1909**, 63, 131). — Je crois avoir donné (**1909**, 131) une réponse plus satisfaisante, puisqu'elle vise les mêmes références que celles de l'auteur de la question. Je ne les avais pas alors sous la main, mais je viens de les retrouver et je suis ainsi en mesure d'y ajouter.

Articles de M. G. HUMBERT :

Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre (*S. M.*, t. IX, 1881, p. 166-172).

Sur les courbes de genre un (*C. R.*, t. XCVII, 1883, p. 1042).

Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles (*C. R.*, *Ibid.*, p. 1287).

Sur les courbes de genre un, Thèse, Paris, 1885.

Pour les articles de CLEBSCH, voir *C. R.*, t. LXIV, 1865, p. 210, et t. LXXIII, 1871, p. 189. *.Devignot.*

3451. (**1908**, 221) (DUBOUIS). — *Congruence* (**1909**, 85). — La réponse de M. L.-E. Prat à 3007, mentionnée plus haut (**1909**, 252), s'applique aussi à 3451. LA RÉDACTION.

3472. (**1908**, 271) (G. RUSSO). — *Mouvement harmonique* (**1909**, 133). — *Voir* G. GREENHILL, *Une démonstration élémentaire de la formule du pendule* (*E. M.*, 1909, p. 245-259).

Mouvement harmonique simple est le terme employé dans la

Natural Philosophy de Thomson et Tait, dans l'analyse de la vibration d'un son musical périodique par une série de Fourier.

On peut ajouter, enfin, que, dans les Ouvrages anglais, la sinusoïde $y = \sin x$ est presque toujours appelée *curve of sinus*, courbe de sinus, tandis que la courbe $y = m \sin x$ est dite *harmonic curve*, courbe harmonique.

Cette dernière dénomination a dû s'étendre aux courbes ondulatoires ou sinusoïdales, correspondant à une équation de la forme indiquée (*loc. cit.*, **1909**, 133). *Vieujeu.*

3484. (**1908**, 275) (WEREBRUSOW). — *Identités algébriques* (**1909**, 135). — Dans les expressions A et B, il faut remplacer $+3c^2$ par $-3c^2$.

En appliquant les formules de M. Werebrusow et de Catalan et celles qu'on peut en déduire par des permutations circulaires et des changements de signe permis, j'obtiens 19 décompositions distinctes de $\overline{21}^2$ en sommes de trois carrés.

(Extrait d'une réponse de M. E.-N. BARISIEN.)

La réponse détaillée a été transmise à M. Werebrusow.

Autre réponse de M. RODRIGO RAVASCO (Lisbonne), qui renvoie à E. Lucas, *Théorie des Nombres*, p. 128. LA RÉDACTION.

3512. (**1909**, 7) (GAEDECKE). — *Coniques* (**1909**, 95). — Réponses de MM. Dubouis et Welsch, transmises à M. Gaedecke.

LA RÉDACTION.

3514. (**1909**, 25) (J. MASCART). — *Annuités* (**1909**, 168). — Il s'agit sans doute de l'un des Ouvrages suivants de Francis BAILY, banquier et astronome : *The doctrine of interest and annuities*, London, 1808.

The Doctrine of life annuities and assurances, London, 1813 (dont une traduction française, par Alfred de Courcy, a été publiée à Paris en 1836). *Recta.*

3525. (**1909**, 49) (E.-B. ESCOTT). — *Congruence.* — Propriétés arithmétiques de la suite

$$(u) = 3, -1, 1, 2, -3, 4, -2, -1, 5, -7, 6, -1, \ldots.$$

La suite (u), mis à part le premier terme qui se trouverait répété, n'est autre que le prolongement au delà de son origine, suivant l'échelle de relation qui lui est afférente, de la suite

$$(v) = 3,\ 0,\ 2,\ 3,\ 2,\ 5,\ 5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 17,\ \ldots,$$
$$v_0 = u_0 = 3, \qquad v_{-n} = u_n, \qquad v_{n+1} = v_{n-1} + v_{n-2}.$$

Cette suite, plus simple parce que tous les termes en sont positifs, et qui est formée par les coefficients du développement de la fraction rationnelle $\frac{3x^2-1}{x^3-x-1}$, a été signalée à un point de vue différent par M. R. Perrin dans la question **1484** (**1899**, 76) : la réponse que j'ai faite à cette question (**1900**, 280, 312) mettait en évidence, pour les moindres modules premiers, les circonstances de périodicité indiquées par M. Escott. Cette réponse contenait aussi la démonstration d'un théorème très général (comprenant notamment celui de Fermat), d'où l'on conclut immédiatement, la périodicité étant admise, l'exactitude de la propriété qu'exprime la congruence, vérifiée sous certaines conditions,

$$u_{p+1} \equiv 0 \qquad (\bmod p).$$

Il s'agit donc simplement de prouver la périodicité. On y parvient brièvement comme il suit, à l'égard des coefficients successifs du développement de toute fraction rationnelle ayant pour dénominateur la forme entière cubique

$$f(x) = x^3 - rx^2 + sx - t.$$

Je supposerai toutefois, mais uniquement pour abréger, que le numérateur est $f'(x)$, supposition à laquelle on peut d'ailleurs strictement se tenir.

A cet effet, de la congruence

$$x^3 - rx^2 + sx - t \equiv 0,$$

regardée comme satisfaite, je conclus

$$(x^3 - rx^2 + sx - t)^p \equiv 0.$$

Or le développement du premier membre, p étant premier, se compose des quatre termes

$$x^{3p} - r^p x^{2p} + s^p x^p - t^p,$$

plus de termes dont les coefficients, entiers sous forme fractionnaire, admettent p comme facteur formel de leur numérateur, et par suite comme facteur réel, puisque aucun facteur du dénominateur ne peut entrer en réduction. D'autre part, les coefficients r, s, t étant des entiers, j'aurai par Fermat

$$x^{3p} - rx^{2p} + sx^p - t \equiv 0.$$

Cette congruence étant impliquée par la première et la reproduisant à cela près que x^p remplace x, x^p est racine du moment que x l'est. Mais, si x est réel, c'est la même racine, puisque, par Fermat, on a $x^p \equiv x$; et si toutes les racines sont réelles et égales à a, b, c, le nombre de termes à la période sera mesuré par le plus petit commun multiple des moindres exposants λ, μ, ν, diviseurs de $p - 1$, pour lesquels on a

$$a^\lambda \equiv b^\mu \equiv c^\nu \equiv 1 \pmod{p}.$$

Si x est imaginaire, x^p sera une seconde racine imaginaire et il ne pourra se rencontrer plus d'une racine réelle a : dans ce cas $x^{p^2} \equiv x$, ce qui revient à $x^{p^2-1} \equiv 1$.

D'autre part on a

$$a \times x \times x^p \equiv ax^{p+1} \equiv t$$

ou encore

$$x^{p+1} \equiv h, \qquad ah \equiv t \pmod{p};$$

puis

$$x^{p+2} \equiv hx, \ \ldots.$$

On trouvera donc pour les deux racines imaginaires

$$\sum x^{p+1} \equiv 2h, \qquad \sum x^{p+2} \equiv h\sum x, \qquad \sum' x^{p+3} \equiv h\sum x^2, \qquad \ldots;$$

en d'autres termes, pour ces deux racines il y aura une période comprenant au plus $(p+1)\mu$ termes, μ étant le moindre exposant pour lequel la congruence $h^\mu \equiv 1 \pmod{p}$ soit satisfaite. La période définitive sera le plus petit commun multiple de cette période spéciale et de λ, plus petit exposant pour lequel on ait $a^\lambda \equiv 1 \pmod{p}$.

S'il n'y a que des racines imaginaires x^{p^2} est la dernière racine et il vient $x^{p^3} \equiv x$, ou $x^{p^3-1} \equiv 1$. D'ailleurs

$$x \times x^p \times x^{p^2} = x^{p^2+p+1} \equiv t \pmod{p},$$

d'où

$$x^{p^2+p+2} \equiv tx, \quad \ldots.$$

$$\sum x^{p^2+p+1} = 3t, \quad \sum x^{p^2+p+2} = rt, \quad \sum x^{p^2+p+3} = (r^2 - 2s)t, \quad \ldots.$$

La période est donc, au plus, de $(p^2+p+1)\varpi$ termes, ϖ désignant le moindre exposant qui donne $t^\varpi \equiv 1 \pmod{p}$.

On aperçoit aisément les généralisations que comporte la démonstration précédente. D'autre part j'observerai que, si celle-ci satisfait à son objet immédiat, elle laisse à désirer en ce qui concerne les circonstances et les motifs de l'existence de zéro, une ou trois racines réelles de la congruence $f(x) \equiv 0$. Mais élucider ce point m'entraînerait trop loin, comme aussi les particularités curieuses de la répartition des divers résidus $(\bmod p)$, dans chacun des groupes périodiques.

E. Malo.

3557. (**1909**, 121) (*Sorus*). — *Triangle équilatéral.* — Après s'être donné les points A' et B', on en déduira le point K; si ensuite on mène par B une parallèle à A' K, elle rencontrera AB' en H et CF en un point G, qu'on pourra désigner par la lettre C'.

Dans ces conditions, le triangle A'B'C' est fini, mais le point L est rejeté à l'infini.

Les deux triangles HKL, A'B'C' ne pourront donc être semblables que par exception, et pour des valeurs égales de DA', EB', FC'. Ils seront alors équilatéraux, ce qui est d'ailleurs évident.

E. Liminon.

En désignant par h la hauteur du triangle équilatéral, j'ai déduit pour l'aire du triangle HKL la formule suivante :

$$A = \frac{[8abc+(a+h)(b+h)(c+h)]^2 h^2 \sqrt{3}}{3[a(3c-h)+h(c+h)][b(3a-h)+h(a+h)][c(3b-h)+h(b+h)]}.$$

Les triangles A'B'C' et HKL ne sont pas, en général, semblables. Par exemple, en faisant $a = h$, $b = c = \frac{h}{3}$ il en résulte un triangle A'B'C' isoscèle, pendant que le triangle HKL est rectangle et que l'angle LHK $= 30^\circ$.

A. Tafelmacher (Dessau).

En général, les triangles A'B'C', HKL ne sont pas semblables; en effet, si l'on se donne les positions de B' et C', la valeur de l'angle $\widehat{KLH}$ et sa position sont déterminées, mais, A' pouvant être en un point quelconque de AD, les angles du triangle A'B'C' peuvent être quelconques.

Les coordonnées normales absolues, ou les distances aux côtés du triangle ABC des sommets de HKL, sont données par les relations

$$-x_1 = \frac{y_1}{\dfrac{\dfrac{l\sqrt{3}}{2}+a}{2a}} = \frac{z_1}{\dfrac{2c}{\dfrac{l\sqrt{3}}{2}+c}} = \frac{\dfrac{l\sqrt{3}}{2}}{-1+A+\dfrac{1}{C}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left(A = \frac{\dfrac{l\sqrt{3}}{2}+a}{2a}, \quad B = \frac{\dfrac{l\sqrt{3}}{2}+b}{2b}, \quad \ldots\right).$$

On en déduit pour l'aire demandée

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{-1+A+\dfrac{1}{C}}+\frac{1}{-1+B+\dfrac{1}{A}}+\frac{1}{-1+C+\dfrac{1}{B}}\right).$$

Quant au périmètre, il s'obtiendra sans difficulté, sinon sous une forme simple, en partant de l'expression connue

$$X^2 \sin^2 A = y^2 + z^2 + 2yz\cos A,$$

qui se réduit, pour le sommet K, à

$$X = l\,\frac{\sqrt{1-B+B^2}}{-1+B+\dfrac{1}{A}}.$$

Le périmètre cherché est la somme de six expressions analogues où il convient de prendre chaque radical avec le signe +.

WELSCH.

Autre réponse analogue de M. E.-N. BARISIEN, transmise à M. *Sorus*.

3558. (**1909**, 121) (*Sorus*). — *Aire d'un cône.* — M. Williot a indiqué pour la surface d'un cône circulaire oblique la formule

$$S = \frac{\pi r}{2}\left[\sqrt{Aa}+\frac{A+a}{2}\sqrt{1-\left(\frac{A-a}{2}\right)^2}+\frac{A-a}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{A-a}{A+a}\right].$$

Ici r est le rayon du cercle de base, A et a sont les génératrices maxima et minima. Comp. question **1034** (**1897**, 76; **1906**, 213).

Quand la génératrice minima est perpendiculaire à la base, on a entre r, A et a la relation

$$4r^2 + a^2 - A^2 = 0.$$

O. Degel (Bayreuth).
[D'après l'allemand. (La Réd.)]

Réponse analogue de M. E.-N. Barisien.

h étant la hauteur du cône, D le diamètre de la circonférence de base, ρ la longueur d'une génératrice, ω l'angle formé par la projection de celle-ci avec le rayon qui aboutit au pied de la génératrice perpendiculaire, $d\theta$ l'angle de deux génératrices infiniment voisines, les équations du problème sont

$$\rho^2 = h^2 + D^2\cos^2\omega,$$
$$\rho^2\, d\theta^2 + d\rho^2 = D^2\, d\omega^2;$$

et l'aire demandée se ramène à la quadrature

$$\int \rho^2 \frac{d\theta}{2} = \frac{D}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{h^2 + D^2\cos^4\omega}\, d\omega.$$

Welsch.

Réponse analogue de M. A. Alayrac.

3562. (1909, 123) (G. Espanet). — *Quadrilatère.* — Les distances d'un point quelconque P du plan aux trois côtés d'un triangle sont liées par une relation linéaire exprimant que la somme algébrique des aires des triangles ayant pour sommet P et pour bases les côtés du triangle donné est égale à l'aire de celui-ci.

Il en résulte que les distances d'un point quelconque P à quatre droites données dans le plan sont liées par une équation linéaire *homogène.*

Quatre droites, dont trois ne passent pas par un même point, forment toujours un quadrilatère *convexe* ABCD, et il est facile de voir qu'on a entre les aires triangulaires de la figure la relation suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} \text{PAB.ACD.BCD} - \text{PBC.BDA.CDA} \\ \quad + \text{PCD.CAB.DAB} - \text{PDA.DBC.ABC} = 0, \end{cases}$$

vraie quelle que soit la position du point P, à la condition que l'on



considère les aires des triangles de sommet P comme positives ou négatives, suivant que ces triangles sont ou non du même côté de leur base que le quadrilatère ABCD.

Si l'on remplace deux côtés opposés AD, BC, AB et CD, se coupant en E du côté de BC, par les diagonales AC, BD, qui se coupent en I, on aura entre les aires des triangles formés avec les côtés du quadrilatère *convexe* BECI la relation homogène

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} PBE.BCI.ECI - PEC.EIB.CIB \\ \quad + PCI.CBE.IBE - PIB.IEC.BEC = 0, \end{array} \right.$$

qui s'applique à toutes les positions de P, grâce à la convention établie pour les signes.

Mais comme d'autre part on a, entre les aires des triangles de sommet P ayant pour bases AB, CD, AC, BD, une relation homogène forcément équivalente à (2) et dont les termes correspondants ont les mêmes signes, on pourra substituer à celle-ci la suivante :

$$(2^{bis})\quad \left\{ \begin{array}{l} PAB.ADC.BDC - PBD.BCA.DCA \\ \quad - PDC.DAB.CAB + PCA.CBD.ABD = 0, \end{array} \right.$$

où les signes apparents sont ceux qui correspondent aux points intérieurs au quadrilatère BECI.

De même, si l'on remplace les côtés AB, CD du quadrilatère ABCD, AD et BC se coupant en F du côté de AB, par les diagonales AC, BD, on obtiendra la relation

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} PBC.BAD.CAD + PCA.CDB.ADB \\ \quad - PAD.ABC.DBC - PDB.DCA.BCA = 0, \end{array} \right.$$

où les signes apparents sont ceux qui conviennent réellement aux points intérieurs au quadrilatère AFBI.

Donc, finalement, lorsque P est compris dans l'un des angles AIB, CID, ses distances aux diagonales AC, BD doivent être considérées comme ayant le même signe dans la relation (2bis) et des signes contraires dans (3); et s'il est compris dans l'un des deux autres angles, ses distances aux mêmes droites seront considérées comme ayant des signes contraires dans (2bis) et le même signe dans (3), ce qui est conforme à l'énoncé.

Il y a du reste lieu de remarquer que les signes à affecter aux distances à AB, CD dans les relations (1) et (2bis), ou à AD, BC dans les relations (1) et (3), sont réglés par une loi analogue.

Plus généralement, étant données six droites (M), (N), (R), (S), (U), (V), les distances d'un point quelconque du plan à (M) et à (N) seront, dans les relations existant entre les distances à (M), (N), (R), (S) et à (M), (N), (U), (V), *en même temps* affectées des mêmes signes ou de signes contraires suivant les positions relatives des quadrilatères convexes formés par ces deux groupes de droites.

WELSCH.

3563. (**1909**, 123) (J. ROSE). — *Notice biographique.* — Claude-François Milliet de Challes, père jésuite, né à Chambéry en 1621, mort à Paris en 1678.

Paris. Bibl. nat., anc. p. f. fr., ms 25304 : *Les elemens d'Euclide expliquez*... par C.-F.-M. de Challes.

Du même auteur : *Cursus mathematicus,* Lugduni, 1690, 4 vol. in-folio.

Jacques AUDIERNE. — *Les Éléments d'Euclide du R. P. Dechalles,* démontrés... par M. Ozanam. Paris, 1746, in-12. — Autres éditions en 1753 et en 1778. — Traduction anglaise annoncée au *Journal des Savants* de mai 1727, en vente depuis peu chez de Combes.

L.-N. Machaut.

Dans le catalogue *Gedenktagebuch für Mathematiker* de Félix Müller (Supplément au Catalogue 101 de B.-G. Teubner à Leipzig), on trouve, page 13, cette indication :

Claude-François Milliet Dechales (Deschales) (né en 1621 à Chambéry), décédé recteur du collège de Turin le 28 mars 1678.

O. DEGEL (Bayreuth).

[D'après l'allemand. (LA RÉD.)]

3565. (**1909**, 124) (A. LERNER). — *Sur Beaugrand.* — Pour différentes indications relatives à la biographie et surtout à la bibliographie de Jean de Beaugrand, il sera indispensable de consulter :

1° La *Correspondance de Descartes* (édition Ch. Adam et P. Tannery), pour la période de 1637 à 1640 (Lettres du P. Mersenne);

2° L'Ouvrage de P. Tannery : *Correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri,* 1893, où sont publiés (p. 36-55) trois pamphlets mathématiques anonymes qui paraissent l'œuvre de Beaugrand. Tous trois sont dirigés contre Descartes.

Voir aussi *B. N.*, *mss. nouv. acq.*, 5161.

Beaugrand a laissé d'autres écrits, notamment :

1° *Annotations à la Logistique de Fr. Viète*, Paris, 1631;
2° *Geostatice, seu de vario pondere gravium*, etc. Paris, 1636.

Cet Ouvrage a été réfuté par Guy de la Brosse (1637) et dans les lettres susmentionnées, où Descartes affecte de désigner Beaugrand du titre ironique de *géoastaticien*, à quoi Beaugrand répliquait de *méthodique impertinent* et de *plagiaire*.

Parmi d'autres pièces, je signalerai :

1° Un fragment de Desargues, rapporté par Beaugrand (*Corresp. de Descartes*, t. II, p. 556 et 649-650);

2° Une lettre de Beaugrand au P. Mersenne (t. V, p. 504-512), sans date, mais vraisemblablement d'avril 1638;

3° Un factum de Beaugrand contre Desargues (1640);

4° Diverses mentions de Beaugrand dans des lettres de Cavalieri, du P. Mersenne, de Roberval, et dans l'*Historia Cyclœidis* de Jean Groningue (Hamburgi, 1701);

5° Des lettres de 1638 à Galilée, où il adressait des démonstrations sur la trochoïde (ou cycloïde) et sur la méthode *de maximis et minimis* de Fermat.

Beaugrand a été en relations suivies avec d'autres mathématiciens, mais il n'en reste pas de traces.

Je me borne à ces indications sommaires sur lesquelles je pourrai revenir avec plus de détail s'il est nécessaire.

Le décès de Beaugrand paraît survenu à la fin de l'année 1640.

Dr Charbonier.

QUESTIONS.

3632. [M'5] M. Raffy a donné le nom de *paraboles semi-cubiques obliques* aux cubiques cuspidales qui admettent la droite de l'infini pour tangente d'inflexion. On sait qu'en coordonnées obliques leur équation peut s'écrire

$$x^3 - \mu y^2 = 0.$$

Ces courbes, qui comprennent la développée de parabole, ont-elles été étudiées particulièrement? Quelles propriétés en connaît-on en dehors des suivantes, qui sont presque évidentes?

La polaire réciproque d'une parabole semi-cubique oblique par rapport à un cercle ayant pour centre le rebroussement est une parabole semi-cubique oblique.

La polaire réciproque d'une parabole semi-cubique oblique par rapport à un cercle ayant pour centre le foyer est une cissoïde oblique. T. Lemoyne.

3633. [L'15] On trouve que le lieu des points équidistants d'une ellipse E et d'un point fixe P est une sextique. Lorsque le point P est soit un sommet, soit un foyer, la sextique se réduit à une quartique, et l'on calcule aisément son aire. Or, dans le cas général, la sextique étant unicursale, on doit pouvoir calculer aussi son aire. C'est un résultat auquel je n'ai pu parvenir et que je désire connaître.

Crut.

3634. [I2α] La formule $N_q = (q2^q + 1)$ proposée par

le Rév. J. Cullen, S. J., donne une très longue série de nombres composés : tous les N_q sont nombres composés jusqu'à $q = 200$, excepté $N_0 = 1$, $N_1 = 3$, et peut-être N_{141}. Cette série a été vérifiée par le soussigné et par le Rév. J. Cullen jusqu'à $q = 200$. (Voir *Educational Times Reprint*, new ser., t. X, 1906, Q. 15897.) Pourrait-on vérifier N_{141} qui a échappé à nos recherches?

A. Cunningham (Londres).

3635. [J2] La formule des annuités constantes est

$$a = Ai + \frac{Ai}{(1+i)^n - 1};$$

on suppose n constant. La dérivée première prise par rapport à i est alors

$$\frac{A(1+i)^n\left[(1+i)^n - 1 - \dfrac{ni}{(1+i)}\right]}{[(1+i)^n - 1]^2}.$$

Elle est toujours positive pour toutes les valeurs du taux i. Je désirerais savoir si la dérivée seconde de a est aussi toujours positive pour toutes les valeurs du taux i.

A. Moiroux.

3636. [J2] Existe-t-il une formule générale permettant de calculer facilement les quatre quantités ordinaires d'un emprunt a, A, n, i dans l'hypothèse suivante :

Les intérêts étant payables K fois par période, il y a, dans cette même période K′ tirages d'amortissement dont quelques-uns comprennent des lots. On a $K' > K$, et certaines dates de tirages peuvent coïncider ou non avec celles du paiement des intérêts. Tels sont les emprunts ordinaires de valeurs à lots : obligations Ville de Paris, Crédit Foncier, etc. Dans quels Ouvrages peut-on rencontrer de nombreux développements sur ces questions?

A. Moiroux.

3637. [**L'15**] L'une des tangentes menées d'un point P à l'ellipse est égale à l'une des normales de l'ellipse, issues de P; lieu du point P?

Soient T le point de contact de la tangente, N le pied de la normale; la tangente en N et la normale en T déterminent un second point P' du lieu; enveloppes de la droite PP' et de la droite TN?

G. Espanet.

3638. [**L'17**] On considère, dans un même plan (pour plus de simplicité), deux ellipses ayant un foyer commun, et sur chacune d'elles un point mobile; ces points mobiles obéissent *rigoureusement* aux lois de Képler; on construit une courbe ayant pour abscisses les temps et pour ordonnées la distance des mobiles. Quelle est l'équation de cette courbe? A-t-elle été étudiée?

A. Boutin.

3639. [**I19a**] L'identité

$$1+(ab^2+a+b)^2=(2ab+1)^2+(ab^2-a+b)^2,$$

où a, b sont entiers, positifs ou négatifs; donnera-t-elle *toutes* les solutions en nombres entiers de

$$1+x^2=y^2+z^2.$$

A. Boutin.

1291. [**V8**] (**1898**, 124) Dans un écrit, *De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet, M. S. Academiæ* [*Petropolinæ*] *exhibit, die* 5 *maii* 1777, Euler dit : « Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud præstandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii=-1$, ideoque $\frac{1}{i}=-i$. » Y a-t-il un autre exemple, avant celui-là, de l'emploi de i pour $\sqrt{-1}$?

W.-W. Beman (Ann Arbor, Michigan).

1292. [I10] (1898, 124) On demande de combien de manières les partitions du nombre n en somme de huit nombres, parmi lesquels peuvent figurer des zéros, peuvent être disposées de la manière que voici :

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, \end{matrix}$$

deux solutions n'étant pas considérées comme distinctes si elles peuvent se ramener l'une à l'autre par une permutation soit des deux lignes, soit des quatre colonnes.

Combien, parmi ces solutions, y en a-t-il qui ne soient composées qu'avec les nombres 2, 1 et 0, lorsque $n < 16$?

M. D'OCAGNE.

1294. [L²20b] (1898, 124) Calculer le volume commun à une sphère de rayon r et à un ellipsoïde concentriques ayant pour demi-axes a, b, c. On suppose $a > b > c$ et $a > r > c$.

Hadé.

1300. [V(M¹, M²)] (1898, 126) A propos de l'intéressant petit Volume de Lamé, intitulé : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*, Chasles, dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, dit :

« C'est dans cet Ouvrage que se trouve l'équation $A + \lambda B = 0$ d'un système de courbes ou de surfaces ayant une communauté d'intersection deux à deux. »

Il reste à chercher le nom du géomètre qui, le premier, a fait usage d'une pareille équation.

MANNHEIM.

1302. [M¹1cα] (1898, 147) Les neuf points d'inflexion de la courbe générale du troisième degré sont trois à trois en ligne droite et il y en a six d'imaginaires.

Plus généralement, y a-t-il des courbes algébriques, même

particulières, de degré $m \geqq 4$, ayant au moins $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ points d'inflexion sur une même courbe de degré n, ou un certain nombre de points d'inflexion *imaginaires?*

Même question pour d'autres points remarquables, les points doubles par exemple.

Quels sont les principaux travaux publiés sur ces questions? Ed. Maillet.

1303. **[M¹1a]** (**1898**, 147) Indiquer les principaux travaux relatifs à la question suivante : Nombre de points *réels* de rencontre d'une droite réelle, d'une conique, d'une courbe algébrique de degré m avec une courbe algébrique de degré n. Ed. Maillet.

1305. **[I23a]** (**1898**, 148) L'étude des grands nombres ou, si l'on veut, des fractions décimales illimitées, paraît bien délaissée. Il me semble cependant qu'elle pourrait fournir des résultats intéressants.

Pour en donner un aperçu, soit proposé de trouver la fraction génératrice du nombre illimité, écrit dans le système B,

$$(1) \qquad N = \frac{a}{B^\alpha} + \frac{b}{B^{2\alpha}} + \frac{c}{B^{3\alpha}} + \frac{d}{B^{4\alpha}} + \ldots.$$

Si les quantités $a, b, c, d, \ldots$ sont liées par les relations

$$\begin{aligned} b &= a + \delta_1, \\ c &= a + 2\delta_1 + \delta_2, \\ d &= a + 3\delta_1 + 3\delta_2 + \delta_3, \\ e &= a + 4\delta_1 + 6\delta_2 + 4\delta_3 + \delta_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on aura

$$(2) \quad N = \frac{a}{B^\alpha - 1} + \frac{\delta_1}{(B^\alpha - 1)^2} + \frac{\delta_2}{(B^\alpha - 1)^3} + \ldots + \frac{\delta_{n-1}}{(B^\alpha - 1)^n},$$

les différences $\delta_n, \delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \ldots$ étant égales à zéro.

Si

$$b = aq, \qquad c = aq^2, \qquad d = aq^3, \qquad \ldots,$$

on aura

$$N = \frac{a}{B^{\alpha} - q}.$$

Ces formules ont-elles été publiées?

F. Delastelle.

1312. [S2a] (1898, 150) Un fluide indéfini se mouvant avec la vitesse V rencontre une *surface plane immobile* S dont la normale fait avec la direction de V un angle aigu α.

Dans ces conditions, certains auteurs trouvent pour expression de la composante normale à S

$$KV^2 \cos^2\alpha;$$

d'autres indiquent

$$KV^2 \cos\alpha.$$

Laquelle de ces deux valeurs faut-il admettre?

A.-P. Ericsson.

1322. [C1g] (1898, 172) *Contredérivées successives.* — Si, après avoir rendu homogène une fonction algébrique entière à une inconue, on la dérive n fois de suite par rapport à la lètre d'homogénéité qu'on fait ensuite égale à l'unité, on obtient de nouvèles fonctions qu'on peut appeler *contredérivées* première, deuxième, ..., $n^{\text{ième}}$. Èles sont en corélation complète avec les dérivées correspondantes et èles ont des propriétés analogues pour les racines égales, pour les limites ou les séparations des racines, *à condition* de faire *varier l'inconnue de* o *à* o par valeurs continues d'abord négatives, ensuite positives ($\mp\infty$ étant considéré comme une seule et même quantité).

Cète corélation a-t-èle été déjà signalée en dehors de la recherche des limites des racines par l'équation aus inverses? L'a-t-on déjà remarquée, en particulier, pour le téorème de Sturm?

Hoffbauer.



RÉPONSES.

953. (**1897**, 2) (H. Tarry). — *Nombres dont les puissances ne contiennent pas les chiffres* 0, 1, 2, 3, 4 (**1900**, 129). — On trouve encore

$$1786^3 = 5696975656$$

pour les cubes. A. Gérardin.

1163. (**1897**, 242; **1908**, 145) (E. Lemoine). — (**1908**, 277; **1909**, 10, 31). — Autre réponse de M. J. G. Alvarez Ude, communiquée à M. E. Lemoine. La Rédaction.

1645. (**1899**, 221) (Berdellé). — (*Origine des mots milliard et billion*) (**1900**, 248). — Je tiens la Notice publiée par le prince Boncompagni en 1868 dans le *B. Bon.* à la disposition de M. Berdellé, car elle représente plusieurs pages de *I. M.*

Voir aussi 1849 (**1900**, 160; **1901**, 179, 234; **1902**, 74).

A. Gérardin.

1906. (**1900**, 268) (G. Eneström). — *Au sujet de Sacro Bosco* (**1901**, 199, 263; **1902**, 276; **1903**, 16, 82, 261). — *Voir* aussi 1987 (**1900**, 404).

A signaler dans le *Répertoire des livres d'occasion de la librairie Lucien Dorbon*, le n° 8811 : Clavius Christ. Bambergensis ex Societate Jesu, de Sacrobosco Commentarius, Romæ, 1581, in-4°.

A. Gérardin.

2379. (**1902**, 171) (E.-B. Escott). — *Problème des bœufs d'Archimède* (**1902**, 327; **1903**, 57). — Consulter *N. A.*, 1855, p. 113 (du *Bulletin*), 130, 195; 1856, 39.

Histoire des Mathématiques, par W.-W. Rouse Ball, trad. Freund, p. 76.

Récréations mathématiques, trad. Fitz Patrick, p. 133 (1re Partie).
A. GÉRARDIN.

2408. (**1902**, 206) (BROCA). — *Carré différence de deux cubes consécutifs* (**1902**, 329; **1903**, 133). — *Voir* aussi **2228** (**1902**, 185) la solution de M. *Majol.*
A. GÉRARDIN.

2855. (**1904**, 285) (E. MAILLET). — *Erreurs de Mathématiciens* (**1905**, 275; **1906**, 65, 110, 150, 200, 248; **1907**, 31, 275; **1908**, 60, 230). — C.-N. de Winsheim, dans son Traité *De numeris perfectis* (*Novi Comm. Petrop.*, t. II, 1751), donne comme premiers (p. 76 s.) les nombres $2^n - 1$ où $n = 39, 41, 43, 47, 53, 59, 67, 73, 79$.

Euler (*Comment. Arith. Coll.*, t. I, p. 2) donne $2^n - 1$ premier pour $n = 41, 47$ (26 septembre 1732); (p. 368), $1234^2 + 1 = 421 \times 3179$, donné par Euler comme premier.

Dans une Note de A. GENOCCHI (*B. Bon.*, 1884, p. 248), intitulée *Teoremi di Sofia Germain intorno ai residui biquadratici*, on peut lire: La congruenza $20^4 \equiv 2 \pmod{113}$, con la quale il Gauss volera provare che 2 è residuo biquadratico di 113, é inesatta.

Legendre écrivait à Sophie Germain (fin 1810) : « Lorsque Mlle Sophie a voulu considérer le cas général, elle est, ce me semble, tombée dans la même erreur qu'Euler, en faisant $\sin \lambda\omega = 0$. Cette solution est illusoire ; elle résulte d'un facteur donné mal à propos à l'équation, et elle aurait, comme dans le cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, l'inconvénient de rendre infinis les coefficients $\gamma, \gamma', \delta', \ldots$ de la courbe (Voir *Investigatio motuum quibus laminæ et virgæ elasticæ contremiscunt*, dans les *Acta Acad. Sci. Imp. Petrop.*, 1779, t. I, p. 103 s.).... Euler, dans cette analyse, trouve $\gamma' = -\gamma$; c'est une erreur manifeste et l'on a évidemment $\gamma = \gamma'$ (Du même, 19 janvier 1811).

Voir *B. Bon.* (1884, p. 315) une Note de Réalis intitulée *Intorno ad una propositione inesatta di Sofia Germain.*
A. GÉRARDIN.

3202. (**1907**, 98) (*Arcitenens*). — *Nombres formés de chiffres* **1**

(**1907**, 250). — Nous avons publié (*S. Œ.*, octobre 1908, p. 104) le Tableau des facteurs des nombres formés de n chiffres 1, jusqu'à $n = 100$. A. GÉRARDIN.

3330. (**1908**, 28) (HAZARD). — *Tables de racines primitives et d'indices* (**1908**, 157). — Nous avons publié (*S. Œ.*, octobre 1908, p. 107), d'après Desmarest et Burckhardt, le Tableau des nombres, inférieurs à 10000, admettant 10 pour racine primitive.

A. GÉRARDIN.

3399. (**1908**, 123) (G. LEMAIRE). — *Lignes trigonométriques.* (**1909**, 156). — J'ai dit (*loc. cit.*) que les nombres proposés ont été obtenus depuis longtemps. J'en rencontre la preuve particulièrement topique dans un article de Lalande (*J. des Sav.*, septembre 1771), *Lettre sur des Tables de sinus extrêmement rares.*

L'auteur rappelle que Pitiscus retrouva chez Jacques Christmann les manuscrits de Rheticus, contenant, entre autres, une Table des sinus de dix en dix secondes pour un rayon de 16 chiffres. De retour à Heidelberg, Pitiscus mit en ordre la Table de Rheticus et la publia en 1613.

Je crois qu'on pourra aussi tirer quelque profit des remarques et indications de deux articles de J.-H. Vincent (*N. A.*, 1842, p. 272-277) et de Finck (p. 353-355). *E. Liminon.*

3402. (**1908**, 124) (MATHIEU). — *Identité* (**1908**, 215). — Autre réponse de M. Barisien, transmise à M. Mathieu.

LA RÉDACTION.

3479. (**1908**, 274) (W. GAEDECKE). — *Surface définie par une propriété de ses normales* (**1909**, 90). — Autre réponse de M. F. Michel, analogue aux réponses déjà publiées.

LA RÉDACTION.

3505. (**1909**, 6) (NESTER). — *Aire d'une courbe* (**1909**, 163). — Autre réponse de M. Welsch, analogue à celles déjà parues.

LA RÉDACTION.

3506. (**1909**, 6) (T. HAYASHI). — *Équation indéterminée* (**1909**, 164). — u étant arbitraire, x et λ tels que

$$\lambda x = P^2 - u^2 \qquad [\lambda - x \equiv 2u \pmod 4)],$$

la *solution générale* est donnée par les formules

$$y = \frac{x - \lambda + 2u}{4},$$

$$z = \frac{x - \lambda - 2u}{4}.$$

WELSCH.

3532. (**1909**. 52) (T. LEMOYNE). — *Courbes anharmoniques* (**1909**, 191). — Un grand nombre de propriétés des courbes anharmoniques se trouvent démontrées ou simplement énoncées dans les Mémoires suivants :

KLEIN et S. LIE, *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces* (*Comptes rendus*, t. LXX, 1870, p. 1222 et 1275).

G. FOURET, *Sur quelques propriétés des systèmes de courbes* $\mu = 1$, $\nu = 1$ (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, 1874, p. 1693).

G. FOURET, *Intégration géométrique de l'équation*

$$L(x\,dy - y\,dx) - M\,dy + N\,dx = 0,$$

dans laquelle L, M, N *désignent des fonctions linéaires de* x *et* y (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, 1874, p. 1837).

G. FOURET, *Construction du rayon de courbure des courbes triangulaires symétriques, des courbes planes anharmoniques et des lignes asymptotiques de la surface de Steiner* (*Comptes rendus*, t. CX, 1890, p. 778).

Halphen, au Tome III des *Acta mathematica*, M. Ch. Bioche (*S. M.*, 1905, p. 25) ont également étudié ces courbes.

T. LEMOYNE.

3561. (**1909**, 123) (G. LORIA). — *Courbes avec un point de rebroussement de la deuxième espèce*. — J'en connais une donnée par M. P.-H. Schoute dans le Mémoire *Sur la construction de courbes unicursales, etc.* (*Arch. néerl.*, t. XX, 1885, p. 41 de l'extrait). C'est une quartique, fermée au fini, douée de deux points de rebroussement, dont l'un est de la première, l'autre de la deuxième espèce. Sa construction peut être exprimée ainsi :

Soient un carré ABCD et la circonférence inscrite K. Par un point quelconque P′ de K on mène une droite parallèle à BC qui rencontre la diagonale BD en E. Les droites AE et BP′ déterminent alors un point P de la courbe. H. WIELEITNER (Spire).

On obtient des courbes dont la génération géométrique est assez simple et qui ont des rebroussements de la deuxième espèce réels et non situés à l'infini en faisant subir une semi-inversion trilinéaire à des courbes ayant pour tangente simple la droite qui joint le pôle d'inversion et le point double de la conique d'inversion.

Considérons une inversion d'Hirst dont la conique K^2 des points unis (doubles) est formée par les droites m, n, non coïncidentes : posons $(m, n) \equiv V$; soit O le pôle (avec lequel sont alignés les couples PP′ de points correspondants, séparés harmoniquement par m, n) et appelons o la polaire de O par rapport à K^2. Les inverses des droites du plan forment le réseau des coniques passant par O et tangentes à la droite o au point V; une courbe C de l'ordre n, générale en son ordre et placée en situation générale par rapport aux éléments fondamentaux, a pour inverse une courbe C′ de l'ordre $2n$ et de la classe $n(n+1)$, ayant un point n-uple en O et touchant o avec n branches au point V; les tangentes à deux courbes inverses aux points correspondants P, P′ vont se couper sur la polaire, par rapport à K^2, du conjugué harmonique de O par rapport à P et P′; les tangentes à C′ en O passent par les points où C va couper o; chaque contact simple de C avec o donne lieu sur C′ à une coïncidence parmi les tangentes en O, etc. Cela posé, l'inverse d'une conique C^2 est en général une courbe unicursale du quatrième ordre ayant en O un point double et un tacnode au point V, avec o pour tangente; mais, si C^2 est tangente à la droite $|OV|$, V est un rebroussement de la deuxième espèce et o la tangente en ce point.

Si l'on prend pour K^2 le cercle-point ayant V pour centre, P et P′ *sont alignés avec* O *et l'angle* $\widehat{PVP'}$ *est droit.* Les formules de la transformation (O origine des coordonnées rectangulaires, $|OV|$ axe des y et $\overline{OV} = 1$) sont évidemment

$$x' : y' : 1 = x(y-1) : y(y-1) : x^2+y^2-y;$$

l'inverse du cercle

$$(1) \qquad x^2+y^2-2(\alpha y + rx)+\alpha^2 = 0$$

est la quartique unicursale circulaire

$$(x^2+y^2)[\alpha^2x^2-2rxy+(1-\alpha)^2y^2]-2(1-\alpha)^2y(x^2+y^2)$$
$$+2(rx^3+2rxy^2+\alpha y^3)+x^2-2rxy+(1+\alpha)^2y^2=0,$$

ou bien, transportant les axes parallèlement en V,

$$(x^2+y^2)[\alpha^2x^2-2rxy+(1-\alpha)^2y^2]$$
$$-2y[\alpha(1-\alpha)x^2+rxy-(1-\alpha^2)y^2]+(1-\alpha)^2y^2=0,$$

et V, si $\alpha \neq 1$, est un rebroussement de la deuxième espèce. Lorsque $\alpha = 1$, la courbe se décompose en la droite |OV| et la cissoïde

$$(x^2+y^2)(x-2ry)-2ry^2=0.$$

La figure 1 représente la quartique lorsque O est un nœud et que

Fig. 1.

manquent les branches infinies; si la courbe a deux points réels à l'infini et si O est un nœud, elle prend la forme indiquée dans la figure 2.

Si le pôle O d'inversion est à l'infini, les rayons qui unissent deux points correspondants sont parallèles à |VO| et l'angle $\widehat{PVP'}$ est droit. Prenant V pour origine des coordonnées rectangulaires et |VO| pour axe des x, les formules de cette semi-inversion sont

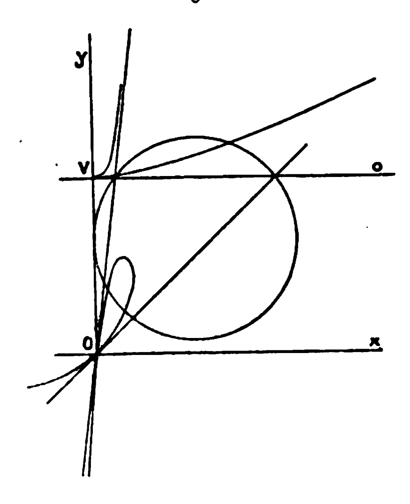
$$x' : y' : 1 = y^2 : xy : x;$$

au cercle

$$x^2 + y^2 - 2r(x+y) + r^2 = 0,$$

tangent aux axes, correspond la quartique circulaire, unicursale,

Fig. 2.

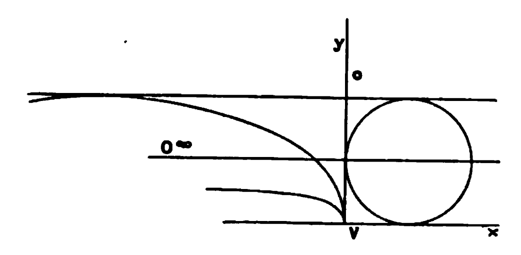


de la quatrième classe (*fig.* 3),

$$y^2(x^2+y^2) - 2rxy(x+y) + r^2x^2 = 0,$$

ayant un rebroussement de la deuxième espèce à l'origine et un de

Fig. 3.



la première espèce à l'infini avec la tangente $y = r$. Si le cercle touche |VO| à l'origine, son inverse se décompose en la droite $y = 0$

et la cissoïde droite

$$y(x^2+y^2)-2rx^2=0.$$

L'inverse du cercle $x^2+y^2=1$ est le *cappa*

$$y^2(x^2+y^2)=x^2.$$

Si K^2 est formée par deux droites rectangulaires et O est sur une des bissectrices, nous avons

$$x':y':1=x(1-y):y(1-y):x^2-y^2+y$$

et *l'angle* $\widehat{PVP'}$ *est bissecté par les droites m, n.* L'inverse du cercle (1) est ($\alpha \neq 1$) la quartique unicursale

$$(x^2+y^2)(y-1)^2$$
$$+2(rx+\alpha y)(x^2-y^2+y)(y-1)+\alpha^2(x^2-y^2+y)^2=0$$

ayant un rebroussement de la deuxième espèce au point V (*fig.* 4), O est point double isolé.

On obtient des quartiques rationnelles ayant un rebroussement de

Fig. 4.

la deuxième espèce à l'infini par l'inversion

$$x':y':1=x(2-x):y(2-x):x.$$

Maintenant la droite *n* est à l'infini; la distance de O à la droite *m* est 1 (O est l'origine et l'axe des *x* est normale à *m*); le segment qui joint deux points correspondants est bissecté par *m*. L'inverse du

cercle (1) est la quartique

$$(x^2+y^2)(\alpha-x)^2-2(rx+\alpha y)(2-x)x+\alpha^2x^2=0$$

ayant ($\alpha \neq 0$, $r \neq 1$) un point double ordinaire en O et un rebroussement de la deuxième espèce à l'infini sur l'axe des y. Si $\alpha = 0$ et $r = 1$, elle se décompose en la droite $x = 2$, polaire de O par rapport à K^2, et la cissoïde droite

$$x(x^2+y^2)-2y^2=0.$$

Pour donner aussi des exemples simples de courbes non unicursales ayant des rebroussements de la deuxième espèce, considérons la transformation double définie par les formules

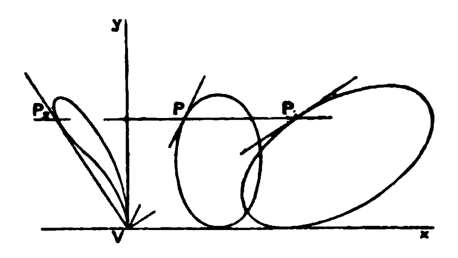
$$x' : y' : 1 = x+\sqrt{x^2+y^2} : y : 1,$$

dont les inverses sont

$$x : y : 1 = x'^2-y'^2 : 2x'y' : 2x';$$

la conique double et celle limite coïncident en un même cercle-point V placé à l'origine; le couple P_1P_2 des points (*conjoints*), correspondant à un même point P(x, y) du plan double, est aligné avec P sur une parallèle à l'axe des x; P est le milieu du segment $\overline{P_1P_2}$ et l'angle $\widehat{P_1VP_2}$ est droit. L'ellipse

Fig. 5.



$$b^2(x-\lambda)^2+a^2y(y-2b)=0$$

est représentée sur le plan simple par la quartique (*fig.* 5)

$$b^2(x^2-y^2)^2+4a^2x^2y^2-4bx[\lambda b(x^2-y^2)+2a^2xy]+4\lambda^2b^2x^2=0$$

qui est du genre *un* et a un rebroussement de la deuxième espèce à l'origine (si $\lambda \neq 0$). V. Retali (Milan).

3566. (**1909**, 124) (A. Lerner). — *Ouvrage de Montmort.* — *L'Histoire de la Géométrie,* de Pierre Rémond de Montmort, n'a jamais paru et le manuscrit en a été perdu.

Voir J.-M. Quérard, *La France littéraire,* t. VI, Paris, F. Didot, 1834.

Dans son éloge de Montmort, Fontenelle a consacré un important paragraphe au projet d'Histoire de la Géométrie, à laquelle il travaillait quand il fut, le 7 octobre 1719, victime de la petite vérole qui faisait alors beaucoup de ravages.

« M. de Montmort étoit assez intelligent et assez laborieux pour la première partie de son Ouvrage (l'*Histoire de la Géométrie ancienne*), assez instruit et assez équitable pour la seconde (l'*Histoire de la Géométrie moderne depuis Descartes*). Il n'étoit pas encore fort avancé. Puisse-t-il avoir un digne successeur ! »

Cette réflexion de Fontenelle fait pressentir, comme on le voit, que l'Ouvrage demeura inachevé. Le témoignage de Quérard ne laisse malheureusement plus aucun doute, et l'on peut regretter, avec lui, la perte de ce précieux travail; mais, depuis cette époque et de nos jours, ont paru des Ouvrages de haute valeur sur l'histoire de la Géométrie, et particulièrement de la Géométrie ancienne. H. Brocard.

3567. (**1909**, 124) (A. Lerner). — *Ouvrage de Laloubère.* — Une réponse immédiate est fournie par un passage du Tome I des Œuvres de Fermat, édition Ch. Henry et P. Tannery.

Le morceau publié p. 199-210, intitulé : *Ad Laloveram propositiones,* figure comme *Pars prior* de l'*Appendix secunda*, p. 391 à 395, dans l'Ouvrage *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libris*, *et in duabus adjectis Appendicibus*, *Autore Antonio Lalovera Societatis Jesu Tolosæ*, *apud Arnaldum Colomerium. Regis et Academiæ Tolosanæ Typographum.* M.DC.LX. *Cum privilegio.*

Le second Appendice est intitulé : *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica*, p. 211-254.

Tous deux sont traduits au Tome III, p. 172-180 et 181 à 203 et 215.

Dans son *Historia Cycloeidis* (Hamburgi, 1701) Jean Groninge a cité Lalouvère (p. 55 et 56) : « Sic veritati, nec gratiæ litare voluit Doctissimus *P. Lalovera,* natione Gallus, qui in Libro, quem anno 1651, Tolosæ *de Elementis Tetragonismicis* edidit, nec non in tractatu *de Cycloide* anno 1660, publicato, demonstrationem vel dimensionem Spatii Cycloeidalis Torricellio acceptum refert, ut a quo primum divulgata. » *L.-N. Machaut.*

3569. (**1909**, 145) (*Forte*). — *Polynomes.* — Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une variable. D'après

$$A(A+1) = 2B^3,$$

et puisque A et $A+1$ sont des polynomes premiers entre eux, l'ordre de multiplicité de chaque racine de A et de $A+1$ est multiple de 3. Donc

$$A = C^3, \quad A+1 = D^3, \quad 1 = D^3 - C^3 = (D-C)(D^2+DC+C^2).$$

Ces deux facteurs de 1 ne peuvent être que constants.

On en tire pour C et D des valeurs constantes. Donc A et B sont constants.

Le même raisonnement appliqué à $X(X^2+2)$ montre que X est constant. On en conclut

$$(Y+iZ)(Y-iZ) = \text{const.}$$

Donc $Y+iZ$ et $Y-iZ$ et par conséquent Y et Z sont constants.

S'il y a plusieurs variables x, y, ..., on considère y, ... comme constantes et ce qui précède montre que les polynomes ne dépendent pas de x. Le raisonnement appliqué de proche en proche montre que les deux identités n'ont lieu qu'entre constantes.

E. Dubouis.

La première partie de la question, qui se ramène à trouver un triangulaire qui soit aussi un cube, est impossible. Voici ce que dit Legendre (*Th. des N.*, t. II, p. 11) :

« Car supposons qu'on ait

$$\frac{A(A+1)}{2} = B^3$$



ou

$$A(A+1)=2B^3,$$

si l'on fait

$$B=mn,$$

m et *n* étant deux nombres premiers entre eux; cette équation ne pourra se décomposer que de l'une des deux manières

$$(1)\qquad \begin{cases} A+1=2m^3, \\ A=n^3, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} A+1=n^3, \\ A=2m^3, \end{cases}$$

lesquelles donnent

$$n^3 \pm 1 = 2m^3;$$

mais, suivant le théorème précédent [$x^3+y^3=Az^3$, impossible pour $A=1, 2, 4, \ldots$], cette équation ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait $n=1$; donc, excepté les cas de $A=0$ et $A=1$, il ne peut y avoir aucun triangulaire égal à un cube.

» L'équation

$$\frac{A(A+1)}{2}=B^3$$

peut être mise sous la forme

$$8B^3+1=z^2,$$

ou encore

$$(2B)^3+1=(2A+1)^2;$$

donc celle-ci n'est possible que pour les seuls cas $B=0$ et $B=1$. »

Voir aussi *I. M.*, **925**, **1909**, 176.

Le P. Th. Pépin, dans son Mémoire *Sur l'équation indéterminée*

$$x^3+y^3=Az^3$$

(*M. A. L. R.*, 20 février 1881), indique les théorèmes suivants :

Le double d'un nombre triangulaire est la somme de deux cubes rationnels.

Tout nombre composé de deux facteurs, dont la somme ou la différence est un cube, se décompose en une somme de deux cubes rationnels.

La deuxième partie de la question montre que Y et Z sont tous

deux des multiples de 3. Le nombre X peut avoir les trois formes $9a + 0, 4, 5$. Citons la solution

$$X = 4, \qquad Y = Z = 3.$$

A. Gérardin.

3570. (**1909**, 145) (*Forte*). — *Somme de cinquièmes puissances.* — La somme des puissances cinquièmes des n premiers nombres impairs a pour expression

$$\sum_1^n (2n-1)^5 = \frac{n^2}{3}(16n^4 - 20n^2 + 7).$$

Pour qu'elle soit un carré, on est amené à résoudre l'équation

$$16n^4 - 20n^2 + 7 = 3u^2,$$

dont le discriminant $48u^2 - 12$ devra être un carré $36y^2$. On aura ainsi

$$4u^2 - 1 = 3y^2$$

ou

$$x^2 - 3y^2 = 1,$$

en prenant $x = 2u$.

Cette équation admet pour solutions

$$x = 1, 2, 7, 26, 97, 362, \ldots,$$
$$y = 0, 1, 4, 15, 56, 209, \ldots,$$

avec la relation de récurrence

$$t_{n+1} = 4t_n - t_{n-1}.$$

On aura donc

$$n^2 = \frac{6y+10}{16}$$

avec y impair (correspondant à x pair).

$10 + 6y$ sera un carré $16n^2$ pour $y = 1$, d'où $n = 1$, solution immédiate, mais illusoire et triviale.

Je n'ai pas trouvé d'autre solution, et j'ignore si, pour en avoir provoqué la recherche, Ed. Lucas y était parvenu. *Recta.*

3571. (**1909**, 145) (E.-N. Barisien). — *Courbes ayant des rebroussements de la deuxième espèce.* — La singularité résultant

de la réunion d'un nœud et d'un rebroussement (rebroussement nodal) est identique avec celle appelée aussi *rebroussement de la deuxième espèce* et *rebroussement ramphoïdal*. Ma réponse à la question **3561** (*voir* ci-dessus, **1909**, 274) de M. G. Loria est donc valable aussi pour celle-ci. On peut ajouter au surplus que la construction, par les méthodes usuelles de la Géométrie descriptive, des sections planes et des lignes isophotes du conoïde droit et oblique du quatrième degré fournit aussi des exemples de quartiques qui possèdent la singularité indiquée. Ces constructions sont néanmoins bien moins simples que celles que j'ai fait connaître dans ma réponse à **3561**.

V. Retali (Milan).

Eu égard exclusivement à la forme graphique, j'estime que la réponse immédiate à cette question est fournie par quelques courbes bien connues, telles que :

1° Le folium double (*voir* notamment *J. S.*, 1896, p. 73; *N. A.*, 1909, p. 326);

2° La rosace à 4 feuilles;

3° Les rosaces à $4n$ feuilles.

Je suis amené à y ajouter :

4° La courbe

$$\rho = a\,\frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \omega)}{\operatorname{tang}^2\omega};$$

5° La courbe

$$\rho = a\,\frac{1 + \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\omega};$$

6° La courbe

$$x^4 + x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = 0$$

que j'ai rencontrée dans l'ancien recueil de Frenet;

7° La courbe

$$a^2y^2 - 2abx^2y - x^5 = 0$$

(*Ibid.*);

8° Certaines variétés de courbes à aiguillage [*I. M.*, question **1085** (**1897**, 145; **1897**, 258; **1898**, 107, 183];

9° Certaines courbes à dédoublement (*M.*, 1883, p. 193-196, et 1884, p. 164, P. Mansion);

10° Certaines variétés de courbes mécaniques décrites dans le mouvement d'une bielle; *voir* un Mémoire de M. Ruiz Castizo, 1889; G. Loria, *Spezielle Curven*, p. 179, et G. Teixeira, *Traité des*

courbes spéciales remarquables, t. I, 1908, p. 306-310 :

$$y = \pm \sqrt{x}\left[\sqrt{c-ax} \pm \sqrt{d-bx}\right];$$

11° La courbe

$$a^6y^2 + b^2x^6 - a^2b^2x^4 = 0$$

(G. Loria, *Ibid.*, p. 698);

12° Les podaires de certaines courbes douées d'inflexions. *Voir*, par exemple, *M.*, 1888, p. 167-169.

Note. — Plusieurs des courbes ici désignées me semblent pouvoir convenir aussi bien à la question 3561 (**1909**, 123).

Une recherche analogue a été visée par *Elgé* [G. de Longchamps] dans un article du *J. S.* intitulé : *Sur la méthode de Puiseux; un point paradoxal* (1897, p. 109-111).

L'auteur discute la quintique

$$(y-x)^2 + x^2y(y-x) - x^5 = 0$$

et y reconnaît un point de rebroussement ayant même tangente qu'une autre branche de courbe. M. Pellet a fourni (p. 133) un éclaircissement à ce sujet. *Vieujeu.*

3572. (**1909**, 145) (Barisien). — *Enveloppe des cercles de courbure.* — La ligne des centres de deux cercles osculateurs infiniment voisins tendant vers la normale; il en résulte que la corde commune à ces deux cercles tend vers la perpendiculaire menée du point A de la courbe sur la normale, c'est-à-dire vers la tangente en A. Le point A est donc le seul point caractéristique sur le cercle osculateur, ce qui démontre la propriété. E. Dubouis.

L'enveloppe d'une courbe qui se déplace dans son plan suivant certaines conditions, et en particulier pouvant se déformer progressivement, étant par définition le lieu des intersections de cette courbe dans deux positions infiniment voisines, l'enveloppe des cercles de courbure d'une courbe quelconque ne se compose que de la courbe elle-même et des points cycliques à l'infini, qui, ainsi que les deux points confondus sur celle-ci, appartiennent à deux cercles de courbure successifs. Welsch.

Autre réponse de M. G. Loria (Gênes) où la question est traitée par le calcul; elle a été transmise à M. Barisien.

3573. (1909, 145) (Paulmier). — *Expression égale à un carré.* — Le développement de

$$\frac{(1+\sqrt{-1})^{4n}+(1-\sqrt{-1})^{4n}}{2}$$

étant

$$\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p C_{4n}^{2p},$$

et $(1\pm\sqrt{-1})^4$ étant égal à -4, l'expression donnée a pour valeur

$$4^n=(2^n)^2;$$

c'est le carré d'une puissance de 2. Welsch.

Réponses analogues de MM. E. Dubouis et V. Vâlcovici (Gœttingue).

Voir *N. A.*, 1860 et 1861, les articles suivants :

F.-A. Beynac, *Questions d'examen de l'École Polytechnique en* 1860 [*Somme des coefficients, pris de* 4 *en* 4, *dans le développement de* $(x+a)^m$ (1861, p. 8-9)]. (Cette question est, croyons-nous, de M. Haton de la Goupillière.)

Addition par *Ange Le Taunéac* [Eugène Catalan], p. 147-148.

Autres développements par Dellac (p. 366-375), renvoyant à un théorème de Garcet (1860, p. 32-33).

(*Voir* aussi, de ce dernier, 1861, p. 397-398.)

Ces divers articles contiennent l'exposé de la méthode à suivre pour obtenir les sommes des nombres combinatoires pris de 3 en 3, de 4 en 4, etc. Ils font ressortir la corrélation immédiate de ce problème avec la formule 3573, dont les termes présentent les particularités suivantes :

Ce sont les seuls coefficients des puissances paires de la seconde moitié du développement de $(1+a)^{4n}$, mais leur produit par 2 donne le total de ces coefficients et de ceux de la première moitié qui leur sont égaux. Toutefois, certains d'entre eux sont pris négativement. On a donc retranché leur somme.

D'après cela, il est manifeste que la formule 3573 doit se décomposer de la manière suivante :

Représentons par c^1, c^2, c^3, ..., c^p les coefficients des puissances 1, 2, 3, ..., p; on aura

$$(1+1)^{4n}=1+c^1+c^2+c^3+\ldots+c^{2n}+c^{2n+1}+\ldots+c^{4n-1}+c^{4n}$$

avec

$$c^{4n} = 1, \qquad c^{4n-1} = c^1, \qquad \ldots.$$

Soient s_1, s_2, s_3, s_4 les sommes de ces nombres pris de 4 en 4 :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + c^4 + c^8 + \ldots, \\ s_2 &= c^1 + c^5 + c^9 + \ldots, \\ s_3 &= c^2 + c^6 + c^{10} + \ldots, \\ s_4 &= c^3 + c^7 + c^{11} + \ldots. \end{aligned}$$

La formule 3573 est évidemment

$$c^{2n} \pm (s_1 - s_3).$$

Mais, c^{2n} entrant dans s_1 ou dans s_3, c^{2n} est pris deux fois, mais avec des signes contraires.

Or, par des résultats connus (*loc. cit.*), on a

$$\begin{aligned} s_1 &= 2^{4n-2} + 2^{2n-1} \cos n\pi, \\ s_3 &= 2^{4n-2} - 2^{2n-1} \cos n\pi. \end{aligned}$$

Ainsi la série proposée représente deux fois 2^{2n-1}, ou le carré de 2^n. Et, en effet, on a bien, pour $m = 4n = 8$, 12 et 16, les valeurs $(2^2)^2$, $(2^3)^2$, $(2^4)^2$, ou 16, 64, 256, etc.

On voit que de la même analyse on déduira très simplement d'autres relations, connues ou nouvelles, entre les coefficients du binome.

Vieujeu.

3581. (1909, 169) (G. Espanet). — *Conoïde.* — L'équation du conoïde engendré par une droite qui se déplace en restant parallèle au plan zx et en s'appuyant sur l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

et la droite

$$x = 0, \qquad z = \lambda$$

est

$$a^2(y^2 - b^2)(z - \lambda)^2 + b^2\lambda^2x^2 = 0.$$

Cette surface admet deux sections circulaires, parallèles au plan xy, et par conséquent la directrice elliptique peut être remplacée par une directrice circulaire. Il en résulte que la même surface est identique au conoïde considéré en 1685 par Wallis, sous le nom de

cono-cuneus (*Opera*, t. II, p. 683). Nous avons étudié dans notre *Traité des courbes spéciales* (t. I, p. 292), sous le nom de *quartiques de Wallis*, les sections planes de ce conoïde.

F. Gomes TEIXEIRA (Porto).

Autres réponses de MM. *L.-N. Machaut*, et V. RETALI (Milan).

3582. (**1909**. 169) (G. ESPANET). — *Pentagone.* — Le moment de la force dirigée suivant AA′, par rapport au centre O de la circonférence, a pour mesure le double de la surface du triangle OAA′, multiplié par sin A sin A′, c'est-à-dire

$$2\,\mathrm{OA}\sin A.\mathrm{OA}'\sin A'.\sin\widehat{AOA'}$$

$$= 2\beta\varepsilon.\gamma\delta.\sin\widehat{AOA'} = \text{triangle } \beta\gamma\delta - \text{triangle } \varepsilon\gamma\delta,$$

α étant le point de contact de CD, β celui de DE, etc.

La somme des moments est identiquement nulle, car le signe de la différence des aires $\beta\gamma\delta$, $\varepsilon\gamma\delta$, par exemple, est le même que celui du sinus de l'angle AOA′ correspondant compté de A vers A′ dans le sens où sont disposés les sommets A, B, C, D, E ou α, β, γ, δ, ε.

WELSCH.

3587. (**1909**, 171) (G. CANDIDO). — *Divisibilité.* — Posons (pour abréger)

$$2^k = K, \qquad K - 1 = n.$$

Or (par le théorème de Fermat)

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

et

$$a^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1 \equiv 0 \pmod p,$$

si $(a/p)_2 = -1$.

Mais

$$\frac{1}{2}(p-1) = \frac{1}{2}2^k = 2^{k-1} = 2^n;$$

d'où s'ensuit

$$a^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Les seules conditions *nécessaires* sont que a soit premier à p, et $(a/p)_2 = -1$, p étant premier. A. CUNNINGHAM (Londres).

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS.

N° 1. *SUPPLÉMENT.* FÉVRIER 1909.

BIBLIOGRAPHIE.

COMPTE RENDU DU 51e EXERCICE DE LA SOCIÉTÉ DE SECOURS DES AMIS DES SCIENCES. — Paris, Gauthier-Villars, 1908.

C'est pour nous une occasion d'appeler l'attention de nos lecteurs sur cette Société si intéressante, présidée par M. G. Darboux, et dont le but a été ainsi défini :

La Société a pour objet de venir au secours des savants ou de leurs familles qui se trouvent dans le besoin.

Les conditions nécessaires pour avoir droit à des secours sont : 1° d'être Français ou Étranger naturalisé; 2° d'être auteur, soit d'un Mémoire ou travail jugé par l'Académie des Sciences digne d'être imprimé parmi ceux des savants étrangers, soit au moins d'un Mémoire ou travail approuvé par elle; 3° d'avoir des besoins constatés. — Ce même droit, à l'époque de la mort de l'intéressé, appartient à ses père et mère, à sa veuve et à ses enfants, pourvu qu'à cette époque ils aient des besoins constatés.

On devient membre de la Société moyennant une souscription de 10fr, ou souscripteur perpétuel en versant 200fr une fois pour toutes. La Société reçoit aussi les dons et legs. Les souscriptions sont reçues au siège social, boulevard Saint-Germain, 79, Paris, et aussi en province par les correspondants.

LA DIRECTION.



COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES. EXERCICES DE GÉOMÉTRIE COMPRENANT L'EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES, par *F. G. M.* — 4e éd., Tours, Mame; Paris, Veuve Poussielgue, 1907; in-8, XXI-1228 pages et 1540 figures dans le texte.

Ouvrage des plus intéressants et d'une lecture attrayante, ce qui nous paraît à désirer pour les Livres d'enseignement scientifique. Les Mathématiques, surtout la Géométrie, doivent attirer le lecteur par l'abondance, la variété et l'originalité des applications. Le présent Ouvrage y pourvoit amplement. On en jugera par ce simple Tableau comparatif:

1re édition....	1875	in-12	440	pages
2e »	1882	in-12	1125	»
3e »	1896	in-8	1135	»
4e »	1907	in-8	1228	»

Ajoutons que 1549 figures dans le texte, d'une exécution soignée, contribuent singulièrement à éclairer les démonstrations.

Après un exposé des méthodes générales et particulières viennent une série d'exercices divisés en théorèmes et problèmes sur les huit subdivisions pédagogiques de la Géométrie, ensuite quelques problèmes numériques (surfaces, volumes, longueurs d'arcs), enfin un très important supplément consacré à la Géométrie du triangle (125 pages, 131 figures).

Un mérite original de l'Ouvrage est le soin apporté aux références historiques, biographiques et bibliographiques, trop souvent délaissées dans la préparation des Livres d'enseignement. On y trouvera tous les noms des édificateurs de la Géométrie, de l'antiquité à nos jours, et, parmi nos contemporains, bon nombre de nos collaborateurs à l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, à *Mathesis*, sans oublier quantité d'autres périodiques et d'ouvrages didactiques.

Au point de vue particulier de l'*Intermédiaire*, cet Ouvrage est un répertoire des plus fructueux et qu'on pourra consulter avec pleine confiance, nonobstant de légères imperfections de détail, inévitables dans un si grand ensemble, mais que l'auteur s'efforce d'élaguer et dont il sera reconnaissant d'être avisé.

De grand cœur nous souhaitons à ce Livre le plus sympathique accueil auprès du public mathématique.

Un Correspondant.

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, par *P. Boutroux,* avec une Note de *P. Painlevé* (*Collection de monographies E. Borel*). — 1 vol. in-8, 190 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Il s'agit principalement de l'étude, dans les idées de M. Painlevé, des solutions réelles ou imaginaires des équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad (\text{P et Q polynomes en } x \text{ et } y),$$

$$\frac{dy}{dx} + A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0,$$

où les A sont des polynomes en x. L'auteur s'occupe principalement du mode de croissance et des points singuliers.

Dans la Note annexe, M. Painlevé étudie les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale n'a qu'un nombre fini de branches.

E. M.

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1909. — In-16 de plus de 950 pages avec figures et planches. 1fr,50 (franco, 1fr,85).

La librairie Gauthier-Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1909. — Suivant l'alternance adoptée, ce Volume, de millésime impair, contient, outre les données astronomiques, des Tableaux relatifs à la Géographie, la statistique, les monnaies, etc. Cette année, nous signalons tout spécialement les Notices de M. G. Bigourdan : *Les Étoiles variables,* et celle de M. Ch. Lallemand : *Mouvements et déformation de la croûte terrestre.*

Œuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par M. *E. Picard,* membre de l'Institut. Tome II. — 1 vol. grand in-8 de VI-420 pages, avec un portrait. Paris, Gauthier-Villars, 1908. Prix : 18fr.

Ce second Volume a été étudié avec le soin précieux qui avait présidé à l'édition du premier Volume. Une revision des calculs a été faite pour certaines questions traitées d'une façon uu peu concise par Hermite; des notes permettent au lecteur de retrouver les intermédiaires que l'illustre mathématicien avait négligé d'indiquer.

Ce Volume comprend les Mémoires qui ont paru de 1858 à 1872 et dont les plus importants se rapportent à la résolution de l'équation du cinquième degré, aux équations modulaires, à la théorie des fonctions elliptiques. A ces Mémoires parus dans les grands recueils scientifiques, les éditeurs ont joint d'intéressantes Notes moins connues, extraites de la *Correspondance d'Hermite.* A. G.

Arithmétique graphique. *Les espaces arithmétiques, leurs transformations,* par M. *G. Arnoux,* ancien officier de Marine. — 1 vol. grand in-8 de XII-82 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Un espace arithmétique est l'ensemble de points à coordonnées entières; à cet espace (qui peut être à *n* dimensions) l'auteur étend les définitions relatives à l'espace géométrique, avec les multiples restrictions qu'impose l'obligation de ne considérer que des coordonnées entières. Il indique la voie qui permettrait de construire une *Géométrie analytique arithmétique.*

Introduisant la notion d'espaces modulaires (espaces ne comportant que des coordonnées prises entre des limites données), l'auteur étudie leurs transformations et applique les résultats obtenus à quelques questions telles que le problème des trente-six officiers, l'étude des grilles et constellations arithmétiques dont la notion a été introduite par M. G. Tarry. A. G.

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS.

N° 2. *SUPPLÉMENT.* Avril 1909.

BIBLIOGRAPHIE.

La *Ligue nationale aérienne* est une œuvre éminemment nationale; elle groupe, grâce à une cotisation modique, la masse des patriotes qui prévoient la défense du pays et la sauvegarde de ses intérêts vitaux.

Prenons l'avance sur les pays voisins et augmentons chaque jour le nombre des adhérents (11000 actuellement); suivons l'exemple de notre collègue le capitaine Ferber qui vient d'amener *quinze* membres à la Ligue. *Inscrivons nos parents et nos enfants.*

La cotisation de membre adhérent est de *cinq* francs par an, et de *six* francs par an pour les colonies et l'étranger.

Avantages actuels : La *Société d'Encouragement à l'Aviation* accorde à tous les membres de la Ligue l'entrée gratuite à l'Aérodrome de Juvisy en semaine; le dimanche entrée gratuite ou à demi-tarif.

A Pau (expériences Wright), entrée permanente à moitié prix, ainsi qu'au *Concours d'aviation de Douai* (28 juin au 18 juillet). L'*Exposition de Nancy* (mai-novembre) donnera probablement l'entrée gratuite. Les adhérents reçoivent gratuitement la Revue mensuelle (16 pages in-8°), etc.

Le Comité comprend MM. Quinton, Painlevé, Appell et une dizaine de membres de l'Académie des Sciences.

Je suis à la disposition de nos collègues; ils n'auront qu'à m'adresser leur adhésion et un mandat; *sans aucun frais supplémen-*



taire, ils recevront leur carte d'adhérent, et le service du journal.

A. GÉRARDIN, directeur du *Sphinx-Œdipe,*
32, quai Claude-le-Lorrain, à Nancy.

LECTURES DE MÉCANIQUE. *La Mécanique enseignée par les auteurs originaux* (1re partie), par *E. Jouguet,* ingénieur des Mines, ancien professeur à l'École des Mines de Saint-Étienne. — 1 vol. in-8. Paris, Gauthier-Villars, 1908. Prix : 7fr,50.

La Mécanique rationnelle, telle qu'elle est enseignée, fait appel à quelques notions fondamentales sur lesquelles il est difficile d'insister et qu'on ne peut guère discuter dans un cours limité.

Le complément indispensable à cette étude ne se trouve guère que dans les travaux entrepris depuis quelques années relativement à l'origine et au développement des notions de force, de masse, d'énergie. M. Jouguet a pensé qu'il était possible d'illustrer les histoires si précieuses de M. Mach et de M. Duhem en donnant quelques extraits des travaux des créateurs de la Mécanique. On ne peut que le louer du choix judicieux qu'il a fait dans ces extraits et des commentaires si clairs dont il les a accompagnés.

Cette première Partie est divisée en deux Livres, l'un relatif à la Statique, l'autre à la Dynamique.

Dans le premier Livre sont exposés le *principe du levier* d'Archimède, l'usage qu'en fit Galilée ; la notion du *parallélogramme des forces,* d'après Stevin et Léonard de Vinci ; le principe du *travail virtuel.*

Dans le second Livre, nous trouvons des extraits importants de l'œuvre de Descartes et de celle de Galilée relatifs au mouvement ; les études de Wren, Wallis et Huygens sur le choc des corps ; l'introduction du principe de la *conservation de l'énergie* et l'étude des systèmes de Huygens et Bernoulli.

L'Ouvrage se termine par un aperçu des théories de Leibniz et de ses idées relatives à la quantité de mouvement et à la force vive.

A. G.



INTERNATIONAL CATALOGUE OF SCIENTIFIC LITERATURE, 5e et 6e années, de juin 1905 à avril 1907. — 2 vol. Londres, Harrison and Sons; Paris, Gauthier-Villars.

Ces deux Volumes consacrés aux Mathématiques donnent la bibliographie de tous les Mémoires insérés dans divers recueils.

PRÉCIS ARITHMÉTIQUE DES CALCULS D'EMPRUNTS A LONG TERME ET DE VALEURS MOBILIÈRES, par *H. Sarrette*, ancien élève de l'École Polytechnique, inspecteur de la Comptabilité des Chemins de fer de l'Ouest. — 1 vol. in-8 (25 × 16) de 300 pages, contenant 5 Tables financières. Paris, Gauthier-Villars, 1908. Prix : 10fr.

Cet Ouvrage est destiné aux personnes qui, n'ayant que des connaissances usuelles d'Arithmétique, s'intéressent aux opérations financières les plus courantes. Il renferme tout ce qui est nécessaire pour permettre à quiconque n'a pas une culture mathématique, même élémentaire, de comprendre et de traiter les questions les plus diverses relatives aux emprunts et aux valeurs mobilières. La théorie extrêmement simple est exposée très clairement et est illustrée de nombreux exemples. Cet Ouvrage peut être lu et compris par tout le monde et il a le mérite de montrer que la complexité des opérations financières est toute apparente. L'auteur a cru devoir bannir toute formule, craignant que l'appareil algébrique ne rebutât le lecteur ; je trouve qu'il y a là un scrupule excessif, rien n'étant plus simple que d'expliquer ce que signifient des lettres dans une formule qui condense toute une théorie et qui permet de la mieux retenir.

A. G.

Leçons élémentaires sur le Calcul des probabilités, par M. *R. de Montessus*, docteur ès sciences mathématiques, lauréat de l'Institut. — 1 vol. grand in-8 de VI-191 pages, avec 17 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Après avoir analysé sur quelques exemples simples la notion de hasard, l'auteur définit la *probabilité mathématique* et fait ressortir l'origine expérimentale de la loi de Bernoulli, qui sert de base au Calcul des probabilités. De nombreux problèmes précisent la notion de probabilité.

Le Chapitre II est consacré à la théorie des écarts; le Chapitre III, qui traite des jeux de hasard, roulette, petits-chevaux, baccara, etc., comprend une étude intéressante de jeux plus savants, whist, piquet, écarté, et se termine par l'étude de la spéculation financière.

Une discussion approfondie du paradoxe énoncé par Bertrand laisse apercevoir au lecteur combien il faut être prudent dans les questions de probabilité et combien il est parfois difficile de choisir la convention dont dépend le problème pour qu'il ait un sens précis.

La théorie des erreurs est l'objet du Chapitre V ; la loi de Gauss y est appliquée aux problèmes que soulève l'étude du tir, de son réglage, des écarts probables.

L'Ouvrage se termine par l'application du calcul des probabilités à la théorie des assurances et comporte une étude du fonctionnement d'une compagnie d'assurances.

Écrit très simplement, en ne faisant appel qu'à des notions très élémentaires de Mathématiques, ce petit Livre peut être lu par tout élève de Mathématiques spéciales ; il offre un intérêt pour le mathématicien, auquel les questions traitées ici ne sont pas toujours familières, et il a le rare mérite de bien mettre en évidence les limites dans lesquelles le calcul des probabilités est légitime. A. G.


ROOM